

Eulerov metod - Zadacu za vežbu

Zadatak 1

Koristeći Eulerov metod sa korakom $h = 0.5$, odrediti približnu vrednost $y(2.5)$, ako funkcija y zadovoljava sledeći Cauchyjev problem:

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Zatim, koristeći tačno rešenje, izračunati apsolutnu i relativnu grešku aproksimacije.

Rešenje

Za datu diferencijalnu jednačinu $y' = y$, Eulerova formula glasi:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + hy_k = (1 + h)y_k.$$

Dakle, rekursivno dobijamo:

$$y_{k+1} = (1 + h)^{k+1}y_0, \quad \text{pri čemu je } y_0 = 1.$$

Korakom $h = 0.5$, dobijamo sledeće vrednosti:

k	x_k	y_k
0	0.0	1.00000
1	0.5	1.50000
2	1.0	2.25000
3	1.5	3.37500
4	2.0	5.0625
5	2.5	7.59375

Tabela 1: Eulerov metod

Dakle, približno:

$$y(2.5) \approx y_5 = 7.59375.$$

Pošto je tačno rešenje ove jednačine $y = e^x$, tačna vrednost u tački $x = 2.5$ je:

$$y(2.5) = e^{2.5} \approx 12.1825.$$

Zato možemo izračunati:

- **Apsolutnu grešku:**

$$\Delta = |e^{2.5} - y_5| \approx |12.1825 - 7.59375| \approx 4.58875.$$

- **Relativnu grešku:**

$$r = \frac{\Delta}{e^{2.5}} \approx \frac{4.58875}{12.1825} \approx 0.3767 \approx 0.38.$$

Zadatak 2

Približno odrediti rešenje Cauchyjevog problema:

$$y' + 2y = 2 - e^{-4x}, \quad y(0) = 1,$$

na intervalu $x \in [0, 0.5]$ sa korakom $h = 0.1$. Odrediti broj značajnih cifara rešenja u tački $x = 0.5$.

Rešenje

Prebacimo jednačinu u standardni oblik:

$$y' = 2 - e^{-4x} - 2y$$

Koristimo eksplicitni Eulerov metod:

$$y_{k+1} = y_k + h(2 - e^{-4x_k} - 2y_k)$$

Početna vrednost je $y_0 = 1$, a korak $h = 0.1$. Računamo sukcesivno za $k = 0, 1, \dots, 5$:

k	x_k	y_k (Euler)
0	0.0	1.000000
1	0.1	0.900000
2	0.2	0.852968
3	0.3	0.837441
4	0.4	0.839834
5	0.5	0.851677

$$y(0.5) \approx y_5 = 0.8517$$

Egzaktno rešenje

Egzaktno rešenje diferencijalne jednačine dobijamo metodom integrisajućeg faktora:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-4x}$$

U tački $x = 0.5$:

$$y(0.5) = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2} \approx 0.8837$$

Analiza greške

Apsolutna greška:

$$\Delta = |y_{\text{egz}}(0.5) - y_5| = |0.8837 - 0.8517| = 0.0321$$

Relativna greška:

$$r = \frac{\Delta}{y_{\text{egz}}(0.5)} = \frac{0.0321}{0.8837} \approx 0.03627$$

Broj značajnih cifara:

$$z_x = -\log_{10}(r) = -\log_{10}(0.03627) \approx 1.44$$