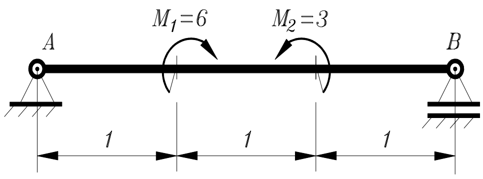
Zadaci

<u>Zadatak 8.1.</u> Za gredu, opterećenu kao što je na slici prikazano, nacrtati osnovne statičke dijagrame.



uz zadatak 8.1.

Rešenje: *Greda AB, oslobođena veza, prikazana je na slici 8.1.a.. Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila i spregova sila, koji deluju na gredu, su*

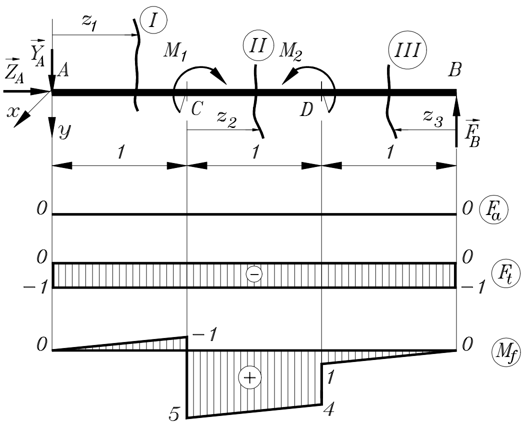
$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A = 0\,,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A - F_B = 0\,,$$
$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -M_1 + M_2 + 3F_B = 0\,,$$

odakle se dobija da je

$$Z_A = 0\,, \quad Y_A = 1\,, \quad F_B = 1\,.$$

Pre početka crtanja osnovnih statičkih dijagrama, poželjno je proveriti tačnost određenih reakcija veza. To se može uraditi pisanjem novog uslova ravnoteže koji nije korišćen za određivanje reakcija veza, npr. momentna jednačina za neku novu momentnu tačku na gredi. Pri tome treba birati tačku kroz koju prolazi što manji broj napadnih linija već određenih reakcija veza. Neka je to u ovom slučaju tačka D, tj.

$$\sum M_{Dx} = 2Y_A - M_1 + M_2 + F_B = 0\,.$$



8.1.a.

Za crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina mogu se koristiti karakteristični preseci grede. Preseci pojedinih polja na gredi AB obeleženi su sa I, II i III, a apscise preseka obeležene su koordinatama z_1, z_2 i z_3, respektivno. Osnovne statičke veličine u preseku I, posmatrano sa leve strane su

$$F_a^I = -Z_A = 0\,, \qquad (0 < z_1 \le 1)$$

$F_t^l = -Y_A = -1$, $(0 < z_1 < 1)$
$M_f^l = -Y_A z_1 = -z_1$. $(0 \le z_1 < 1)$

Na osnovu prvog izraza sledi da se dijagram aksijalnih sila, na posmatranom preseku, poklapa na nultom osom (0-0). Dijagram transverzalnih sila je prava linija paralelna sa osom 0-0, koja je pomerena za -1 u odnosu na nju, dok je dijagram momenta savijanja prava linija koja prolazi kroz tačke $M^l_{f|z_1=0} = 0$ *i* $M^l_{f|z_1=1-\varepsilon} = -1$*, pri čemu je* $\varepsilon > 0$ *i* $\varepsilon \approx 0$*. Uvedene pretpostavke o veličini* ε *će biti korišćene u svim daljim razmatranjima bez posebnog naglašavanja.*

U preseku II, posmatrano sa leve strane, osnovne statičke veličine su

$F_a^l = -Z_A = 0$, $(0 \le z_2 \le 1)$
$F_t^l = -Y_A = -1$, $(0 \le z_2 \le 1)$
$M_f^l = -Y_A(z_2 + 1) + M_1 = -z_2 + 5$. $(0 < z_2 < 1)$

pa je $M^l_{f|z_2=0+\varepsilon} = 5$ *i* $M^l_{f|z_2=1-\varepsilon} = 4$*. Kako se moment savijanja* $M^l_{f|z_1=1-\varepsilon}$ *u tački neposredno bliskoj tački C sa njene leve strane i moment savijanja* $M^l_{f|z_2=0+\varepsilon}$ *u tački neposredno bliskoj tački C sa njene desne strane razlikuju, tada u tački C postoji skok na dijagramu momenta savijanja. Apsolutna vrednost razlike ova dva momenta u ovom slučaju iznosi 6 što predstavlja intenzitet spoljašnjeg momenta koji deluje u tački C (moment* M_1*).*

Osnovne statičke veličine u poprečnom preseku III lakše se mogu odrediti sa desne strane, pa je

$F_a^d = 0$, $(0 \le z_3 \le 1)$
$F_t^d = -F_B = -1$, $(0 < z_3 \le 1)$
$M_f^d = F_B z_3 = z_3$. $(0 \le z_3 < 1)$

Iz poslednje jednačine se dobija da je $M^d_{f|z_3=0} = 0$ *i* $M^d_{f|z_3=1-\varepsilon} = 1$*. Dijagrami osnovnih statičkih veličina, za gredu AB,na osnovu napisanih izraza, dati su na slici 8.1.a.. Na osnovu usvojene konvencije pozitivne vrednosti aksijalnih i transverzalnih sila crtaju se "iznad", a momenta savijanja "ispod" usvojene nulte linije.*

Zadatak 8.2. Za gredu *ABC*, opterećenu kao na slici, nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je $F_1 = 2$, $F_2 = \sqrt{2}$, $q = 1^*$ i $M = 1$.

Rešenje: *Nepoznate reakcije spoljašnjih veza, u ovom slučaju, su* Z_A, Y_A, M_A, F_B *i* F_C *(slika 8.2.a.). Uslovi ravnoteže složenog nosača ABC dopunjuju se uslovima da su momenti savijanja u Gerberovim zglobovima* G_1 *i* G_2 *jednaki nuli. Znači, može se pisati*

* Ako nije posebno u zadatku naglašeno, jedinica kontinualnog opterećenja je *kN/m*;

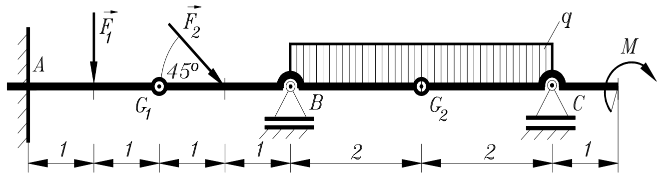
$$\sum Z_i = 0; \qquad -Z_A + F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\,,$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A + F_1 + F_2\frac{\sqrt{2}}{2} + 4q - F_B - F_C = 0\,,$$

$$\sum M^l_{G_{1x}} = 0; \qquad M_A - 2Y_A + F_1 = 0\,,$$

$$\sum M^d_{G_{1x}} = 0; \qquad -M - 16q + 6F_C + 2F_B - F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\,,$$

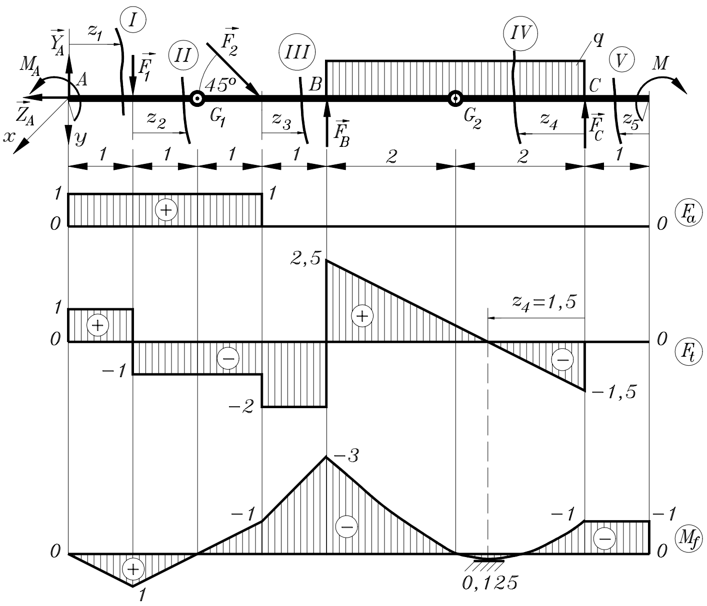
$$\sum M^d_{G_{2x}} = 0; \qquad 2F_C - M - 2q = 0\,.$$



uz zadatak 8.2.

Iz prethodnog sistema jednačina dobija se da je

$$Z_A = 1\,, \qquad M_A = 0\,, \qquad F_B = 4{,}5\,, \qquad F_C = 1{,}5\,.$$



8.2.a.

U preseku I, osnovne statičke veličine, određene sa leve strane, su

$F_a^l = Z_A = 1$, $(0 < z_1 \leq 1)$
$F_t^l = Y_A = 1$, $(0 < z_1 < 1)$
$M_f^l = -M_A + Y_A z_1 = z_1$. $(0 \leq z_1 \leq 1)$

Za presek II, važi

$F_a^l = Z_A = 1$, $(0 \leq z_2 < 2)$
$F_t^l = Y_A - F_1 = -1$, $(0 < z_2 < 2)$
$M_f^l = -M_A + Y_A(z_2 + 1) - F_1 z_2 = -z_2 + 1$. $(0 \leq z_2 \leq 2)$

dok je za presek III

$$F_a^l = Z_A - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (0 < z_3 \leq 1)$$

$$F_t^l = Y_A - F_1 - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -2, \quad (0 < z_3 < 1)$$

$$M_f^l = -M_A + Y_A(z_3 + 3) - F_1(z_3 + 2) - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} z_3 = -2z_3 - 1. \quad (0 \leq z_3 \leq 1)$$

Osnovne statičke veličine u preseku V lakše je odrediti sa desne strane gde ima manje opterećenja, pa se može pisati

$F_a^d = 0$, $(0 \leq z_5 \leq 1)$
$F_t^d = 0$, $(0 \leq z_5 < 1)$
$M_f^d = -M = -1$, $(0 < z_5 \leq 1)$

dok za presek IV važi

$F_a^d = 0$, $(0 \leq z_4 \leq 4)$
$F_t^d = -F_C + q z_4 = z_4 - 1{,}5$, $(0 < z_4 < 4)$

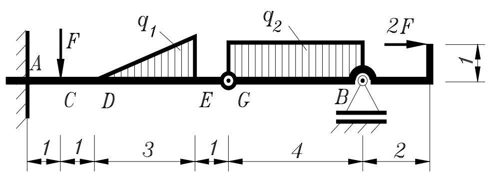
$$M_f^d = -M - F_C z_4 - q z_4 \frac{z_4}{2} = -\frac{z_4^2}{2} + 1{,}5 z_4 - 1. \quad (0 \leq z_4 \leq 4)$$

Transverzalna sila u ovom polju seče nultu osu na rastojanju $z_4 = 1{,}5$ *, pa imajući u vidu diferencijalnu vezu između transverzalne sile i momenta savijanja (8.95), zaključuje se da za* $z_4 = 1{,}5$ *moment savijanja ima ekstremnu vrednost, tj.*

$$M_{f|z_4=1,5}^d = 0{,}125.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina grede ABC, na osnovu prethodnih izraza, prikazani su na slici 8.2.a..

Zadatak 8.3. Za nosač, opterećen prema slici, ako je $F=1$, $q_1=2$ i $q_2=1$, nacrtati osnovne statičke dijagrame.



uz zadatak 8.3.

Rešenje: *Reakcije veza (slika 8.3.a.) mogu se odrediti iz uslova ravnoteže*

$$\sum Z_i = 0; \qquad -Z_A + 2F = 0\,,$$

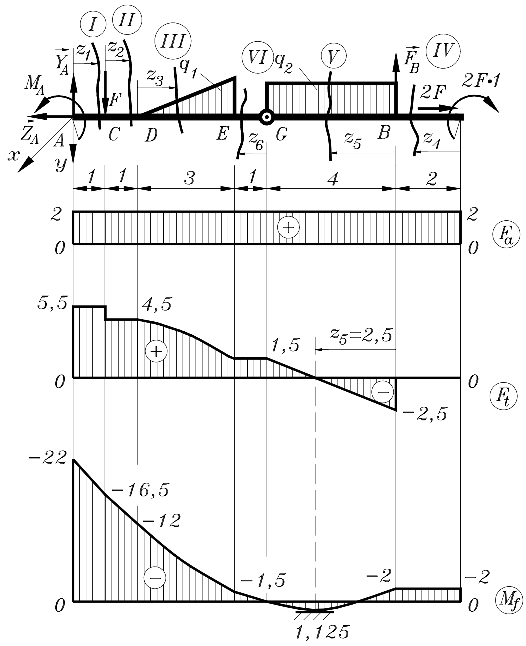
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A + F + \frac{1}{2}3q_1 + 4q_2 - F_B = 0\,,$$

$$\sum M_{Gx}^{l} = 0; \qquad M_A - 6Y_A + 5F + \frac{1}{2}q_1 3\cdot 2 = 0\,,$$

$$\sum M_{Gx}^{d} = 0; \qquad -q_2 4\cdot 2 + 4F_B - 2F = 0\,,$$

odakle se dobija da je

$$Z_A = 2\,, \quad Y_A = 5{,}5\,, \quad M_A = 22 \quad i \quad F_B = 2{,}5\,.$$



8.3.a.

Osnovne statičke veličine u pojedinim poprečnim presecima nosača su:

- presek I

$F_a^l = Z_A = 2$, $(0 < z_1 \le 1)$

$F_t^l = Y_A = 5{,}5$, $(0 < z_1 < 1)$

$M_f^l = -M_A + Y_A z_1 = 5{,}5 z_1 - 22$, $(0 < z_1 \le 1)$

- presek II

$F_a^l = Z_A = 2$, $(0 \le z_2 \le 1)$

$F_t^l = Y_A - F = 4{,}5$, $(0 < z_2 \le 1)$

$M_f^l = -M_A + Y_A(z_2 + 1) - F z_2 = 4{,}5 z_2 - 16{,}5$, $(0 \le z_2 \le 1)$

- presek III (iz relacije (8.115) dobija se da je $q_z = \frac{q_1}{3} z_3$)

$F_a^l = Z_A = 2$, $(0 \le z_3 \le 3)$

$F_t^l = Y_A - F - \frac{1}{2} q_z z_3 = -\frac{1}{3} z_3^2 + 4{,}5$, $(0 \le z_3 \le 3)$

$$M_f^l = -M_A + Y_A(z_3 + 2) - F(z_3 + 1) - \frac{1}{2} q_z z_3 \frac{z_3}{3} =$$

$$= -\frac{1}{9} z_3^2 + 4{,}5 z_3 - 12 \cdot \qquad (0 \le z_3 \le 3)$$

Imajući u vidu da je $F_{t|z_3=0}^l = F_{t|z_2=1}^l = 4{,}5$ i $M_{f|z_3=0}^l = M_{f|z_2=1}^l = -12$, izrazi za transverzalnu silu i moment savijanja mogu se odrediti i korišćenjem relacija (8.98) i (8.99), tj.

$$F_t^l = -\int_0^{z_3} q_z dz_3 + 4{,}5 = -\frac{z_3^2}{3} + 4{,}5,$$

$$M_f^l = \int_0^{z_3} F_t^l dz_3 - 12 = -\frac{z_3^2}{9} + 4{,}5 z_3 - 12 \cdot$$

Osnovne statičke veličine u preseku IV lakše je odrediti sa desne strane. Tada je za
- presek IV

$F_a^d = 2F = 2$, $(0 < z_4 \le 2)$

$F_t^d = 0$, $(0 \le z_4 < 2)$

$M_f^d = -2F \cdot 1 = -2$, $(0 < z_4 \le 2)$

- presek V

$F_a^d = 2F = 2$, $(0 \le z_5 \le 4)$

$F_t^d = -F_B + q_2 z_5 = z_5 - 2{,}5$, $(0 < z_5 \le 4)$

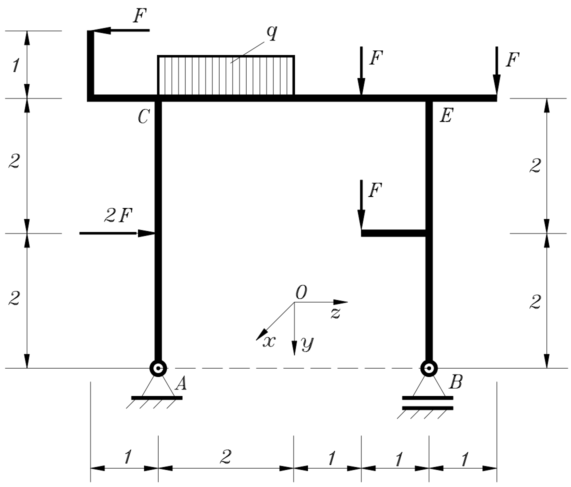
$$M_f^d = -2F \cdot 1 + F_B z_5 - q_2 z_5 \frac{z_5}{2} = -\frac{z_5^2}{2} + 2{,}5 z_5 - 2 \cdot \qquad (0 \le z_5 \le 4)$$

Iz izraza za transverzalnu silu vidi se da je $F_t^d = 0$ *za* $z_5 = 2{,}5$. *U tom preseku moment savijanja ima ekstremnu vrednost i tada je* $M^d_{f|z_5=2,5} = 1{,}125$. *Izrazi za izračunavanje osnovnih statičkih veličina u preseku VI imaju oblik*
- presek VI

$$F_a^d = 2F = 2\,, \qquad (0 \le z_6 \le 1)$$
$$F_t^d = -F_B + 4q_2 = 1{,}5\,, \qquad (0 \le z_6 \le 1)$$
$$M_f^d = -2F \cdot 1 + F_B(z_6 + 4) - 4q_2(z_6 + 2) = -1{,}5 z_6\,. \qquad (0 \le z_6 \le 1)$$

Na osnovu napisanih izraza, dijagrami osnovnih statičkih veličina u poprečnim presecima nosača AB dati su na slici 8.3.a..

Zadatak 8.4. Za okvirni nosač, opterećen kao na slici, ako je $F = 1$ i $q = 1$, nacrtati osnovne statičke dijagrame.



uz zadatak 8.4.

Rešenje: *Okvirni nosač, oslobođen veza, prikazan je na slici 8.4.a.. Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na nosač imaju oblik*

$$\sum Z_i = 0; \qquad -Z_A - F + 2F = 0\,,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A + 2q + F + F + F - F_B = 0\,,$$
$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -2F \cdot 2 + 5F - 2q - 3F - 5F - 3F + 4F_B = 0\,,$$

odakle se dobija da je

$$Z_A = 1\,, \quad Y_A = 2 \quad i \quad F_B = 3\,.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina mogu se crtati ako se napišu njihovi izrazi u devet karakterističnih preseka. Ti izrazi su:
- presek I

$$F_a^I = -Y_A = -2\,, \qquad (0 < z_1 \le 2)$$
$$F_t^I = Z_A = 1\,, \qquad (0 < z_1 < 2)$$
$$M_f^I = Z_A z_1 = z_1\,, \qquad (0 \le z_1 \le 2)$$

- presek II

$$F_a^I = -Y_A = -2\,, \qquad (0 \le z_2 < 2)$$
$$F_t^I = Z_A - 2F = -1\,, \qquad (0 < z_2 < 2)$$
$$M_f^I = Z_A(z_2 + 2) - 2Fz_2 = -z_2 + 2\,, \qquad (0 \le z_2 \le 2)$$

- presek III (izvršena je redukcija sile $\vec{F}$ u tačku D)

$$F_a^I = F = 1\,, \qquad (0 < z_3 < 1)$$
$$F_t^I = 0\,, \qquad (0 \le z_3 < 1)$$
$$M_f^I = -F \cdot 1 = -1\,, \qquad (0 < z_3 \le 1)$$

- presek IV (sada se uzima u obzir i dejstvo vertikalne grede AC)

$$F_a^I = F + Z_A - 2F = 0\,, \qquad (0 < z_4 \le 2)$$

$$F_t^I = Y_A - qz_4 = -z_4 + 2\,, \qquad (0 < z_4 \le 2)$$
$$M_f^I = -F \cdot 1 - 2F \cdot 2 + 4Z_A + Y_A z_4 - qz_4 \frac{z_4}{2} = -\frac{z_4^2}{2} + 2z_4 - 1\,\cdot \qquad (0 \le z_4 \le 2)$$

Sa dijagrama (slika 8.4.a.) vidi se da za $z_4 = 0$, postoji skok aksijalne sile za 1. Taj skok je uslovljen dejstvom vertikalne grede i on je isti kao i intenzitet transverzalne sile na kraju vertikalne grede AC, kada je $z_2 = 2$. To je posledica međusobne upravnosti greda, odnosno ako je za jednu gredu neka sila aksijalna, onda je ta ista sila transverzalna sila za na nju upravnu gredu, pri čemu važi i obrnuto.

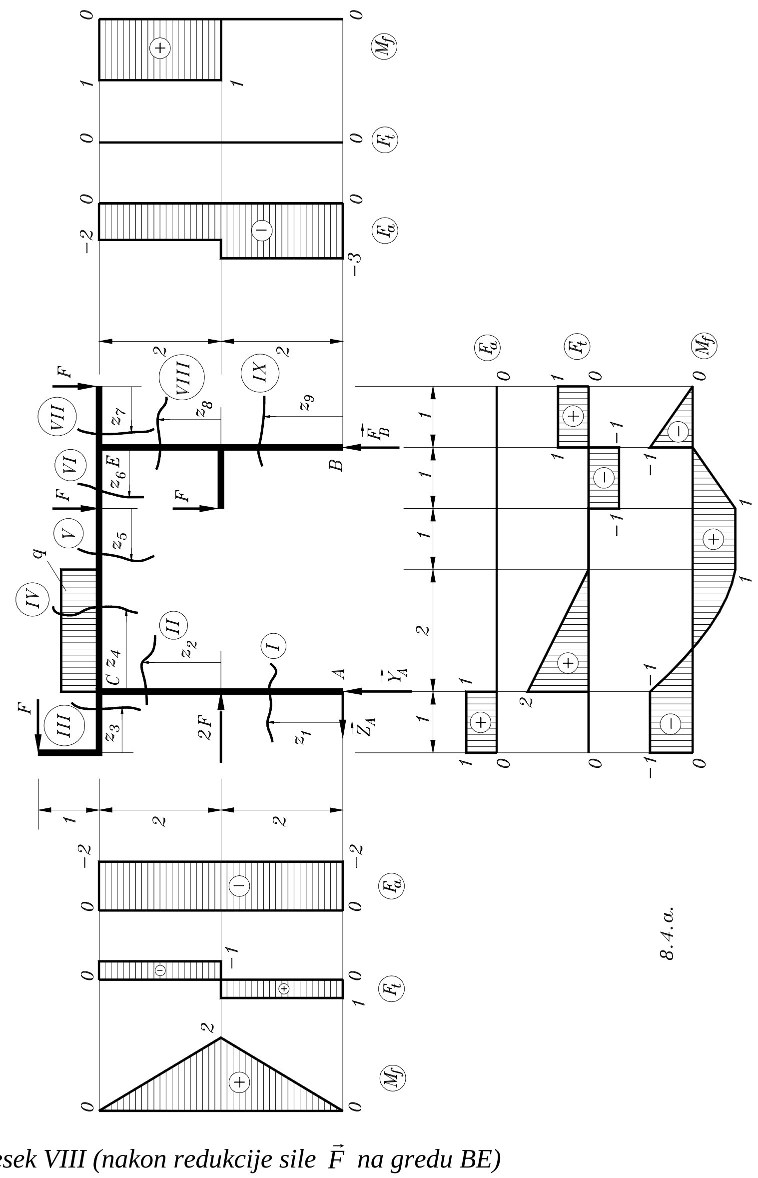
Sa slike 8.4.a. takođe se vidi da skok momenta u tački $z_4 = 0$ ne postoji, jer je intenzitet momenta savijanja vertikalne grede u preseku $z_2 = 2$ jednak nuli. Za skok transverzalne sile važi isto objašnjenje kao i za aksijalnu silu.

Radi jednostavnijeg računanja, osnovne statičke veličine u preostalom delu okvirnog nosača biće određivane posmatranjem delova greda sa desne strane preseka, tako da se može pisati
- za presek IX

$F_a^d = -F_B = -3\,,$ $\qquad (0 < z_9 < 2)$

$F_t^d = 0\,,$ $\qquad (0 \le z_9 \le 2)$

$M_f^d = 0\,,$ $\qquad (0 \le z_9 < 2)$



8.4.a.

- za presek VIII (nakon redukcije sile $\vec{F}$ na gredu BE)

$F_a^d = -F_B + F = -2\,,$ $\qquad (0 < z_8 < 2)$

$F_t^d = 0\,,$ $\qquad (0 \le z_8 \le 2)$

$M_f^d = F \cdot 1 = 1\,,$ $\qquad (0 < z_8 < 2)$

- za presek VII

$$F_a^d = 0\,, \qquad (0 \le z_7 \le 1)$$
$$F_t^d = F = 1\,, \qquad (0 < z_7 < 1)$$
$$M_f^d = -Fz_7 = -z_7\,, \qquad (0 \le z_7 < 1)$$

- za presek VI (uzimajući u obzir uticaj vertikalne grede BE)

$$F_a^d = 0\,, \qquad (0 \le z_6 \le 1)$$
$$F_t^d = F + F - F_B = -1\,, \qquad (0 < z_6 < 1)$$
$$M_f^d = F_B z_6 + F \cdot 1 - F z_6 - F(z_6 + 1) = z_6\,. \qquad (0 < z_6 \le 1)$$

Skokovi u dijagramima transverzalne sile i momenta savijanja horizontalne grede CE posledica su delovanja vertikalne grede BE. Tako je skok u dijagramu transverzalne sile jednak po intenzitetu aksijalnoj sili u preseku VIII za $z_8 = 2$*. Skok u dijagramu momenta savijanja odgovara po intenzitetu momentu savijanja u preseku VIII za* $z_8 = 2$*.*

Osnovne statičke veličine u preostalom preseku nosača V su

- presek V

$$F_a^d = 0\,, \qquad (0 \le z_5 \le 1)$$
$$F_t^d = F + F - F_B + F = 0\,, \qquad (0 < z_5 \le 1)$$
$$M_f^d = F_B(z_5 + 1) + F \cdot 1 - F(z_5 + 1) - F(z_5 + 2) - F z_5 = 1\,. \qquad (0 \le z_5 \le 1)$$

Imajući u vidu da je transverzalna sila u ovom polju jednaka nuli, i diferencijalnu vezu između transverzalne sile i momenta savijanja, moment savijanja u ovom polju je konstantna veličina.

Na osnovu napisanih izraza mogu se nacrtati svi dijagrami osnovnih statičkih veličina za dati nosač i oni su dati na slici 8.4.a.. Pri tome, treba se držati usvojene konvencije da se pozitivne vrednosti aksijalne i transverzalne sile crtaju "iznad", a momenta savijanja "ispod" usvojene nulte linije.

Zadatak 8.5. Za dati *Gerberov* okvirni nosač, opterećen kao na slici, ako je $F = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$ i $M = 1$, nacrtati osnovne statičke dijagrame.

Rešenje: *Pri određivanju reakcija veza, sistemu od tri uslova ravnoteže ravnog sistema sila i spregova sila, dodaje se uslov da je u tački G moment savijanja jednak nuli, tj. dodaje se uslov* $M_{Gx}^l = 0$ *ili* $M_{Gx}^d = 0$*. Na taj način su određene reakcije veza:*

$$Z_A = 1\,, \quad Y_A = 6\,, \quad Z_B = 2 \quad i \quad Y_B = 4\,.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina dati su na slici 8.5.a..

<u>Zadatak 8.6.</u> Dati *Gerberov* nosač opterećen je kao na slici. Nacrtati osnovne statičke dijagrame za dati nosač ako je: $F = 1$, $q = 2$, $M = 6$ i $a = 1$.

Rešenje: *Pri pisanju uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na nosač, treba imati u vidu da se vertikalna i cela horizontalna greda nalaze sa leve strane Gerberovog zgloba dok je sa njegove desne strane samo greda AG. Iz uslova ravnoteže dobijaju se reakcije veza:*

$$Z_A = 3\,,\quad Y_A = 2\,,\quad M_A = 6 \quad i \quad F_B = 0\,.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina dati su na slici 8.6.a..

<u>Zadatak 8.7.</u> Za nosač prikazan na slici nacrtati osnovne statičke dijagrame u funkciji sile *F* i dužine *a*. Poznato je: $M = Fa$ i $F = qa$.

Rešenje: *Postavljanjem četiri uslova ravnoteže, određuju se nepoznate reakcije veza:*

$$Z_A = 2F\,,\quad Y_A = 0\,,\quad M_A = 3Fa \quad i \quad F_B = 0\,.$$

Osnovni statički dijagrami dati su na slici 8.7.a..

<u>Zadatak 8.8.</u> Dati *Gerberov* nosač opterećen je kao što je na slici prikazano. Ako je $F = 1$, $q = 1$, i $M = 1$, nacrtati dijagrame osnovnih statičkih veličina.

Rešenje: *Postavljajući četiri uslova ravnoteže za dati Gerberov nosač, prema slici 8.8.a., mogu se odrediti reakcije veza. Tada se dobija:*

$$Z_A = 2\,,\quad Y_A = 6\,,\quad M_A = 14 \quad i \quad F_B = 1\,.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina za delove nosača AG i CB, crtaju se uobičajenim postupkom. Pogodno je da se na delu nosača gde deluje specifično opterećenje oblika trougla, rastojanje zamišljenog preseka meri od temena trougla gde je specifično opterećenje najmanje. Da bi se mogli nacrtati osnovni statički dijagrami za deo GC nosača, potrebno je izvršiti redukciju svih opterećenja koja deluju na deo AG nosača, u tačku G. Tada su horizontalna sila, vertikalna sila i moment savijanja u tački G određeni sa

$$F_H = Z_A + F\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - F = 2\,,$$
$$F_V = Y_A - F\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 4q = 1\,,$$
$$M_G = 0\,,$$

pa se za pojedine preseke može pisati da je za

- presek I

$$F_a^l = -F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \qquad (0 < z_1 < \sqrt{2})$$

$$F_t^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad (0 < z_1 < \sqrt{2})$$

$$M_f^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 - F_H\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}z_1, \qquad (0 \le z_1 \le \sqrt{2})$$

- *presek II*

$$F_a^l = -F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}, \qquad (0 < z_2 \le \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$F_t^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}, \qquad (0 < z_2 \le \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$M_f^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2}(z_2 + \sqrt{2}) - F_H\frac{\sqrt{2}}{2}(z_2 + \sqrt{2}) - F\frac{\sqrt{2}}{2}z_2 =$$

$$= -\sqrt{2}z_2 - 1, \qquad (0 \le z_2 < \frac{\sqrt{2}}{2})$$

- *presek III*

$$F_a^l = -F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}, \qquad (0 \le z_3 < \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$F_t^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}, \qquad (0 \le z_3 < \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$M_f^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2}(z_3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}) - F_H\frac{\sqrt{2}}{2}(z_3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}) - F\frac{\sqrt{2}}{2}(z_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - M =$$

$$= -\sqrt{2}z_3 - 3, \qquad (0 < z_3 \le \frac{\sqrt{2}}{2})$$

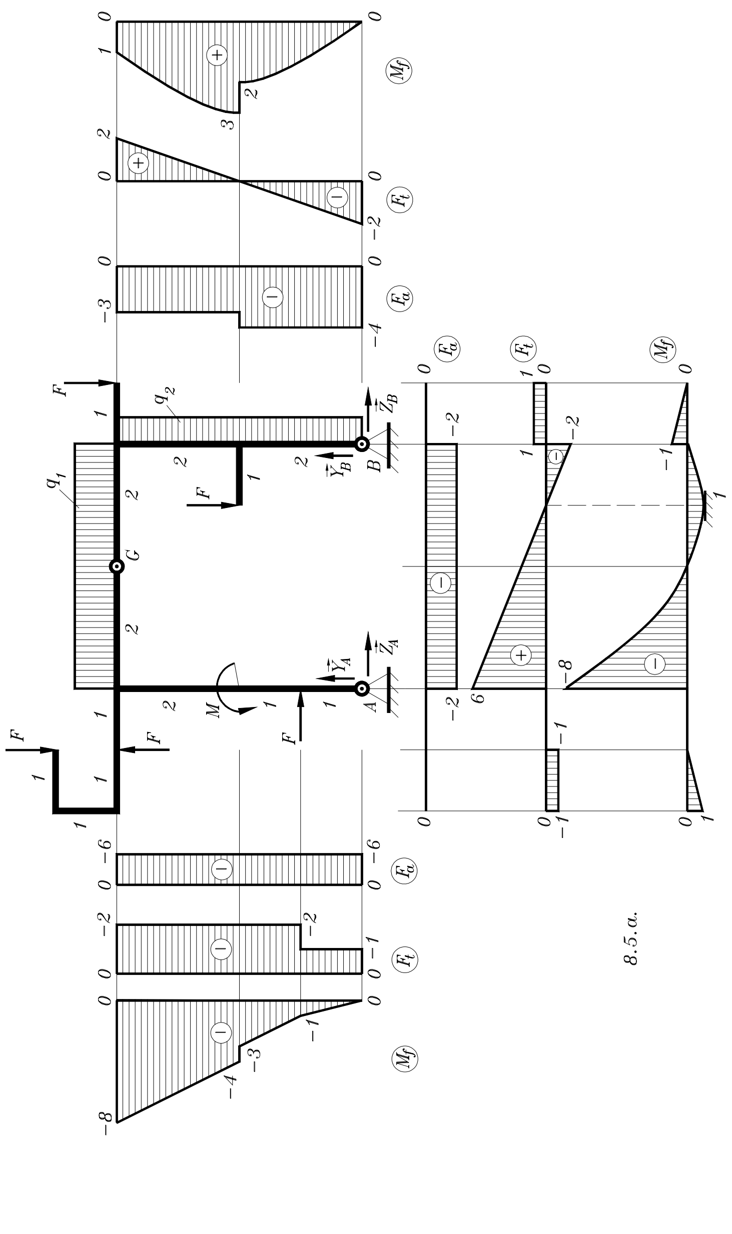
- *presek IV*

$$F_a^l = -F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} + F\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \qquad (0 < z_4 < \sqrt{2})$$

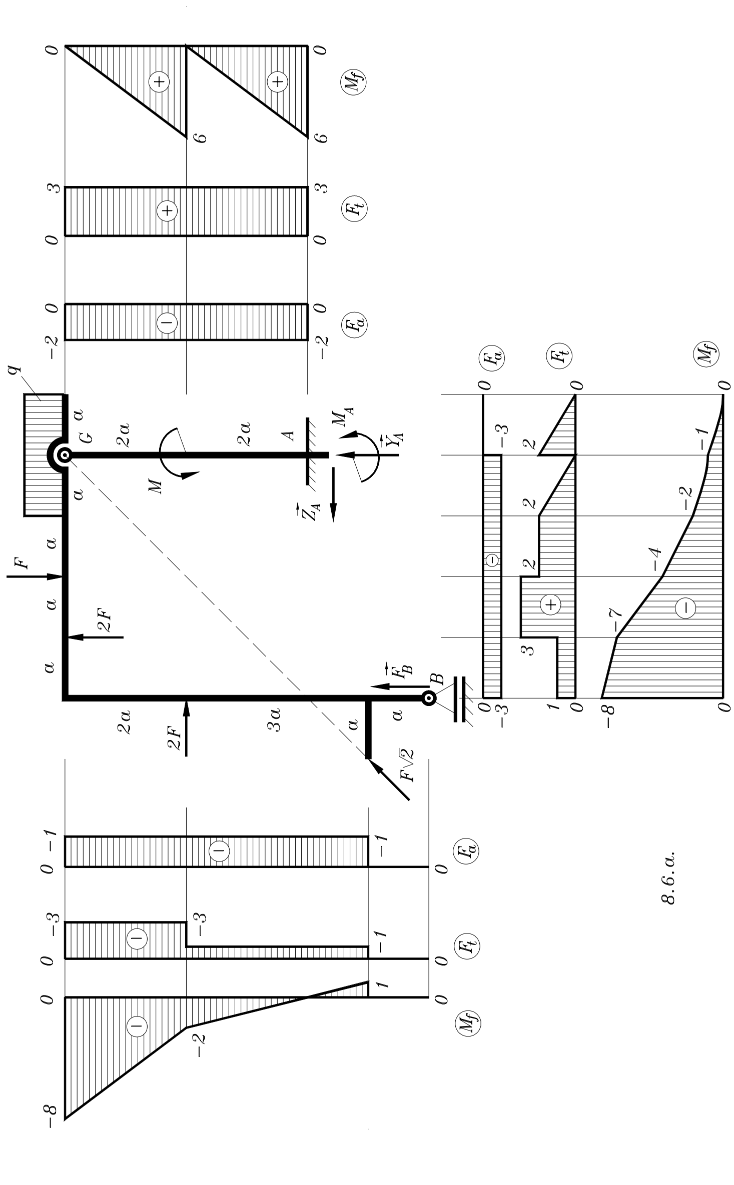
$$F_t^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \qquad (0 < z_4 < \sqrt{2})$$

$$M_f^l = F_V\frac{\sqrt{2}}{2}(z_4 + 2\sqrt{2}) - F_H\frac{\sqrt{2}}{2}(z_4 + 2\sqrt{2}) - F\frac{\sqrt{2}}{2}(z_4 + \sqrt{2}) - M - F\frac{\sqrt{2}}{2}z_4 =$$

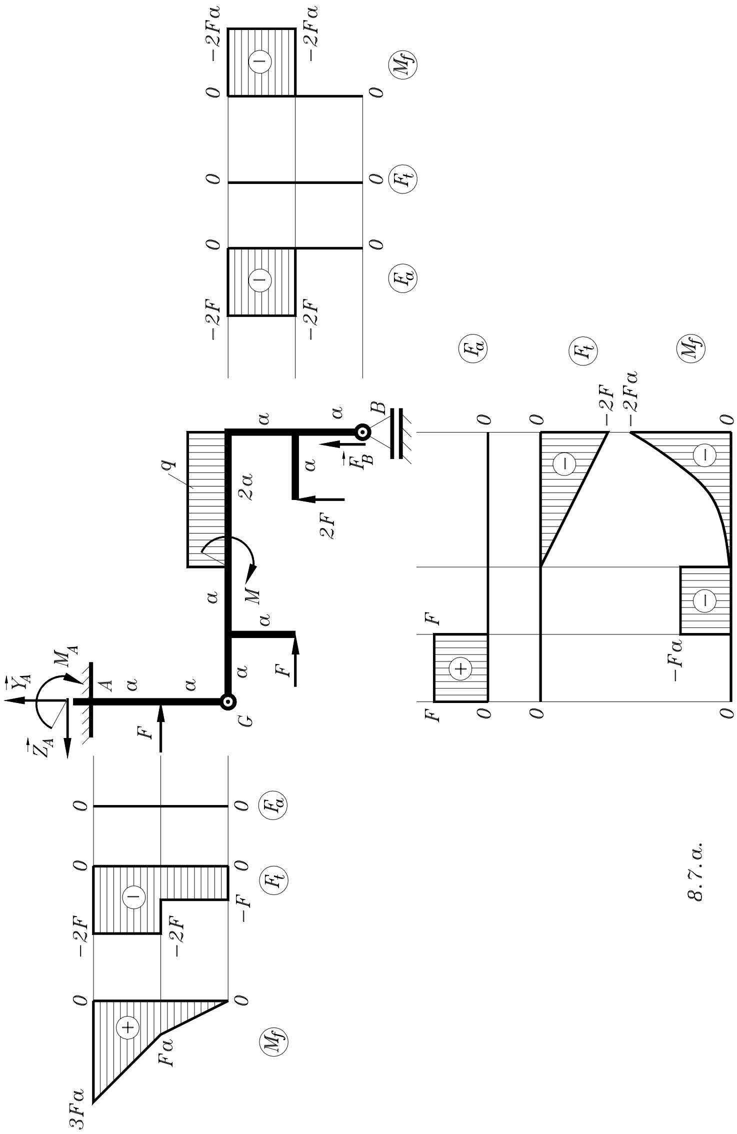
$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2}z_4 - 4. \qquad (0 \le z_4 < \sqrt{2})$$



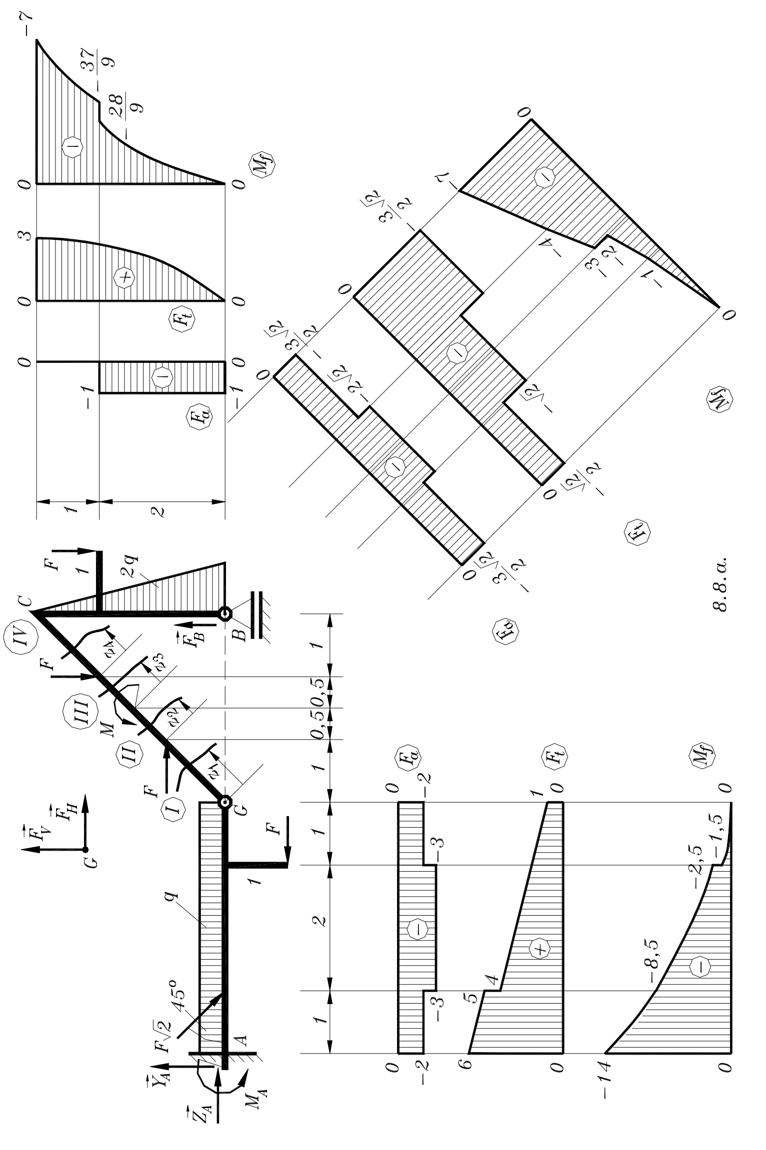
8.5.a.



8.6.a.



8.7. a.



8.8.a.

Zadatak 8.9. Za dati nosač, opterećen kao na slici, nacrtati dijagrame osnovnih statičkih veličina u funkciji sile F i rastojanja a. Dato je: $M = Fa = qa^2$.

Rešenje: *Postavljanjem uslova ravnoteže za sistem sila koji deluje na nosač, oslobođen veza (slika 8.9.a.), dobija se da je*

$$Z_A = 19F\,,\quad Y_A = -23F \quad i \quad F_B = 19F\,.$$

Pri crtanju dijagrama osnovnih statičkih veličina, posebno treba razmotriti deo nosača opterećenog specifičnim opterećenjem trapeznog oblika (slika 8.9.b.). Tada se može pisati
- *presek I*

$$F_a^I = Y_A + 4aq = -19F\,,$$
$$F_t^I = Z_A - F - z_1 q_{z_1} - \frac{1}{2} z_1 q_{z_2}\,,$$
$$M_f^I = Z_A(z_1 + 6a) + 8aY_A + 2M + 4aq \cdot 2a - Fz_1 - z_1 q_{z_1}\frac{z_1}{2} - \frac{1}{2} z_1 q_{z_2}\frac{z_1}{3}\,.$$

Za pravougaono i trogaono specifično opterećenje, kao delove trapeznog opterećenja (slika 8.9.b.), vidi se da važi

$$q_{z_1} = 2q\,,\qquad \frac{q_{z_2}}{2q} = \frac{z_1}{6a}\,,$$

odnosno

$$q_{z_2} = \frac{q}{3a} z_1\,.$$

Tako se dobija da je

$$F_a^I = -19F\,, \qquad (0 \le z_1 < 6a)$$
$$F_t^I = -18F - 2qz_1 - q\frac{z_1^2}{6a}\,, \qquad (0 < z_1 \le 6a)$$
$$M_f^I = -60Fa + 18Fz_1 - qz_1^2 - q\frac{z_1^3}{18}\,. \qquad (0 \le z_1 \le 6a)$$

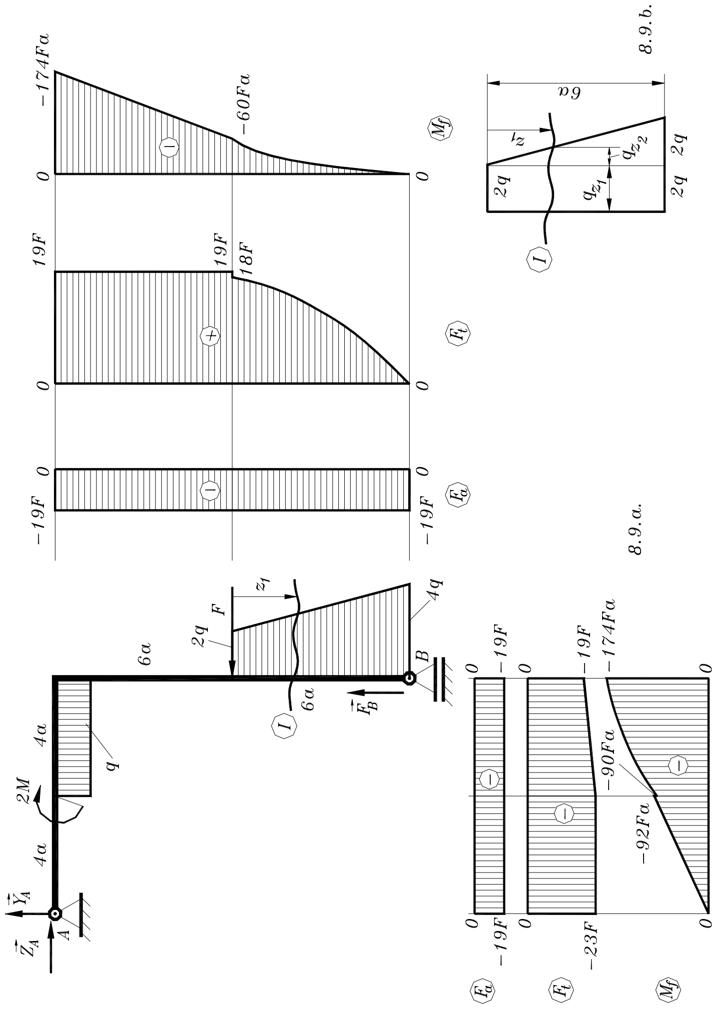
Dijagrami osnovnih statičkih veličina dati su na slici 8.9.a.

Zadatak 8.10. Za *Gerberov* nosač, opterećen kao na slici, ako je $F = 1$, $q = 1$ i $M = 1$, nacrtati dijagrame osnovnih statičkih veličina.

Rešenje: *Postavljajući uslove ravnoteže za ravan sistem sila koji deluje na nosač oslobođen veza, dobijaju se reakcije veza*

$$F_A = 0{,}5\,,\quad Z_B = 2\,,\quad Y_B = 4{,}5 \quad i \quad M_B = 5\,,$$

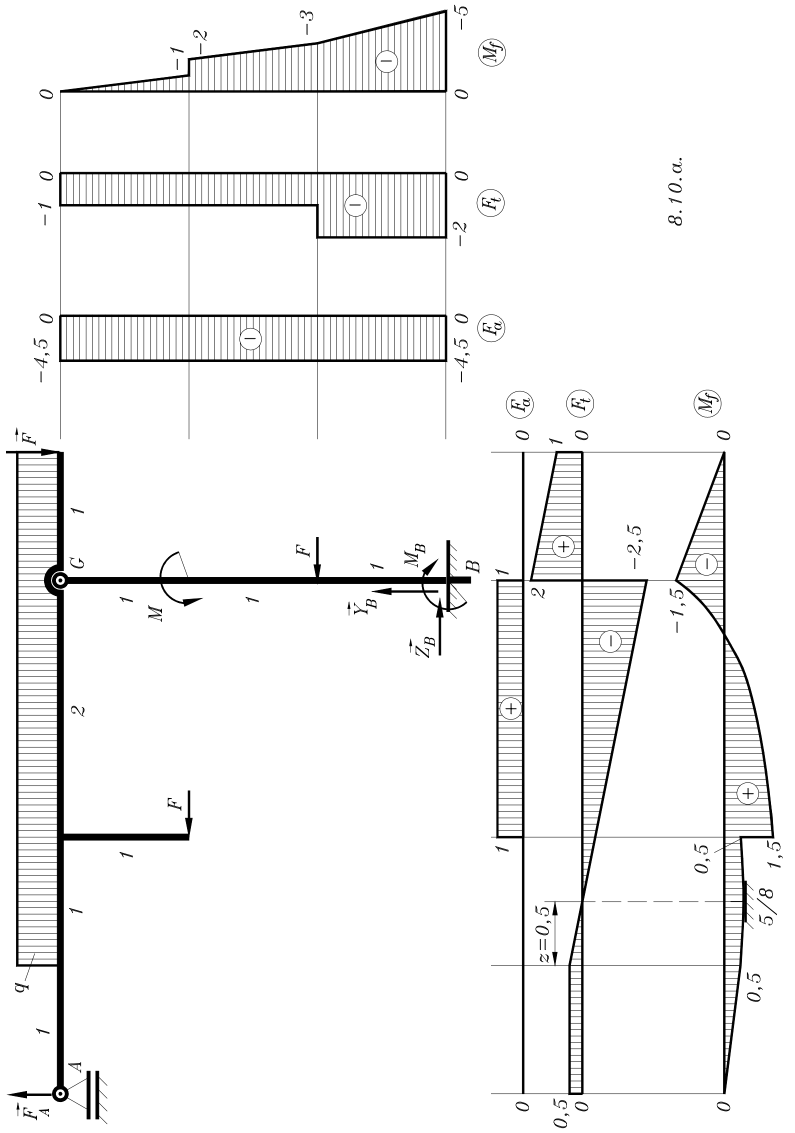
a dijagrami osnovnih statičkih veličina dati su na slici 8.10.a..



−174Fa
−60Fa
19F
18F
−19F
0
M_f
F_t
F_a
6a
4a
2M
q
2q
4q
F
z_1
I
A
B
$\vec{Z}_A$
$\vec{Y}_A$
$\vec{F}_B$
−23F
−90Fa
−92Fa
q_{z_1}
q_{z_2}

8.9.a.

8.9.b.



8.10.a.

<u>Zadatak 8.11.</u> Za konstrukciju sastavljenu od lakih zglobno povezanih štapova, opterećenu kao na slici, *Riterovom* metodom odrediti sile u štapovima *4*, *5* i *6*. Poznato je: $F_1 = 2$ i $F_2 = 5$.

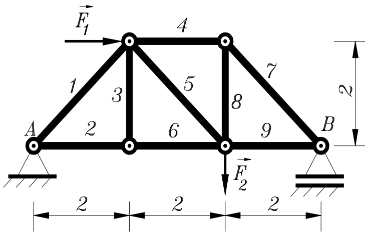
Rešenje: *Broj čvorova zadate rešetkaste konstrukcije je* $n = 6$ *a broj štapova je* $s = 9$. *Imajući u vidu relaciju (8.127), zaključuje se da je ona zadovoljena, tj.* $9 = 2 \cdot 6 - 3$, *što znači da je rešetkasti nosač statički određen.*

Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na posmatrani nosač oslobođen veza (slika 8.11.a.) su

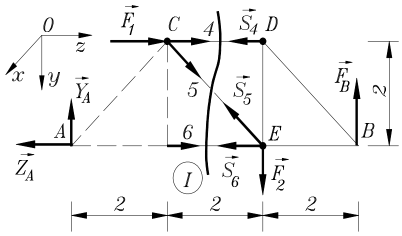
$$\sum Z_i = 0; \qquad -Z_A + F_1 = 0\,,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A + F_2 - F_B = 0\,,$$
$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -2F_1 - 4F_2 + 6F_B = 0\,,$$

odakle se dobija da je

$$Z_A = 2\,, \quad Y_A = 1 \quad i \quad F_B = 4\,.$$



uz zadatak 8.11.



8.11.a.

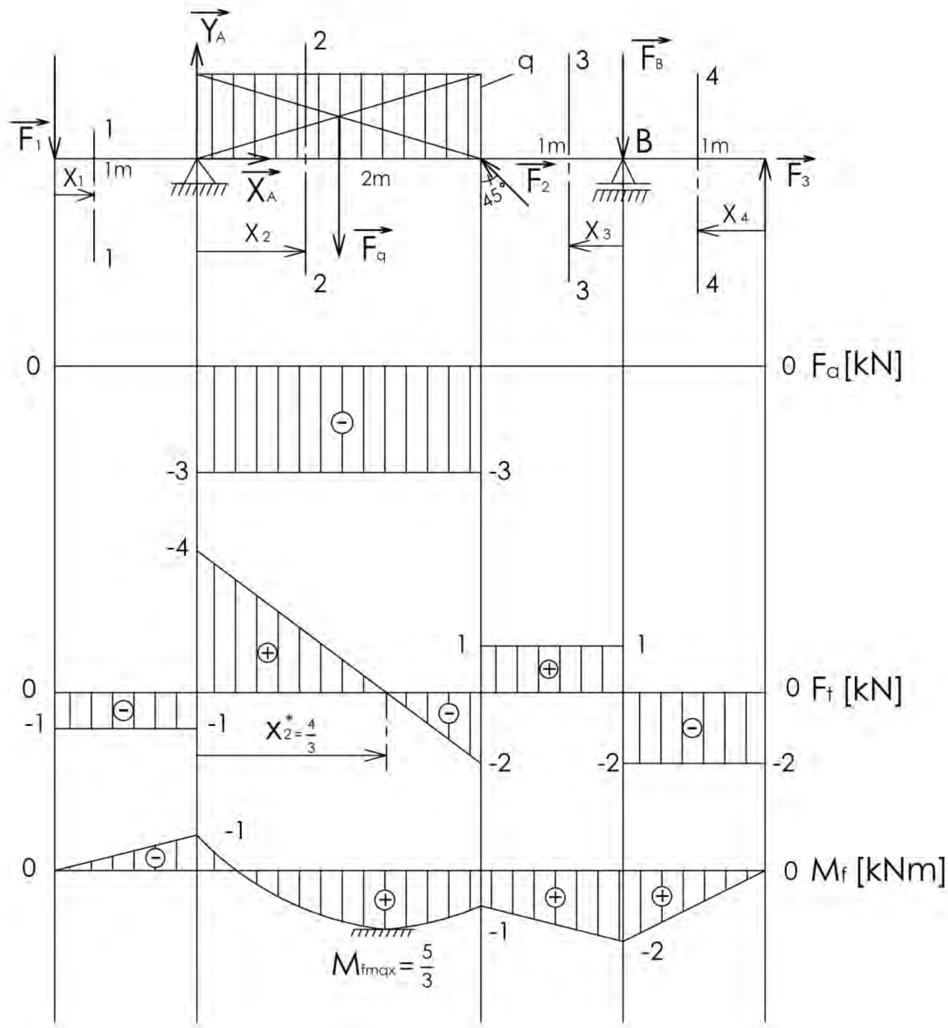
U cilju određivanja sila u štapovima 4, 5 i 6, Riterovom metodom, posmatra se ravnoteža jednog dela rešetkastog nosača. Neka je to deo nosača desno od preseka I. Kako je moguće postaviti tri analitička uslova ravnoteže ravnog sistema sila, pogodno je koristiti treći oblik, tj. pogodno je pisati momentne jednačine za tačke u kojima se seku napadne linije sila koje treba odrediti. U ovom slučaju, pretpostavljajući da su svi štapovi opterećeni na zatezanje, može se pisati

$$\sum M_{Cx} = 0; \qquad -2S_6 - 2F_2 + 4F_B = 0\,,$$
$$\sum M_{Ex} = 0; \qquad 2S_4 + 2F_B = 0\,,$$
$$\sum M_{Dx} = 0; \qquad -2S_6 - 2S_5\frac{\sqrt{2}}{2} + 2F_B = 0\,,$$

odakle se dobija da je

$$S_4 = -4\,, \quad S_5 = \sqrt{2} \quad i \quad S_6 = 3\,.$$

Dakle, znak minus u konačnom rešenju za silu u štapu 4 pokazuje da je početna pretpostavka o karakteru njegovog opterećenja pogrešna, odnosno štap 4 nije zategnut već je pritisnut.



$$F_1 = 1\ [kN]$$

$$F_2 = 3\sqrt{2}\ [kN]$$

$$F_3 = 2\ [kN]$$

$$q = 3\ \left[\frac{kN}{m}\right]$$

$$\sum_i Y_i = 0, F_1 - Y_A + F_q - F_2 \cos 45^o + F_B - F_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_i X_i = 0, \qquad X_A - F_2 \sin 45^o = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_i M_{AZ} = 0, \qquad F_1 \cdot 1 - F_q + F_2 \cos 45^o \cdot 2 - F_B \cdot 3 + F_3 \cdot 4 = 0 \qquad (3)$$

$(2) \Longrightarrow X_A = F_2 \sin 45^{\circ} = 3\ [kN], \quad F_2 = 2q = 6[kN]$

$(3) \Longrightarrow 3F_B = 1 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 4$

$F_B = 3\ [kN]$

$(1) \Longrightarrow Y_A = 1 + 6 - 3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 - 2 = 5\ [kN]$

<u>1-1</u>

$\longleftarrow^{+}\ F_a^l = 0, \qquad 0 \leq X_1 < 1m$

$\uparrow^{+}\ F_t^l = -F_1 = -1\ [kN], \qquad 0 < X_1 < 1m$

$\circlearrowright^{+}\ M_f^l = -F_1 X_1 = -X_1$

<u>*2-2*</u>

$\leftarrow^{+}\ F_a^l = -X_a = -3[kN], \qquad 0 < X_2 < 2m$

$\uparrow^{+}\ F_t^l = -F_1 + Y_a - F_2(X_2) = -1 + 5 - 3X_2 = 4 - 3X_2, \qquad 0 < X_2 < 2m$

$F_t^l\big|_{X_2=0} = 4\ [kN], \qquad F_t^l\big|_{X_2=2m} = -2[kN]$

$F_t^l(X_2^*) = 0 \Rightarrow X_2^* = \frac{4}{3}[m]$

$\circlearrowright^{+}\ M_f^l = -F_1(1 + X_2) + Y_a X_2 - F_2(X_2)\frac{X_2}{2} = -1(1 + X_2) + 5X_2 - 3X_2\frac{X_2}{2} = -1 + 4X_2 - \frac{3}{2}X_2^2,$
$0 \leq X_2 \leq 2m$

$M_f^l\big|_{X_2=0} = -1[kNm], \quad M_f^l\big|_{X_2=2m} = 1[kNm]$

$M_{fmq_x}^l = M_f^l(X_2 = X_2^*) = \frac{5}{3}[kNm]$

<u>3-3</u>

$\rightarrow^{+}\ F_a^d = 0, \qquad 0 \leq X_3 < 1m$

$\downarrow^{+}\ F_t^d = F_B - F_3 = 1[kN], \qquad 0 < X_3 < 1m$

$\circlearrowleft^{+}\ M_f^d = F_3(1 + X_3) - F_B X_3 = 2 - X_3, \qquad 0 \leq X_3 \leq 1m$

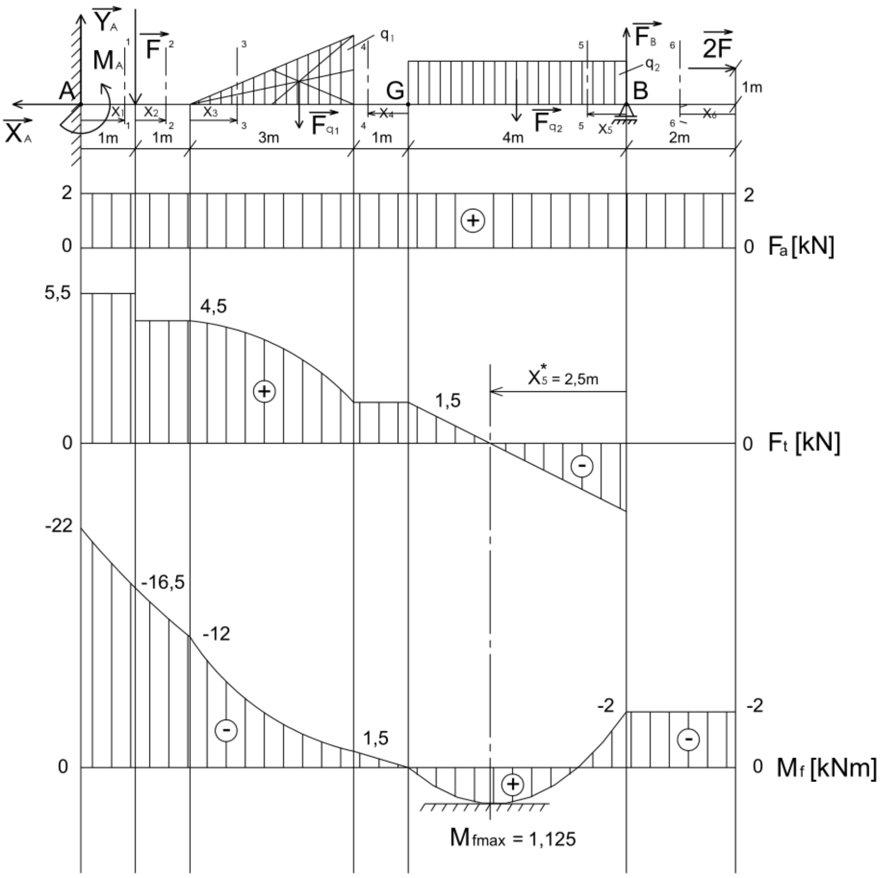
$M_f^d\big|_{X_3=0} = 2[kNm], \qquad M_f^d\big|_{X_3=1m} = 1[kNm]$

<u>4-4</u>

$\rightarrow^{+}\ F_a^d = 0, \qquad 0 \leq X_4 \leq 1m$

$\downarrow^{+}\ F_t^d = -F_3 = -2[kN], 0 < X_4 < 1m$

$\circlearrowleft^{+}\ M_f^d = F_3 X_4 = 2X_4, \qquad 0 \leq X_4 \leq 1m$



$$F = 1\ [kN]$$

$$q_1 = 2\ \left[\frac{kN}{m}\right]$$

$$q_2 = 1\left[\frac{kN}{m}\right]$$

$$F_{q_1} = \frac{1}{2} q_1 \cdot 3 = 3\ [kN]$$

$$F_{q_2} = q_2 \cdot 4 = 4\ [kN]$$

$$\sum_i X_i = 0, \qquad -X_A + 2F = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_i Y_i = 0, \qquad -Y_A + F + F_{q_1} + F_{q_2} - F_B = 0, \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft^{+} \sum_i M_{AZ}^{\vec{F}_i} = 0, \qquad M_A - F \cdot 1 - F_{q_1} \cdot 4 - F_{q_2} \cdot 8 + F_B \cdot 10 - 2F \cdot 1 = 0, \qquad (3)$$

$$\curvearrowleft^{+} \sum_i M_Z^d = 0, \qquad -F_{q_2} \cdot 2 + F_B \cdot 4 - 2F \cdot 1 = 0, \qquad (4)$$

$(1) \Longrightarrow X_A = 2F = 2[kN]$

$(4) \Rightarrow F_B = \frac{1}{4}(2 \cdot 4 + 2 \cdot 1) = 2{,}5[kN]$

$(3) \Longrightarrow M_A = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 - 2{,}5 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 22[kNm]$

$(2) \Longrightarrow Y_A = 1 + 3 + 4 - 2{,}5 = 5{,}5[kNm]$

<u>1-1</u>

$\leftarrow^{+} F_a^l = X_A = 2\ [kN], \qquad 0 < X_1 \leq 1m$

$\uparrow^{+} F_t^l = Y_A = 5{,}5[kN], \qquad 0 < X_1 < 1m$

$\circlearrowright^{+} M_f^l = -M_A + Y_A X_1 = -22 + 5{,}5 \cdot X_1, \qquad 0 < X_1 \leq 1m$

$M_f^l\big|_{X_1=0} = -2{,}2[kNm], \qquad M_f^d\big|_{X_1=1m} = -16{,}5[kNm]$

<u>2-2</u>

$\leftarrow^{+} F_a^l = X_A = 2\ [kN], \qquad 0 \leq X_2 \leq 1m$

$\uparrow^{+} F_t^l = Y_A - F = 4{,}5[kN], \qquad 0 < X_2 \leq 1m$

$\circlearrowright^{+} M_f^l = -M_A + X_A(1 + X_2) - FX_2 = -16{,}5 + 4{,}5 \cdot X_2, \qquad 0 \leq X_2 \leq 1m$

$M_f^l\big|_{X_2=0} = -16{,}5[kNm], \quad M_f^l\big|_{X_2=0} = -12[kNm]$

<u>3-3</u>

$\leftarrow^{+} F_a^l = X_A = 2\ [kN], \qquad 0 \leq X_2 \leq 3m$

$\uparrow^{+} F_t^l = Y_A - F - F_{q_1}(X_3) = 4{,}5 - \frac{1}{3}X_3^2, \qquad 0 \leq X_3 \leq 3m$

$F_t^l\big|_{X_3=0} = 4{,}5\ [kN], \qquad F_t^l\big|_{X_3=3m} = 1{,}5[kN]$

$$\frac{q_1}{3} = \frac{q_1(X_3)}{X_3}$$

$$q_1(X_3) = \frac{X_3}{3}q_1 = \frac{2}{3}X_3$$

$$F_{q_1}(X_3) = \frac{1}{2}X_3 q_1(X_3) = \frac{1}{3}X_3^2$$

$$\circlearrowright^{+} M_f^l = -M_A + Y_A(2 + X_3) - F(1 + X_3) - F_{q_1}(X_3)\frac{X_3}{3} = -12 + 4{,}5X_3 - \frac{1}{9}X_3^3, \qquad 0 \leq X_3 \leq 3m$$

$M_f^l\Big|_{X_3=0} = -12\ [kNm], \qquad M_f^l\Big|_{X_3=3m} = -1{,}5[kNm]$

4-4

$\rightarrow^+ F_a^d = 2F = 2[kN], \qquad 0 \leq X_4 \leq 1m$

$\downarrow^+ F_t^d = -F_B + F_{q_2} = 1{,}5[kN], \qquad 0 \leq X_4 \leq 1m$

$\circlearrowleft^+ M_f^d = -2F \cdot 1 + F_B(4 + X_4) - F_{q_2}(2 + X_4) = -1{,}5X_4, \qquad 0 \leq X_4 \leq 1m$

$M_f^d\Big|_{X_4=0} = 0\ [kNm], \qquad M_f^d\Big|_{X_4=1m} = -1{,}5[kNm]$

5-5

$\rightarrow^+ F_a^d = 2F = 2[kN]$

$\downarrow^+ F_t^d = -F_B + F_{q_2}(X_5) = -2{,}5 + q_2X_5 = -2{,}5 + X_5, \qquad 0 < X_5 \leq 4m$

$F_t^d\Big|_{X_5=0} = -2{,}5\ , \qquad F_t^d\Big|_{X_5=4m} = 1{,}5[kN]$

$F_t^d\Big|_{X_5^*} = 0 \Rightarrow X_5^* = 2{,}5m$

$\circlearrowleft^+ M_f^d\Big|_{X_5=0} = -2[kNm], \qquad M_f^d\Big|_{X_5=4m} = 0$

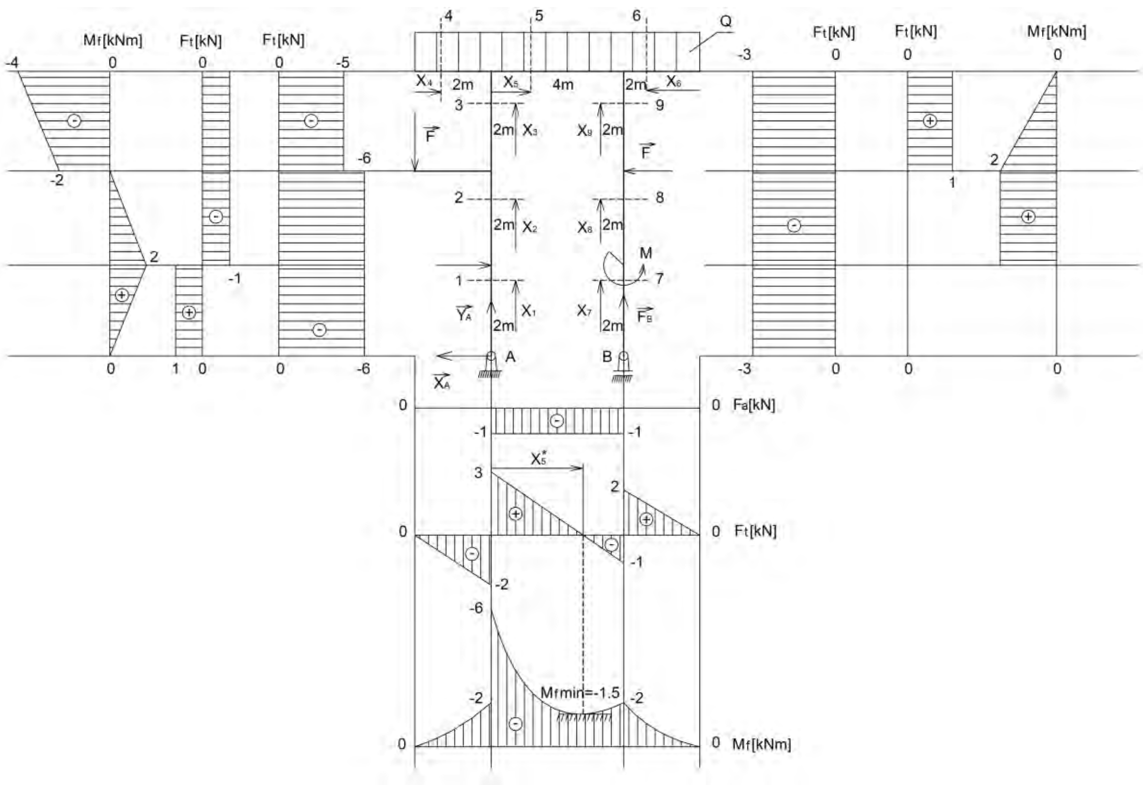
$M_{fmqx}^d = M_f^d\Big|_{X_5^*=2{,}5m} = 1{,}125\ [kNm]$

6-6

$\rightarrow^+ F_a^d = 2F = 2[kN], \quad 0 < X_6 \leq 2m$

$\downarrow^+ F_t^d = 0, \qquad 0 \leq X_6 < 2m$

$\circlearrowleft^+ M_f^d = -2F \cdot 1 = -2[kNm], \qquad 0 < X_6 \leq 2m$



$F = 1\ [kN], q = 1[kN], M = 2[kN]$

$$\sum_i X_i = 0, \quad -X_a + 2F - F = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad -Y_a + -F_b + F + F_q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_i M_{AZ}^{\vec{F_i}} = 0, \qquad -2F \cdot 2 + F \cdot 2 - F_q \cdot 2 + F \cdot 4 + M + F_B \cdot 4 = 0, \qquad (3)$$

$F_q = q \cdot 8 = 8[kN]$

$(1) \Rightarrow X_A = F = 1[kN]$

$(3) \Rightarrow F_B = 3[kN]$

$(2) \Rightarrow Y_A = 6[kN]$

1-1

$\leftarrow^{+}\ F_a^l = -Y_A = -6[kN], \qquad 0 < X_1 \leq 2m$

$\uparrow^{+}\ F_t^l = X_A = 1[kN], \qquad 0 < X_1 \leq 2m$

$\circlearrowright^{+}\ M_f^l = X_A X_1 = X_1, \ \ 0 < X_1 \leq 2m$

$M_f^l\big|_{X_1=0} = 0 = 0, \qquad M_f^l\big|_{X_1=2m} = 2[kNm]$

2-2

$\leftarrow^{+}\ F_a^l = -Y_a = -6[kN], \qquad 0 < X_1 \le 2m$

$\uparrow^{+}\ F_t^l = X_A - 2F = -1[kN]$

$\circlearrowright^{+}\ M_f^l = X_A(2 + X_2) - 2FX_2 = 2 - X_2, \qquad 0 \le X_2 < 2m$

$M_f^l\big|_{X_2=0} = 2[kNm], \qquad M_f^l\big|_{X_2=2m} = 0$

3-3

$\leftarrow^{+}\ F_a^l = -Y_a + F = -5[kN], \qquad 0 < X_3 < 2m$

$\uparrow^{+}\ F_t^l = X_A - 2F = -1[kN], \qquad 0 \le X_3 < 2m$

$\circlearrowright^{+}\ M_f^l = X_A(4 + X_3) - 2F(2 + X_3) - F \cdot 2 = -X_3 - 2, \qquad 0 < X_3 < 2m$

$M_f^l\big|_{X_3=0} = -2[kNm],\ M_f^l\big|_{X_3=2m} = -4[kNm].$

4-4

$\leftarrow^{+}\ F_a^l = 0, \qquad 0 \le X_4 < 2m$

$\uparrow^{+}\ F_t^l = -qX_4 = -X_4, \qquad 0 \le X_4 < 2m \quad (F_t^l\big|_{X_4=0} = 0, F_t^l\big|_{X_4=2m} = -2[kN])$

$\circlearrowright^{+}\ M_f^l = -\frac{1}{2}qX_4^2 = -\frac{1}{2}X_4^2, \qquad 0 \le X_4 < 2m \quad \left(M_f^l\big|_{X_4=0} = 0, M_f^l\big|_{X_4=2m} = -2[kN]\right)$

5-5

$\leftarrow^{+}\ F_a^l = X_A - 2F = -1[kN], \qquad 0 < X_5 < 4m$

$\uparrow^{+}\ F_t^l = -q(2 + X_5) + Y_A - F = 3 - X_5, 0 < X_5 < 4m$

$F_t^l\big|_{X_5=0} = 3[kN], \qquad F_t^l\big|_{X_5=4m} = -1[kN]$

$F_t^l(X_5^*) = 0\ \Rightarrow X_5^* = 3m$

$\circlearrowright^{+}\ M_f^l = -\frac{1}{2}q(2 + X_5)^2 + X_A \cdot 6 + Y_A \cdot X_5 - 2F \cdot 4 - F(2 + X_5) = -\frac{1}{2}X_5^2 + 3X_5 - 6,$
$0 < X_5 < 4m$

$M_f^l\big|_{X_5=0} = -6[kNm], \qquad M_f^l\big|_{X_5=4m} = -2[kNm]$

$M_{fmin}^l = M_f^l\big|_{X_5^*=3m} = -1{,}5[kNm]$

6-6

$\rightarrow^{+}\ F_a^d = 0, \qquad 0 \le X_6 < 2m$

$\downarrow^+ \; F_t^d = qX_6 = X_6, \qquad 0 \leq X_6 < 2m$

$F_t^d\Big|_{X_6=0} = 0, \qquad F_t^d\Big|_{X_6=2m} = 2[kN]$

$\circlearrowleft^+ \; M_f^d\Big|_{X_6\ =3m} = -2[kNm]$

7-7

$\rightarrow^+ \; F_a^d = -F_B = -3[kN], \qquad 0 < X_7 \leq 2m$

$\downarrow^+ \; F_t^d = 0, \qquad 0 \leq X_7 \leq 2m$

$\circlearrowleft^+ \; M_f^d = 0, \qquad 0 \leq X_7 < 2m$

8-8

$\rightarrow^+ \; F_a^d = -F_B = -3[kN], \qquad 0 \leq X_8 \leq 2m$

$F_t^d = 0, \qquad 0 \leq X_8 < 2m$

$\circlearrowleft^+ \; M_f^d = M = 2[kNm], \qquad 0 < X_8 \leq 2m$

9-9

$\rightarrow^+ \; F_a^d = -F_B = -3[kN], \qquad 0 \leq X_9 < 2m$

$\downarrow^+ \; F_t^d = 0, \qquad 0 < X_9 < 2m$

$\circlearrowleft^+ \; M_f^d = M - FX_9 = 2 - X_9, \qquad 0 \leq X_9 < 2m$

$M_f^d\Big|_{X_9=0} = 2[kNm], \qquad M_f^d\Big|_{X_9=0} = 0$