

# Balistika na cilju

5

Parčadno dejstvo - fragmentacija

# Uvod. Fragmentacija – pojam i primene

- **Fragmentacija** - proces strukturne **dezintegracije** tela, tj. formiranja izvesnog broja parčadi usled **višestrukog loma materijala**.
- **Primene** fragmentacije:
  - vojne
  - civilne
- **Vojne primene** - balistika na cilju
  - **prirodna i kontrolisana fragmentacija** - mehanizmi delovanja projektila parčadnog dejstva,
  - **fragmentacija probojnog projektila**, kao i same napadnute prepreke,
  - **fragmentacija kumulativnog mlaza**
  - **fragmentacija materijala prepreke** na njenoj zadnjoj površini usled dejstva udara ili kontaktne detonacije (*spalling*)
  - proučavanje navedenih vidova fragmentacije značajno je sa stanovišta analize **otpornosti i optimizacije zaštite** potencijalnih ciljeva
- Najznačajnija istraživanja u domenu eksperimentalne fragmentacije, kao i najveći broj teorijskih modela fragmentacije bili su motivisani **primenama u domenu odbrambenih tehnologija**.

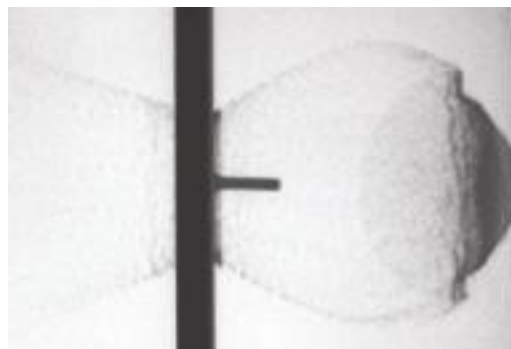
# Podela fragmentacionih procesa

- Prema **karakteru opterećenja** koja izazivaju fragmentaciju, razlikujemo:
  - **kvazistatičke procese fragmentacije**, npr. drobljenje materijala, koje karakteriše ponovljeno dejstvo opterećenja koje dovodi do sekvencijalne fragmentacije, tj. ponovljene fragmentacije već formiranih fragmenata;
  - **dinamičku fragmentaciju**, koja je posledica delovanja snažnih impulsnih opterećenja koja praktično izazivaju jednovremeno formiranje izvesnog broja fragmenata; dve osnovne vrste procesa koje izazivaju dinamičku fragmentaciju su udari i eksplozije.
- Sa aspekta **porekla fragmenata** razlikujemo:
  - **primarnu fragmentaciju**, koja je posledica osnovne eksplozije ili udara;
  - **sekundarnu fragmentaciju**, koja nastaje usled naknadnog dejstva primarne fragmentacije, npr. dejstvo udarnog talasa ili primarnih fragmenata može da izazove sekundarnu fragmentaciju objekata koji se nalaze u okolini.
- **Materijali**: metali, geološki materijali, keramika i staklo
  - suštinski se **razlikuju** procesi fragmentacije krutih i žilavih materijala.
- Prema **broju prostornih dimenzija**:
  - jednodimenzionu (1D),
  - dvodimenzionu (2D) i
  - trodimenzionu (3D) fragmentaciju.

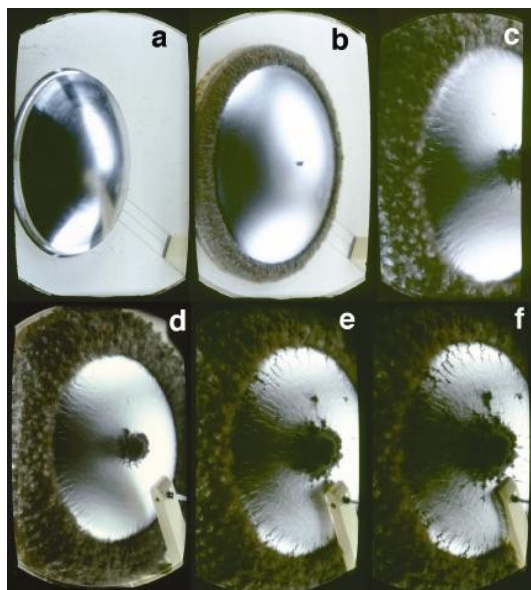
# Primeri fragmentacionih procesa



jednodimenziona  
fragmentacija  
prstena

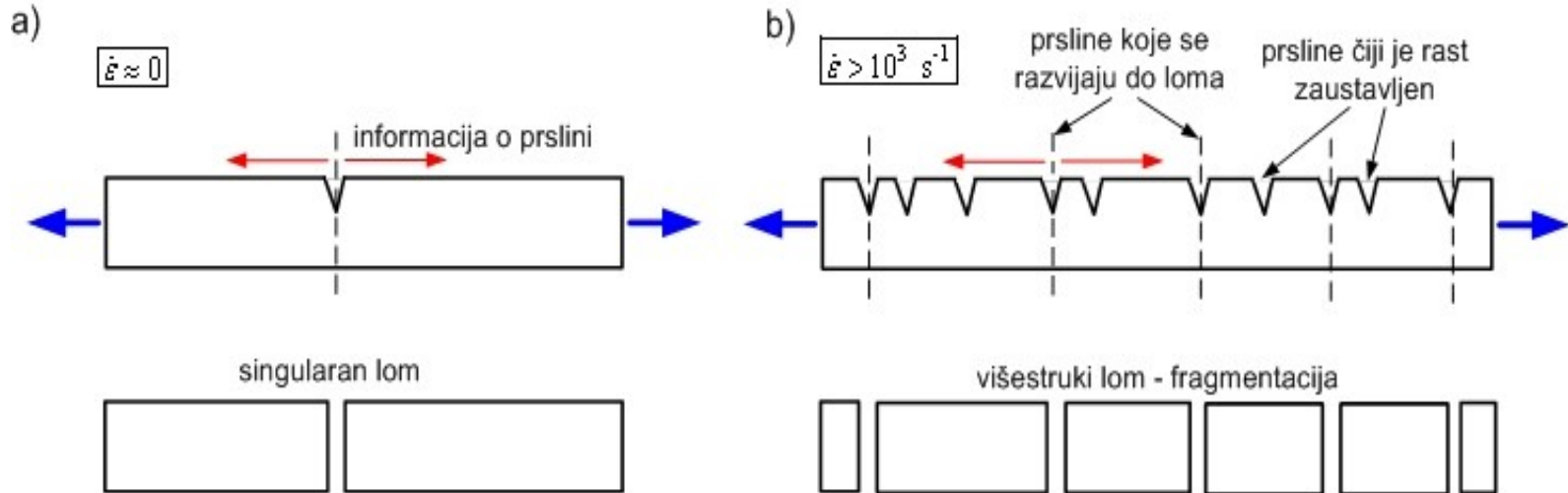


radiografski snimak 3D  
fragmentacije usled  
udara aluminijumskog  
projektila u tanku  
aluminijumsku prepreku  
pri brzini od  $\sim 7\text{km/s}$



dvodimenziona fragmentacija  
dela tanke sfere pod dejstvom  
produkata detonacije, snimci  
dobijeni ultrabrzom  
fotografijom

# Osobnosti procesa dinamičke fragmentacije



Fenomenologija nastanka loma materijala:

- a) **kvazistatičko opterećenje** dovodi do klasičnog singularnog loma,
- b) **impulsno opterećenje** izaziva dinamička naprezanja i dovodi do višestrukog loma materijala, odnosno fragmentacije

# Osobnosti procesa dinamičke fragmentacije

- Za proces fragmentacije su od ključnog značaja dve grupe ulaznih parametara: **karakter opterećenja** i **osobine materijala**.
- Jedna od najvažnijih fizičkih karakteristika procesa je **brzina deformacija** materijala fragmentacionog tela  $\dot{\epsilon}$ , koja zavisi od dve pomenute grupe parametara.

Brzina deformacije ( $s^{-1}$ )	Kategorija	Metoda ispitivanja
$10^{-9} - 10^{-5}$	Relaksacija napona, puzanje	Konvencionalne metode
$10^{-5} - 10^0$	Kvazistatička opterećenja	Hidraulične mašine
$10^0 - 10^3$	Dinamička opterećenja (male brzine deformacija)	Visokobrzinske mašine
$10^3 - 10^5$	<b>Dinamička opterećenja (velike brzine deformacija)</b>	<b>Primena eksploziva</b>
$10^5 - 10^7$	Dinamička opterećenja (ultrabrze deformacije)	Eksplozivi, udari ultra-brzinama, laseri

# Osobnosti procesa dinamičke fragmentacije

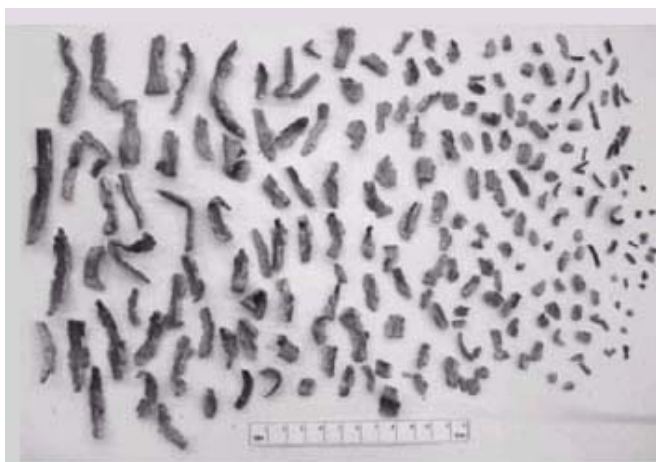
- Za **dinamičku fragmentaciju** je od posebnog značaja proučavanje **tri osnovna mehanizma** koja dovode do dinamičkog loma materijala:
  - **brzo prostiranje prslina u materijalu**, što karakteriše lom dominantno krutih materijala,
  - **brzo stvaranje, rast i spajanje mikro-šupljina** u opterećenom materijalu predstavlja važan mehanizam koji dovodi do loma žilavih materijala,
  - **formiranje zona (pojaseva) adijabatskog smicanja** predstavlja poseban slučaj loma materijala usled smicanja koji takođe karakteriše dinamička naprezanja žilavih materijala.
- U praksi se često istovremeno sreću dve ili sve tri prethodno navedene pojave.
- U fokusu naše pažnje je jedna klasa problema dinamičke fragmentacije - reč je o **fragmentacija cilindra** pod dejstvom unutrašnjeg pritiska koji stvaraju gasoviti produkti detonacije eksploziva.

# Fragmentacija cilindra pod dejstvom produkata detonacije

- modeliranje fragmentacije košuljice razornih projektila, kao fenomen od ključnog značaja za projektovanje, redizajniranje i ocenu efikasnosti projektila parčadnog dejstva
- projektili parčadnog dejstva
  - konstrukcija sa prefragmentisanim parčadima,
  - košuljice kod kojih se ostvaruje tzv. kontrolisana fragmentacija
    - na ovaj način se obezbeđuje optimizacija mase i oblika formiranih fragmenata.
  - klasično rešenje košuljica koje se rasprskavaju putem prirodne fragmentacije
    - dominantan pristup iz više razloga:
      - strukturna otpornost u uslovima velikih ubrzanja u fazi kretanja kroz cev, odnosno lansiranja projektila,
      - jednostavnost i tehnologičnost konstrukcije, te njena pouzdanost i cena.



# Fragmentacija cilindra pod dejstvom produkata detonacije



## Proces formiranja parčadi

- **Detonacijom eksploziva** u košuljici projektila formiraju se gasoviti produkti čiji pritisak iznosi nekoliko stotina hiljada bara.
- Ovaj pritisak izaziva izuzetno **snažna impulsna naprezanja i deformacije** materijala košuljice i konačno dovodi do gubitka strukturne celovitosti košuljice, tj. do njene fragmentacije.
- **Proces traje veoma kratko** – od trenutka inicijacije detonacije do formiranja parčadi prođe vreme reda nekoliko desetina mikrosekundi.
- Usled dejstva udarnih talasa i pritiska košuljica se najpre **plastično deformiše** poprimajući karakterističan kruškast oblik, pri čemu se prečnik košuljice značajno povećava (približno se udvostručava).
- Pri dovoljno velikim vrednostima napona, odnosno deformacija, praktično istovremeno dešavaju se **dva procesa**:
  - usled zateznih napona dolazi do formiranja **aksijalnih prslina** na spoljašnjoj površini košuljice,
  - usled snažnog sabijanja na unutrašnjem delu košuljice formiraju se **zone smicanja**.
- Raspored i broj prslina, odnosno zona smicanja na košuljici određuju **veličinu, masu i oblik** formiranih fragmenata.

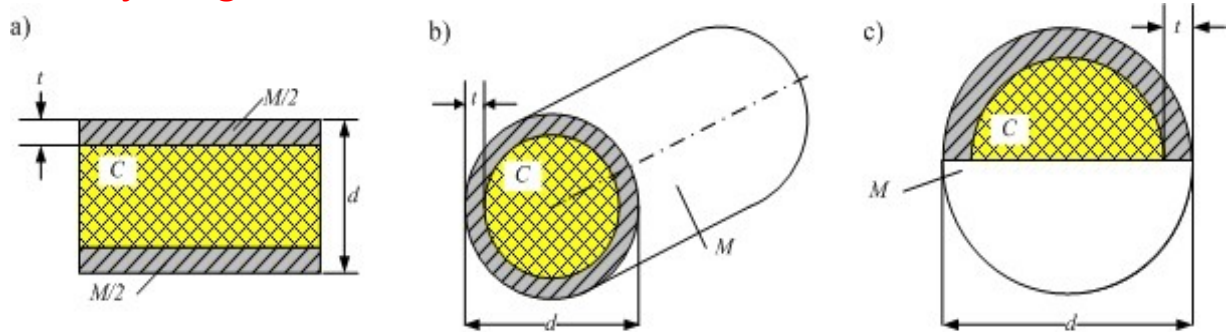
# Fragmentacija cilindra pod dejstvom produkata detonacije

- vrednost **energije** koja se predaje materijalu u toku procesa širenja košuljice značajno je veća od energije koja se utroši na deformisanje materijala i formiranje fragmenata
- stoga fragmenti nakon formiranja raspolažu značajnom **kinetičkom energijom**, odnosno brzinom
  - brzina reda veličine 1000 m/s
  - ova kinetička energija omogućava dejstvo fragmenata na cilju
- osnovni **cilj modeliranja fragmenatacije** košuljice projektila (kao i modeliranje fragmentacionih procesa uopšte) podrazumeva:
  - utvrđivanje **raspodele mase** (odnosno veličine) **fragmenata**
  - određivanje **raspodele oblika** parčadi,
  - definisanje njihove **raspodele u prostoru**, kao i
  - određivanje **brzine razletanja** fragmenata.

- Gurney-jev model

- dobija se izraz za **brzinu razletanja fragmenata**

$$v = \frac{\sqrt{2E_G}}{\sqrt{\frac{n}{n+2} + \frac{M}{C}}}$$



- $E_G$  predstavlja tzv. **Gurney-evu energiju** – deo ukupnog energetskog potencijala eksploziva (60-70%) koji definiše sposobnost ubrzavanja obloge i koji predstavlja karakteristiku eksplozivne materije;
- $M/C$  predstavlja **odnos masa metalne obloge i eksplozivnog punjenja**,
- vrednosti parametra  **$n=1,2,3$**  odnose na ravansku, cilindričnu i sfernu geometriju sistema eksploziv-obloga

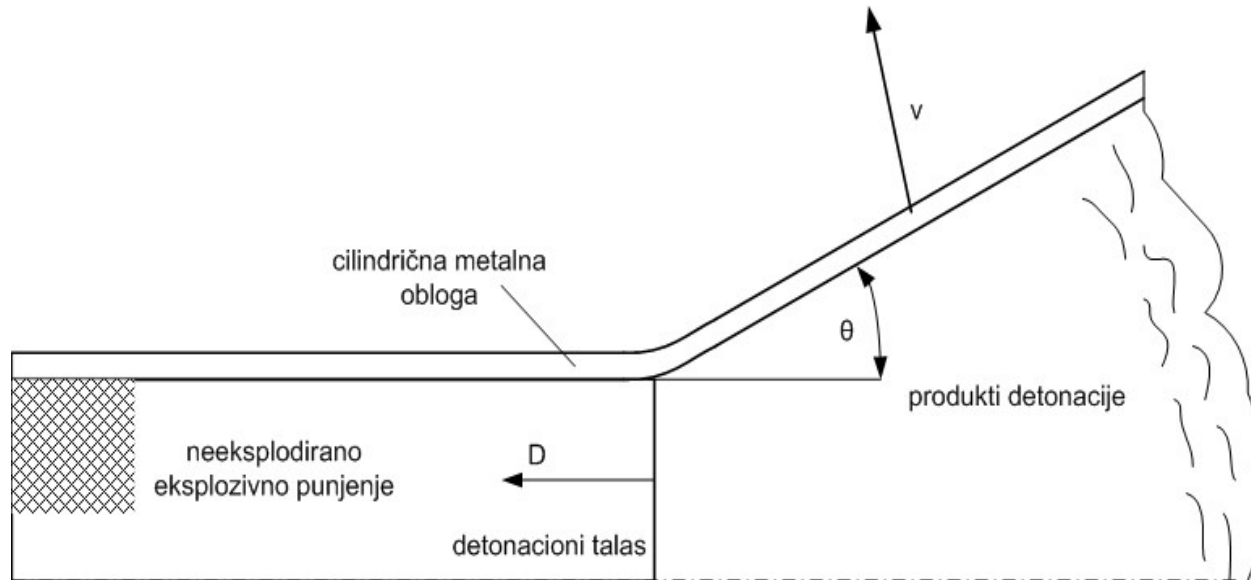
# Brzina odbacivanja obloge

- Taylor-ova formula

- određivanje brzine odbacivanja obloge  $v$  pod dejstvom bočnog detonacionog talasa

$$v = 2D \sin \frac{\theta}{2}$$

- gde  $D$  označava brzinu detonacije korišćenog eksploziva, dok je  $\theta$  ugao odbacivanja obloge.



Taylor-ov model odbacivanja metalne obloge pod dejstvom bočnog (čeonog) detonacionog talasa

# Empirijski zakoni raspodele veličine i mase fragmenata

- proces fragmentacije ima elemente **slučajnog procesa** - pri "identičnim" početnim uslovima dobijaju se različiti ishodi procesa
- **raspodela mase fragmenata** se opisuje **kumulativnom funkcijom raspodele**:
  - Kumulativni broj fragmenata  $N(m)=N(>m)$  je ukupni broj fragmenata čija je pojedinačna masa veća od  $m$ :

$$N(m) = N_0 \int_m^{\infty} f_N(m) dm$$

- pri čemu je  $f_N(m)$  funkcija gustine raspodele mase fragmenata, dok je  $N_0$  ukupan broj formiranih fragmenata.
- alternativno se koristi i **kumulativna masa fragmenata**  $M(m)=M(>m)$  koja predstavlja masu svih fragmenata čija je pojedinačna masa veća od  $m$

$$M(m) = M_0 \int_m^{\infty} f_M(m) dm$$

- gde je  $f_M(m)$  odgovarajuća funkcija gustine raspodele mase fragmenata, dok je  $M_0$  ukupna masa fragmenata, tj. fragmentacionog tela.
- može se pokazati da važi:

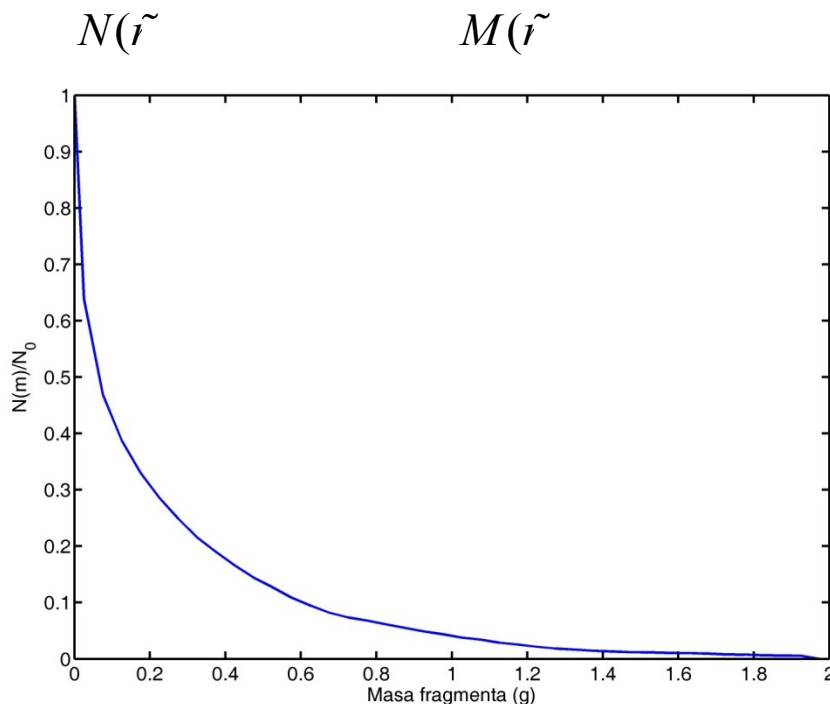
$$M_0 = \int_0^{\infty} N(m) dm$$

# Empirijski zakoni raspodele veličine i mase fragmenata

- **srednja masa fragmenata** (očekivana vrednost mase fragmenta), koja predstavlja najznačajniju karakteristiku raspodele, određena je izrazom:

$$\bar{m} = \frac{M_0}{N_0} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N(m) dm$$

- Veoma korisne numeričke karakteristike navedenih raspodela su i **medijane**, definisane uslovima



Primer relativne kumulativne raspodele broja generisanih fragmenata određene na osnovu eksperimentalnih podataka

# Geometrijski pristup

## Jednodimenziona slučajna fragmentacija

- Najjednostavniji slučaj fragmentacije predstavlja **jednodimenziona fragmentacija**
- Pretpostavimo da na **slučajan način** dolazi do fragmentacija prave, ili ma kakve krive linije dužine  $L$ , tako što **nasumično raspoređene tačke** duž krive određuju mesta prekida – **tačke “loma”** – razmatrane linije
- Cilj je da se odredi **raspodela dužina tako formiranih fragmenata**
- Elementarnim razmatranjima u domenu teorije verovatnoće dobija se **verovatnoća da fragment ima dužinu veću od  $l$**

$$P(l) = P(> l) = e^{-\lambda l}$$

– gde je  $\lambda$  – srednja gustina tačaka loma, tj.  $1/\lambda$  je srednja dužina fragmenta

- Pošto je **masa proporcionalna dužini**, važi:

$$N(m) = N_0 \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right)$$

# Geometrijski pristup

## Jednodimenziona slučajna fragmentacija

- pristup slučajnoj geometrijskoj fragmentaciji zasnovan na konceptu Voronoi-Dirichlet-ovih dijagrama
  - Voronoi dijagram podrazumeva segmentaciju prostora (1D, 2D ili 3D), putem slučajno generisanog skupa tačaka, na izvestan broj podprostora, tako da svaki podprostor sadrži tačno jednu od ovih slučajno raspoređenih tačaka, pri čemu je svaka tačka podprostora bliža pripadajućoj generativnoj tački nego bilo kojoj od preostalih generisanih tačaka.

- funkcija gustine raspodele dužine fragmenata dobija se u obliku

$$f(l) = 4\lambda^2 l e^{-2\lambda l}$$

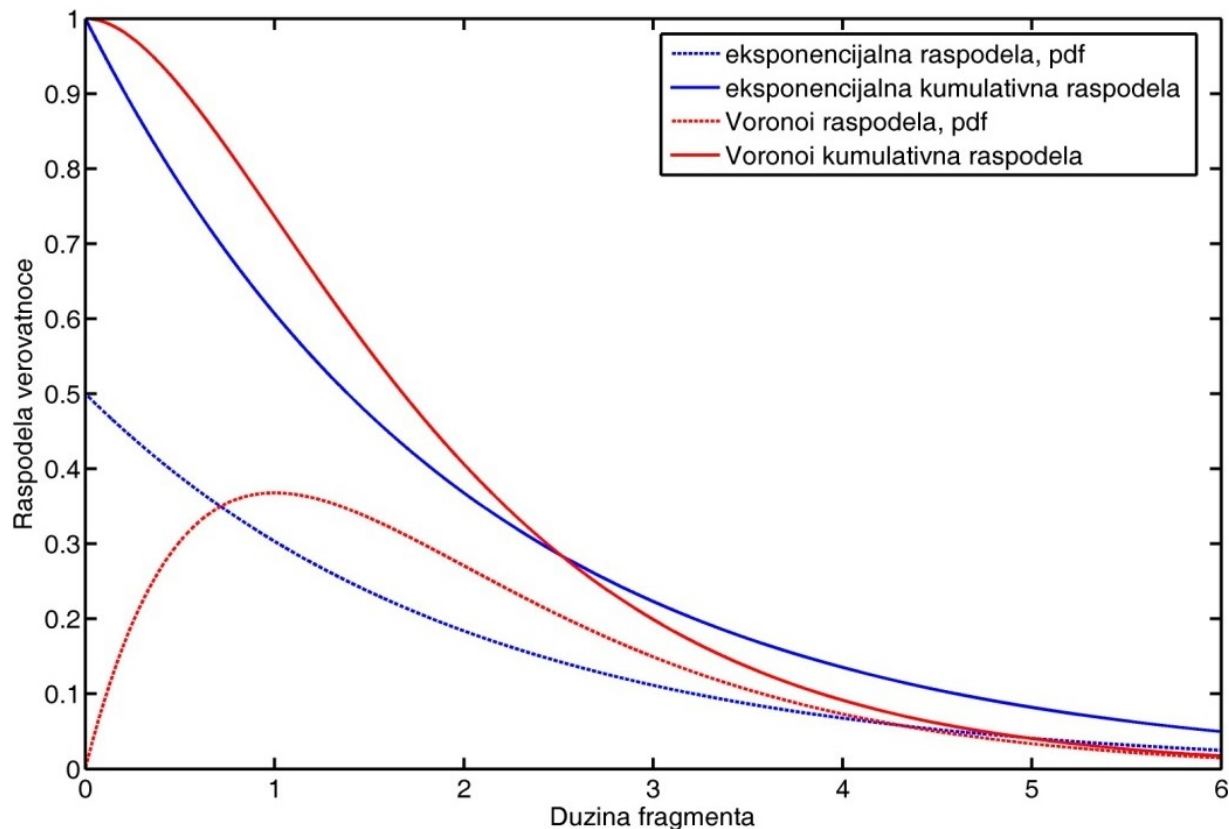
- kumulativni zakon raspodele dužine fragmenata definisan je izrazom

$$P(l) = (1 + 2\lambda l) e^{-2\lambda l}$$



# Geometrijski pristup

## Jednodimenziona slučajna fragmentacija



Jednodimenziona slučajna fragmentacija: poređenje ekponencijalne (Lineau) i Voronoi raspodele; predstavljene su funkcije gustine raspodele verovatnoće (pdf) i kumulativne raspodele verovatnoće; srednja vrednost dužine fragmenta ista je u oba slučaja ( $\lambda=0.5$ )

# Geometrijski pristup

## Dvodimenziona fragmentacija

- Kao paradigmatičan primer, razmotrimo najpre **dvodimenzionu fragmentaciju ravni** putem dva nezavisna skupa međusobno normalnih pravih.
- Pretpostavimo da je "**gustina**" **linija**  $\lambda$  (broj linija po jedinici dužine) jednaka u horizontalnom i vertikalnom pravcu, dobija se:

$$P(a) = P(xy > a) = \lambda^2 \iint_{xy > a} \exp[-\lambda(x+y)] dx dy = \lambda \int_0^{\infty} \exp\left[-\lambda\left(x + \frac{a}{x}\right)\right] dx = 2\lambda\sqrt{a}K_1(2\lambda\sqrt{a})$$

– gde je  $K_1(\bullet)$  modifikovana Bessel-ova funkcija druge vrste prvog reda.

- Mott** je na osnovu analize fragmenata dobijenih detonacijom razornih projektila predložio raspodelu koja ima oblik

$$P(a) = e^{-\sqrt{\alpha a}}$$

- Odavde sledi poznati **Mott-ov zakon raspodele mase fragmenata** u obliku

$$N(m) = N_0 \exp\left[-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}\right] \quad \mu = \frac{\bar{m}}{2}$$

# Geometrijski pristup

## Dvodimenziona fragmentacija

- **Grady i Kipp**, kao i Cohen usvojili su drugačiji pristup modeliranju dvodimenzione fragmentacije.
  - Ne ulazeći u način generisanja fragmenata pretpostavlja se da sve moguće realizacije procesa fragmentacije imaju jednaku verovatnoću, uz uslov da je ukupna površina nastalih fragmenata jednaka početnoj površini fragmentisanog tela.

$$\sum_j a_j = a_0$$

- Prema tome, **zakon raspodele mase fragmenata** ima isti oblik kao u slučaju jednodimenzione fragmentacije:

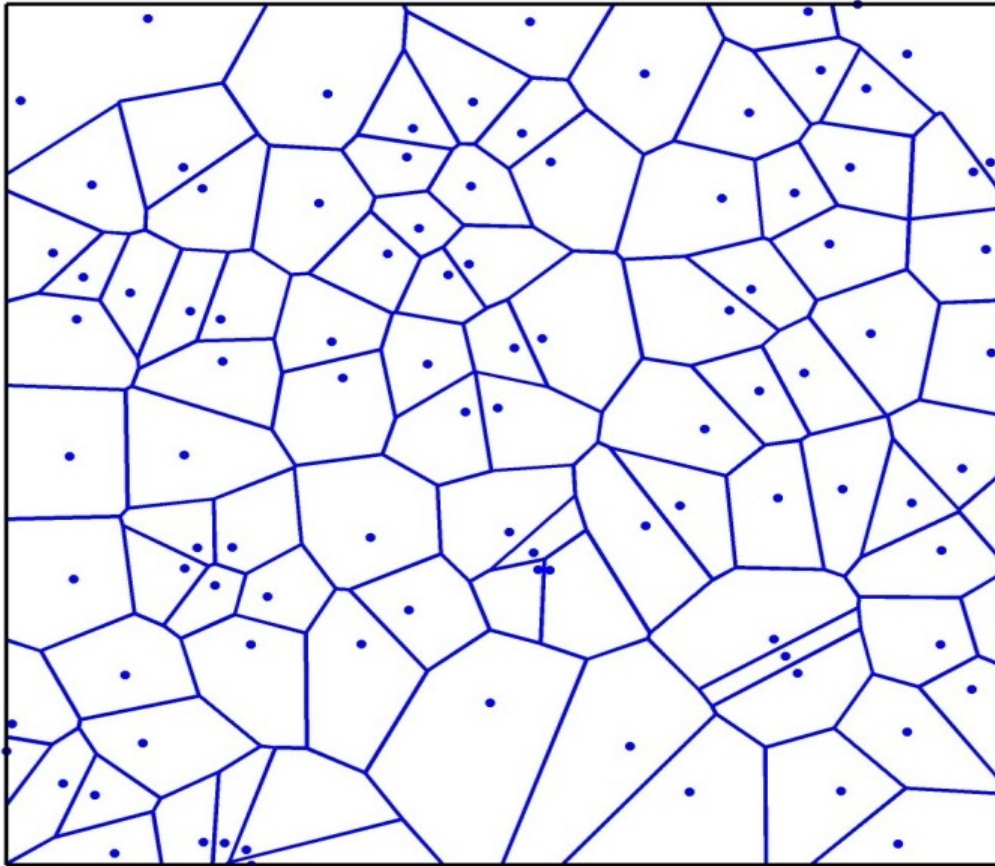
$$N(m) = N_0 \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right)$$

- Konačno, Kiang je predložio aproksimativnu **generalizaciju raspodele veličine fragmenata** generisanih Voronoi dijagramima:

$$P(a) = \frac{\Gamma(4, 4\alpha a)}{\Gamma(4)} = e^{-4\alpha a} \sum_{k=0}^3 \frac{(4\alpha a)^k}{k!}$$

# Geometrijski pristup

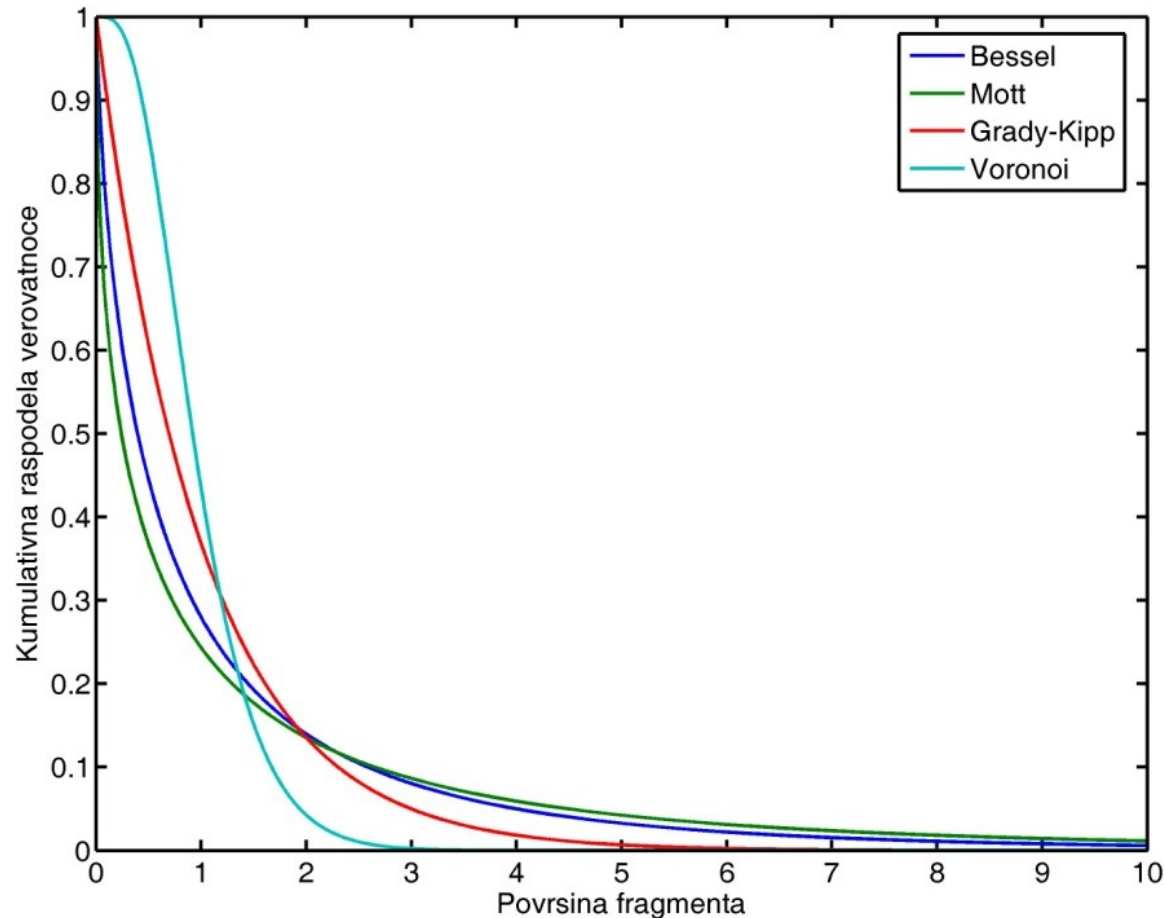
## Dvodimenziona fragmentacija



Slučajna geometrijska fragmentacija kvadrata: nasumično je izabrano 100 tačaka unutar kvadrata koje predstavljaju "centre" fragmenata konstruisanih na osnovu odgovarajućeg Voronoi dijagrama

# Geometrijski pristup

## Dvodimenziona fragmentacija



Dvodimenziona slučajna fragmentacija: poređenje kumulativne raspodele verovatnoće u slučaju Bessel-ovog, Mott-ovog, Grady-Kipp i Voronoi zakona raspodele; srednja vrednost površine fragmenta ista je u svim slučajevima

# Geometrijski pristup

## Trodimenzijska fragmentacija

- Trodimenzijska fragmentacija podrazumeva lom materijala duž sve tri dimenzije fragmentacionog tela
- Sa stanovišta primene - najsloženiji i najznačajniji vid fragmentacije
- Najjednostavniji primer 3D fragmentacije predstavlja particija prostora se tri skupa međusobno ortogonalnih ravni

$$P(xyz > v) = \lambda^3 \iiint_{xyz > v} \exp[-\lambda(x + y + z)] dx dy dz = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\lambda\left(x + y + \frac{v}{xy}\right)\right] dx dy =$$

$$= \lambda \sqrt{\lambda v} G_{0,3}^{3,0} \left( \lambda^3 v \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right. \right)$$

- Mott

$$N(m) = N_0 \exp\left[-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/3}\right]$$

- Grady-Kipp

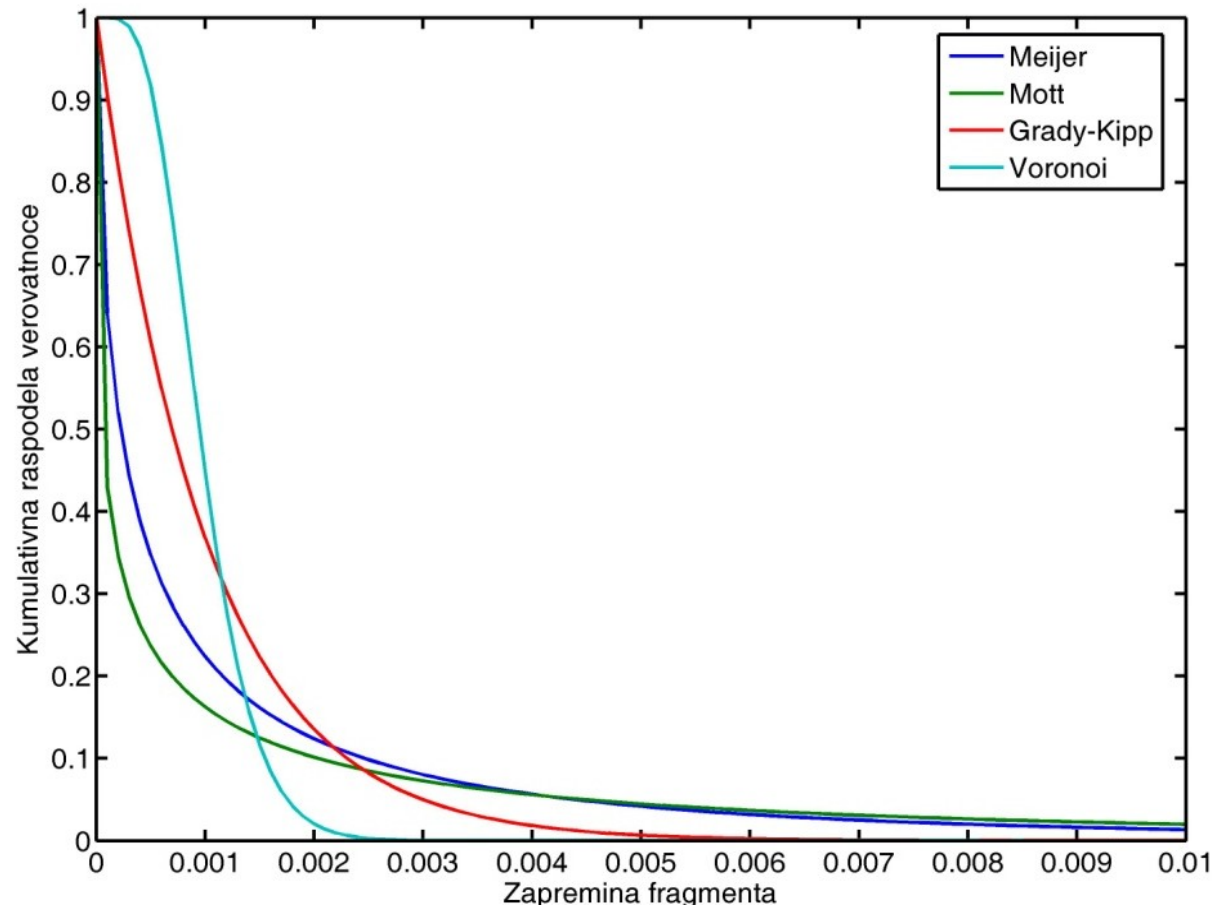
$$N(m) = N_0 \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right)$$

- Voronoi dijagrami

$$P(v) = \Gamma(6, 6\gamma v) / \Gamma(6) = e^{-6\gamma v} \sum_{k=0}^5 \frac{(6\gamma v)^k}{k!}$$

# Geometrijski pristup

## Trodimenzijska fragmentacija



Trodimenzijska slučajna fragmentacija: poređenje kumulativne raspodele verovatnoće u slučaju Meijer-ovog, Mott-ovog, Grady-Kipp i Voronoi zakona raspodele; srednja vrednost zapremine fragmenta ista je u svim slučajevima

# Ostali empirijski zakoni raspodele mase fragmenata

- Generalizovana Mott-ova raspodela

$$N(m) = \frac{M_0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\mu} \exp\left[-\left(\frac{m}{\mu}\right)^\nu\right] \quad \bar{m} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\mu$$

- Raspodela Stromsoe-Ingebrigtsena

- modifikacija Mott-ove raspodele

$$N(m) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\mu_k} \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{m}{m_{\max}}\right) \exp\left[-\left(\frac{m}{\mu_k}\right)^{\frac{1}{2}}\right], & m \leq m_{\max} \\ 0, & m > m_{\max} \end{cases}$$

- Generalizovana Grady-Kipp raspodela

$$\frac{N(m)}{N_0} = f e^{-\frac{m}{\mu_1}} + (1-f) e^{-\frac{m}{\mu_2}}$$



# Ostali empirijski zakoni raspodele mase fragmenata

- Lognormalna raspodela

$$\frac{N(m)}{N_0} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\ln m - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

- Weibull-ova raspodela

- Raspodelu definisana preko kumulativne mase parčadi  $M(m)$ ,
- dvoparametarska Weibull-ova distribucija (1939) - izvorno korišćena za statističku deskripciju čvrstoće materijala, kao i za opisivanje raspodele veličine zrna u procesima drobljenja

$$M(m) = M_0 e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^\lambda}$$

$$N(m) = \frac{N_0}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\lambda}, \left(\frac{m}{\mu}\right)^\lambda\right), \quad \lambda > 1$$

# Ostali empirijski zakoni raspodele mase fragmenata

- Held-ova raspodela

$$M(n) = M_0[1 - \exp(-Bn^\lambda)], \quad n = 1, 2, \dots, N_0$$

- $M(n)$  - ukupna masa prvih  $n$  parčadi ako su sva parčad sortirana u opadajući niz od najtežeg prema najlakšem parčetu,  $n$  - kumulativni broj parčadi, dok su  $B$  i  $\lambda$  - parametri Held-ove raspodele
- pojedinačna mase svakog parčeta određuje se prema:

$$m_n = M(n) - M(n-1)$$

- Stepeni zakon raspodele

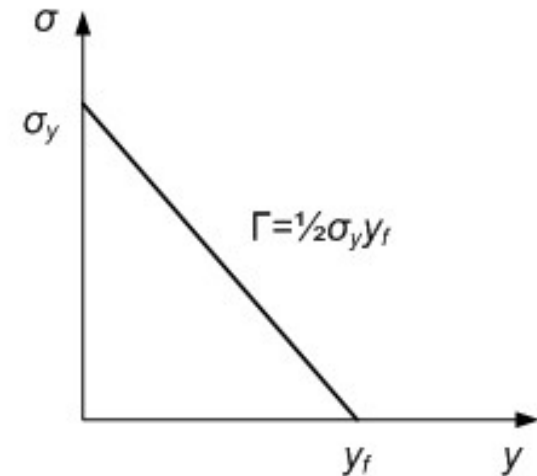
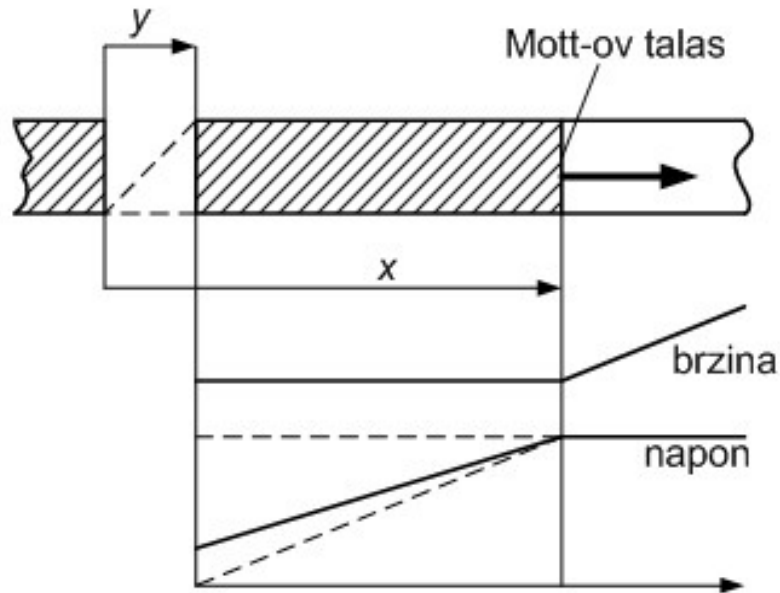
- Smatra se da ova raspodela ima fundamentalnu zasnovanost u fraktalnoj prirodi višestrukog loma i univerzalnu primenu
- Dobro opisuje raspodelu mase pri fragmentaciji krutih materijala

$$N(m) \propto m^{-\alpha}$$

- Ne daje dobar opis raspodele mase fragmenata PPD

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Energetski pristup



- Informacija o pojavi **prslina** kreće se određenom brzinom (u vidu tzv. **Mott-ovog talasa**) i definiše **zonu rasterećenja** (na slici šrafiranu) u kojoj ne može da dođe do formiranja novih prslina
- Pretpostavlja se da postoje određeni **energetski gubici** usled loma, odnosno da pad napona u zoni prsline nije trenutna
- Na slici je prikazana **kinematika Mott-ovog talasa** (čiji je položaj definisan koordinatom  $x$ ), kao i otvaranja prsline (koordinata  $y$ )
- Takođe je pretpostavljen i **linearan pad napona** (tj. otpora lomu) u zoni prsline sa povećanjem otvora prsline  $y$

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Energetski pristup

- Specifična energija loma je definisana sa

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sigma_y y_f$$

- Jednačina kretanja rasterećene zone

$$\rho_i \frac{d^2 u}{dt^2} = \sigma(x) - \sigma(y)$$

- naponi  $\sigma(x)$  i  $\sigma(y)$  određeni su sa

$$\sigma(x) = \sigma_y, \quad \sigma(y) = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{2\Gamma} y$$

- dobija se jednačina kretanja rasterećene zone u obliku

$$\rho_i \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\sigma_y^2}{2\Gamma} y$$

- Brzina otvaranja prsline određena je relacijom

$$\frac{dy}{dt} = v$$

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Energetski pristup

- Rešavanjem navedenog sistema diferencijalnih jednačina dobijaju se vremenske zavisnosti **pomeranja Mott-ovog talasa** i **otvaranja prsline**:

$$x(t) = \frac{\sigma_y^2}{12\rho\Gamma} t^2 \qquad y(t) = \frac{\dot{\epsilon}}{36\rho\Gamma} t^3$$

- Jednačine važe dok ne dođe **do završetka loma** ( $y < y_f$ ); vreme  $t_f$  potrebno za okončanje loma – realizacija uslova  $y(t_f) = y_f$ , kao i rastojanje koje je za ovo vreme prešao Mott-ov talas:

$$t_f = \left( \frac{72\rho\Gamma^2}{\dot{\epsilon}} \right)^{1/3} \qquad x_f = \left( \frac{3\Gamma}{\rho\dot{\epsilon}} \right)^{1/3}$$

- Ako je istovremeno došlo do iniciranja dve prsline na rastojanju manjem od  $2x_f$ , dolazi do interferencije Mott-ovih talasa pre nego što je završen rast prsline - stoga je jasno da ne može doći do loma na oba mesta, odnosno da **dužina fragmenta ne može biti manja od**

$$x_{\min} = 2x_f = \left( \frac{24\Gamma}{\rho\dot{\epsilon}} \right)^{1/3}$$

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Energetski pristup

- fragmentaciju karakteriše veoma važna osobina – **postojanje minimalne dužine, odnosno mase fragmenta**
- međudelovanje dva faktora** ima ključnu ulogu pri fragmentaciji:
  - sa jedne strane, to je **proces stvaranja novih prslina** koji je definisan putem funkcije verovatnoće loma  $\lambda(\varepsilon)$ , odnosno “sejanja” slabih tačaka – budućih prslina, odnosno lomova materijala – koja zavisi od rel. deformacije  $\varepsilon$ ,
  - sa druge strane, energetski pristup pokazuje da postoje ograničenja za ovu funkciju, tj. da zbog nezanemarljivih gubitaka energije usled loma materijala, **broj prslina ne može biti neograničeno veliki**, odnosno veličina fragmenta ne može biti po volji mala.
- za dovoljno velike vrednosti relativne deformacije, energetska ograničenja postaju dominantna - ocena minimalne dužine fragmenta može se smatrati **nominalnom srednjom dužinom fragmenata**.
- $\Gamma$  - karakteristika materijala koja definiše disipaciju energije tokom procesa rasta prsline; analogno žilavosti loma  $K_I$  (koja se koristi u kvazistatičkoj teoriji mehanike loma) Kipp i Grady su uveli novu veličinu – **žilavost fragmentacije**

$$K_f = \sqrt{2E\Gamma}$$

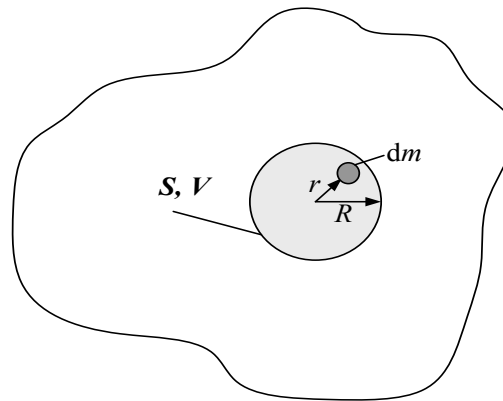
- Nominalna dužina fragmenata**, kao i broj fragmenata po jedinici dužine

$$x_0 = \left( \frac{\sqrt{12}K_f}{\rho c \dot{\varepsilon}} \right)^{2/3} \quad N = \left( \frac{\rho c \dot{\varepsilon}}{\sqrt{12}K_f} \right)^{3/2}$$

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Grady-jev energetski model

- Osnovna ideja ovog pristupa:
  - odredi se ukupna energija parčadi posle fragmentacije,
  - zatim se na osnovu principa minimalne energije utvrdi nominalna veličina fragmenata
- Ukupna energija fragmenta sastoji se od dve komponente:
  - prva je površinska energija koja nastaje kreiranjem novih površina u toku fragmentacije,
  - druga komponenta je tzv. lokalna kinetička energija;
- Takođe je usvojena pretpostavka da su svi fragmenti sfernog oblika i jednake veličine.



Energetski model fragmentacije – parametri sfernog fragmenta

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Grady-jev energetska model

- Na osnovu zakona o održanju mase za fragment  $d(\rho V)=0$ , dobija se 
$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n \dot{V}_i$$

- Takođe važi

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad v = \frac{dr}{dt} \quad v = -\frac{\dot{r}}{3\rho}$$

- Kinetička energija fragmenta koja je posledica kretanja materijala u odnosu na centar mase određena je integralom

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm = \frac{2\pi}{45} \frac{\dot{r}^2}{\rho} \rho$$

- Specifična kinetička energija po jedinici zapremine fragmenta je

$$E'_k = \frac{E_k}{V} = \frac{1}{30} \frac{\dot{r}^2}{\rho}$$



# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Grady-jev energetska model

- ako se uvede parametar  $A$  koji predstavlja **odnos površine prema zapremini fragmenta**

$$A = \frac{S}{V} = \frac{3}{R}$$

- **specifična kinetička energija fragmenta** može se napisati u obliku

$$E'_k = \frac{3}{10} \frac{\dot{r}}{\rho} A^2$$

- **Površinska energija fragmenta** određuje se na osnovu jednačine

$$\Gamma_S = \gamma S$$

- gde je  $\gamma$  **specifična površinska energija**, pa je površinska energija po jedinici zapremine fragmenta određena sa

$$\Gamma'_S = \gamma A$$

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Grady-jev energetska model

- Konačno, **totalna specifična energija fragmenta** ima oblik

$$U = E'_k + \Gamma'_s = \frac{3}{10} \frac{\dot{\gamma}}{\rho} A^2 \gamma \quad , \quad A$$

- Ako se primeni **princip minimalne energije**, tada se iz uslova  $\frac{dU}{dA} = 0$  određuje vrednost parametra  $A$  koja odgovara **očekivanim (srednjim) dimenzijama fragmenta**:

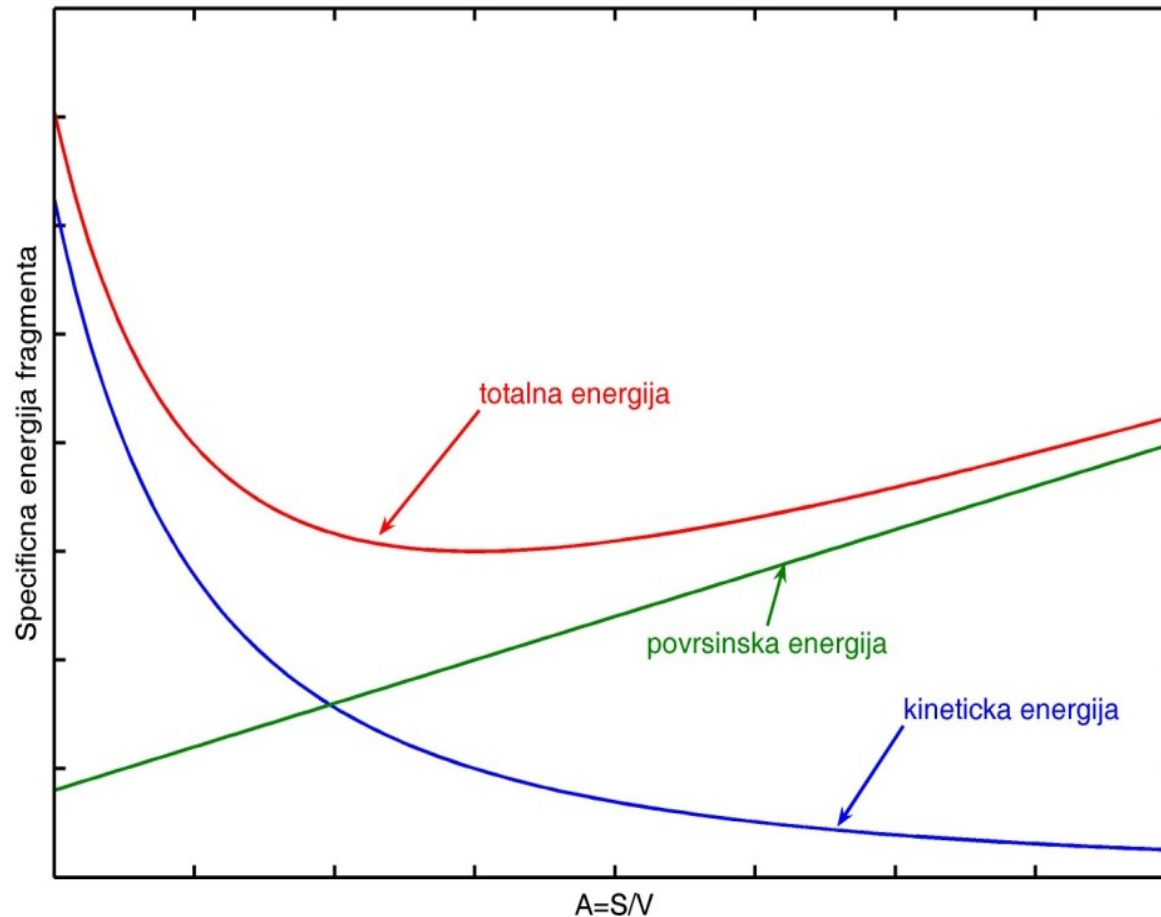
$$A = \left( \frac{3}{5} \frac{\dot{\gamma}}{\rho \gamma} \right)^{\frac{1}{3}}$$

- Konačno, **srednji prečnik fragmenta** ima vrednost

$$d = \frac{6}{A} = 2 \left( \frac{45 \rho \gamma}{\dot{\gamma}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Grady-jev energetska model



Kinetička, površinska i ukupna energija fragmenta prema energetska modelu

# Određivanje karakteristične dimenzije fragmenta

## Grady-jev energetski model

- U slučaju dominantnog **krtog loma materijala**, važi relacija koja povezuje površinsku energiju  $\gamma$  i kritičnu vrednost žilavosti loma  $K_{IC}$ :

$$\gamma = \frac{K_{IC}^2}{2K}$$

- U poslednjoj jednačini  $K$  je **zapreminski modul elastičnosti** materijala

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

- Ako se ima u vidu izraz za **brzinu prostiranja elastičnih poremećaja**

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

- srednji prečnik fragmenta:**

$$d = \left( \frac{\sqrt{20} K_{IC}}{\rho c} \right)^{\frac{2}{3}}$$

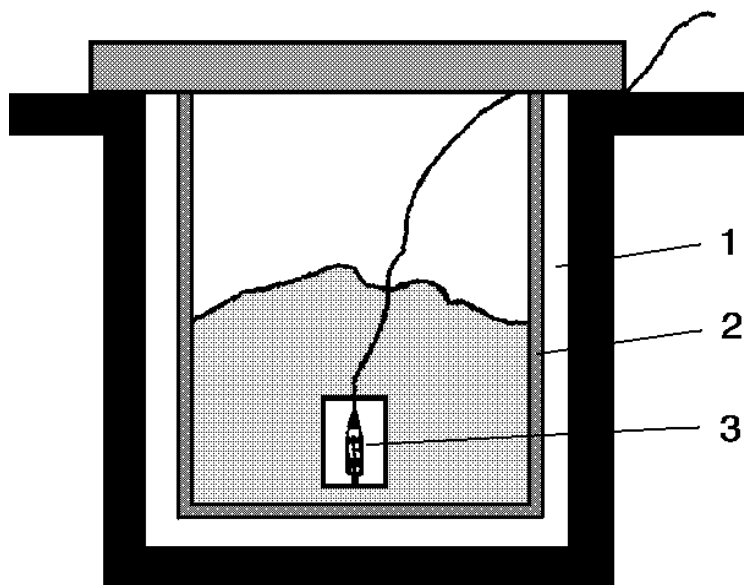
# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

- dugotrajni, složeni i skupi **eksperimenti**
- razvoj **novog** projektila
  - izbor vrste eksploziva,
  - određivanje optimalne inicijacije,
  - izbor vrste i mehaničkih karakteristika materijala košuljice.
- eksperimentalno određivanje **broja i oblika parčadi**
- utvrđivanje zavisnosti **verovatnoće pogađanja parčadima** u funkciji od rastojanja cilja do mesta eksplozije.
- **Efikasnost projektila**  $E$  parčadnog dejstva predstavlja broj ljudi pogođenih najmanje jednim ubitačnim parčetom pri eksploziji projektila postavljenog vertikalno na visini od 1 m iznad horizontalnog tla na kome su ljudi u stojećem stavu raspoređeni tako da na svakih 100 m<sup>2</sup> površine tla dolazi po jedan čovek licem okrenut prema projektilu.
- **Specifična efikasnost projektila** je količnik efikasnosti i mase projektila.
- Ako se sa  $p_x$  označi **verovatnoća pogađanja cilja na rastojanju  $x$** , efikasnost je data izrazom:

$$E = \int_0^{\infty} \frac{2\pi p_x x dx}{100}$$

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Određivanje broja parčadi



Rasprskavanje projektila u jami

- Određivanje **broja i oblika parčadi** vrši se rasprskavanjem projektila u jami koja je ispunjena peskom.
- Nakon električnim putem izazvane eksplozije projektila, **izdvajaju se iz peska parčad** metala (prosejavanjem, elektromagnetom i sl.), klasiraju po masi i prebrojavaju.
- Ovakav opit, ukoliko je pravilno izveden, daje potpuno **realnu sliku** u pogledu izgleda i broja parčadi.
- Rezultati **neće biti realni** u sledećim slučajevima:
  - ako se rasprskavanje vrši bez zaštitne obloge oko projektila
  - ako se rasprskavanje vrši u nedovoljnoj količini peska

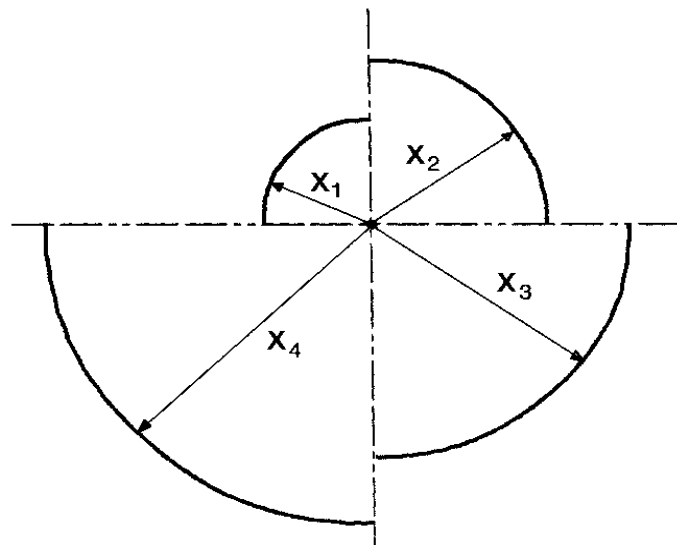
## Određivanje broja parčadi

[illegible]

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Utvrđivanje verovatnoće pogađanja cilja $p_x$

- Da bi se utvrdila verovatnoća pogađanja (i onesposobljavanja) cilja  $p_x$  na rastojanju  $x$  od centra eksplozije, elementi od zdrave i suve topolove daske, širine 0.5 m, visine 2 m i debljine 41 mm, postavljaju se vertikalno, jedan do drugog, po obimu kruga oko tačke rasprskavanja na rastojanju 10 m, 20 m, 30 m i 40 m (ili na 10 m, 15 m, 20 m i 30 m, zavisno od kalibra projektila).
  - proboj ove debljine daske znači da parče poseduje **minimalnu kinetičku energiju od 150 J/cm<sup>2</sup>**
- Zbog uštede, elementi se postavljaju po četvrtini obima za svako od izabrana četiri rastojanja



Raspored elemenata pri rasprskavanju radi određivanja  $p_x$



# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Utvrdjivanje verovatnoće pogađanja cilja $p_x$

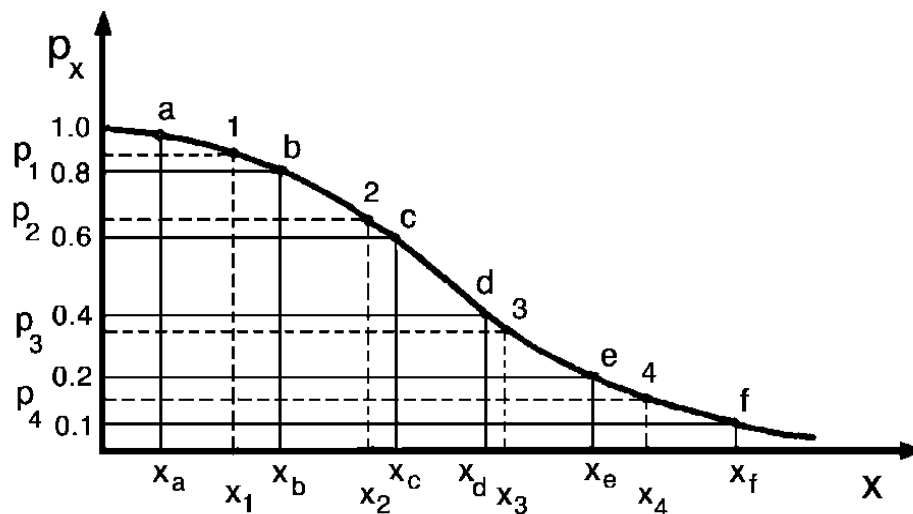
- Ispitivani projektil se postavlja vertikalno u centru, na visini od 1 m, a zatim se električnim putem inicira rasprskavanje
- zatim se vrši prebrojavanje probijenih elemenata u svakom sektoru posebno.
  - Uobičajeno je, radi veće pouzdanosti rezultata, da se izvrši rasprskavanje 4 projektila jedan za drugim.
- Ako su  $(n_p)_1$ ,  $(n_p)_2$ ,  $(n_p)_3$  i  $(n_p)_4$  brojevi probijenih elemenata u sektorima na rastojanjima  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  i  $x_4$ , odgovarajuće verovatnoće pogađanja biće:

$$p_1 = \frac{(n_p)_1}{4(n_e)_1}, \quad p_2 = \frac{(n_p)_2}{4(n_e)_2}, \quad p_3 = \frac{(n_p)_3}{4(n_e)_3}, \quad p_4 = \frac{(n_p)_4}{4(n_e)_4}$$

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Utvrđivanje verovatnoće pogađanja cilja $p_x$

- na osnovu ovako dobijenih vrednosti verovatnoće pogađanja konstruiše se funkcija  $p_x=f(x)$  (dijagram)
- Na ovoj krivoj mogu se odrediti tačke  $a, b, c, d, e$  i  $f$  koje odgovaraju vrednostima  $p_x=1; 0.8; 0.6; 0.4; 0.2$  i  $0.1$ .



Verovatnoća pogađanja  
u funkciji rastojanja

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Utvrdjivanje verovatnoće pogađanja cilja $p_x$

- Ako se zanemari broj pogođenih ciljeva čija je verovatnoća pogađanja manja od 0.1, dolazi se do sledećeg **izraza za efikasnost**:

$$E = \frac{\pi}{100} \left[ x_a^2 + 0.9(x_b^2 - x_a^2) + 0.7(x_c^2 - x_b^2) + 0.5(x_d^2 - x_c^2) + 0.3(x_e^2 - x_d^2) + 0.15(x_f^2 - x_e^2) \right]$$

- Specifična efikasnost** je data odnosom  $E' = E/m_p$  ( $m_p$  - masa projektila) i predstavlja pouzdan parametar za međusobno upoređenje razornih projektila sa stanovišta efikasnosti parčadnim dejstvom.
- Eksperimentalni podaci dobijeni na ovaj način mogu se koristiti za ocenu parčadnog dejstva projektila putem tzv. **efikasne daljine parčadi**  $x_{ef}$ .
- Efikasna daljina parčadi je rastojanje od tačke rasprskavanja projektila na kome na 1 m<sup>2</sup> cilindrične površine dolazi **jedno ubitačno parče** (jedan proboj).

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Utvrđivanje verovatnoće pogađanja cilja $p_x$

- Ako je ukupan broj proboja na jednom od sektora (prema nekim standardima se u ukupni broj proboja računa i 50 % registrovanih zadora u sektoru), broj proboja na 1 m<sup>2</sup> površine koji se naziva **gustinom ubitačne parčadi**, dat je odnosom:

$$(N_p)_x = \frac{(N'_p)_x}{\pi x}$$

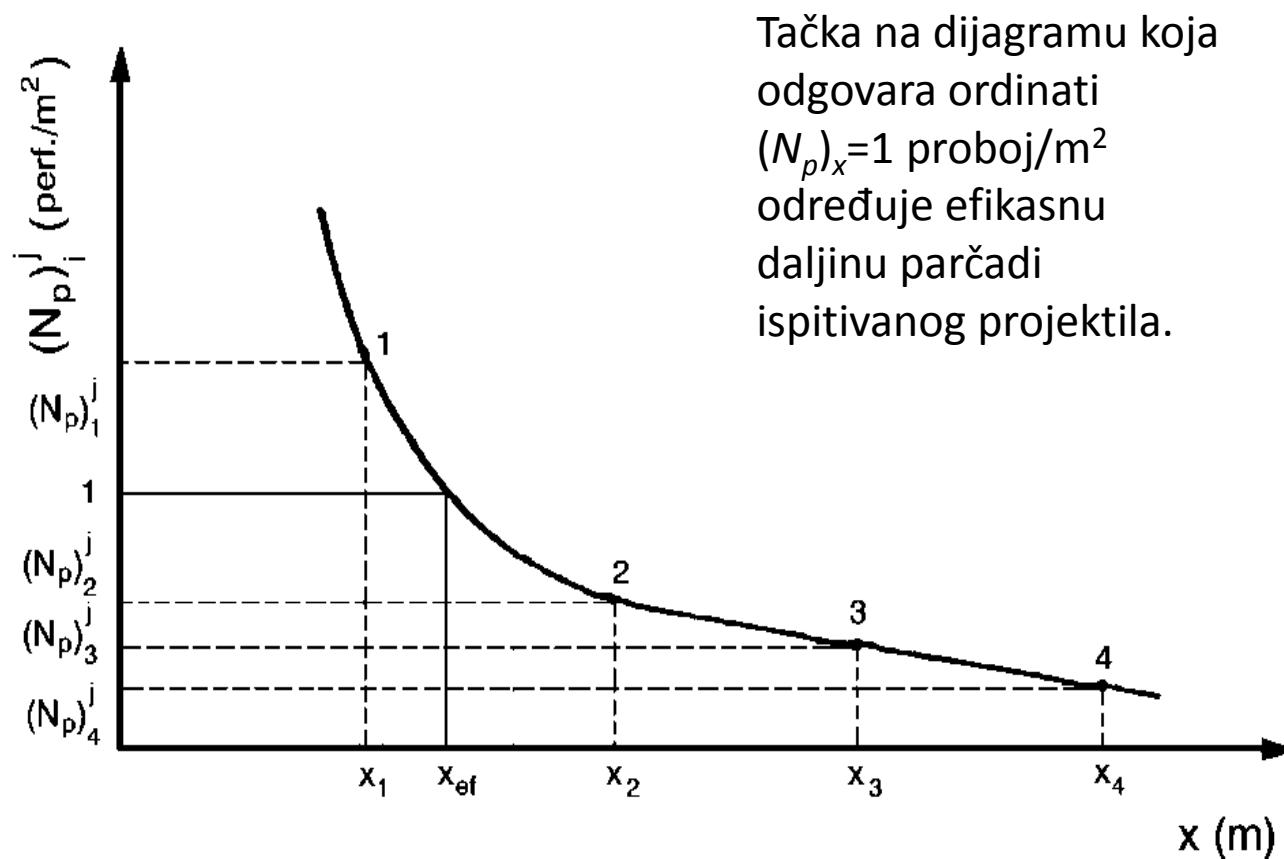
- Eksperimentalni rezultati rasprskavanja daju:

$$(N_p)_1 = \frac{(N'_p)_1}{\pi x_1}, \dots, (N_p)_4 = \frac{(N'_p)_4}{\pi x_4}$$

- Na osnovu ovih vrednosti  $(N_p)_x$  **konstruiše se dijagram**  
 $(N_p)_x = f(x)$

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Utvrđivanje verovatnoće pogađanja cilja $p_x$



Efikasna daljina parčadi

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Utvrđivanje verovatnoće pogađanja cilja $p_x$

- U teoriji gađanja pri izračunavanju **potrebnog broja razornih projektila** parčadnog dejstva za rešavanje različitih vatrenih zadataka koristi se matematičko očekivanje broja pogođenih ciljeva dato izrazom:

$$(n_c)_p = n_c \left(1 - e^{-N_p}\right)$$

- gde je:
  - $n_c$  - ukupan broj ciljeva,
  - $N_p$  - gustina ubitačne parčadi na površini na kojoj se nalazi  $n_c$  ciljeva.
- Navedeni izraz pokazuje da  $(n_c)_p$  može biti jednako  $n_c$  samo pri  $N_p = \infty$ . Zbog toga se uslovno usvaja za **površinu potpunog dejstva** ona površina na čijim krajevima matematičko očekivanje broja pogođenih ciljeva iznosi 90%. Ovom očekivanju odgovara gustina ubitačne parčadi od 2.3.
- Za **površinu stvarnog dejstva** usvaja se ona površina na čijim krajevima matematičko očekivanje broja pogođenih ciljeva iznosi 50%. Ovom očekivanju odgovara gustina ubitačne parčadi od 0.693.

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Stvarna efikasnost

- Pod **stvarnom efikasnošću** podrazumeva se parčadno dejstvo razornog projektila u **realnim borbenim uslovima** primene.
- Najveći uticaj na stvarnu efikasnost projektila parčadnog dejstva, snabdevenih tzv. udarnim upaljačem imaju **dva faktora**:
  - padni ugao i
  - dubina prodiranja projektila u tlo pre eksplozije.
- Pri **malim padnim uglovima** najveći deo ubitačne parčadi ostaje u tlu u blizini mesta eksplozije ili odlazi u vazduh iznad mesta pogotka, ne pogađajući ciljeve na tlu. Sa povećanjem padnog ugla raste broj efikasnih parčadi. Zbog ove zavisnosti stvarne efikasnosti od padnog ugla neophodno je da se gađanja razornim projektilom parčadnog dejstva (snabdevenim udarnim upaljačem) vrše sa elevacijama većim od  $45^\circ$  ili izborom najmanjeg punjenja koje daje najveći padni ugao.
- Sa **povećanjem dubine prodiranja** u tlo naglo opada stvarna efikasnost razornog projektila parčadnog dejstva. Dubina prodiranja projektila u tlo zavisi od karakteristika trenutnosti i osetljivosti upaljača udarnog tipa.

# Eksperimentalno određivanje parčadnog dejstva

## Stvarna efikasnost

- Kada se ima u vidu zavisnost stvarne efikasnosti od padnog ugla i dubine prodiranja, razumljiv je veliki praktični interes za tzv. **gađanja na rikošet**: pri susretu sa preprekom pod malim padnim uglom projektil se odbija od površine prepreke i dejstvuje u vazduhu na visini od nekoliko metara iznad cilja.
- Posle rikošeta projektil dejstvuje u vazduhu na visini od 2...3 m (zavisno od vremena usporenja upaljača). Parčadno dejstvo projektila u ovom slučaju je za 15...20% **veće od dejstva** koje bi se dobilo pri udaru projektila u tlo.
- Treba napomenuti da se primenom tempirnih i blizinskih upaljača može postići maksimalno moguća stvarna efikasnost parčadnog dejstva sa razornim projektilima, posebno kad je u pitanju živa sila iza zaklona ili borba protiv artiljerije. Pri rasprskavanju projektila u vazduhu na **optimalnoj visini** iznad površine cilja utrošak municije se smanjuje za 1.5 do 2 puta za isti stepen neutralisanja u odnosu na dejstvo projektila koji se rasprskavaju udarom u zemlju.