7

TEŽIŠTE

Uvodna razmatranja
Zadaci

U ovom poglavlju će biti prikazan postupak za određivanje težišta tela u zavisnosti od njihove geometrije i rasporeda masa. Određivanje položaja težišta tela i sistema tela je vrlo bitno u realnim uslovima između ostalog i zbog stabilnosti konstrukcija.

UVODNA RAZMATRANJA

Težište tela je napadna tačka rezultante sistema vezanih paralelnih sila kojima Zemlja deluje na deliće toga tela, tj. napadna tačka težine tela. Položaj ovako definisane tačke tela se ne menja, pri promeni položaja tela, u odnosu na telo.

Koordinate težišta tela koje se sastoji od *n* delova određene su u odnosu na koordinatni sistem *Oxyz* izrazima:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i G_i}{G}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i G_i}{G}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i G_i}{G}, \tag{1}$$

gde su:

G - težina tela čija je vrednost odredjena izrazom

$$G = G_1 + G_2 + ... + G_n = \sum_{i=1}^{n} G_i , \tag{2}$$

G_i - težina elemenata tela sa indeksom *i,*

x_i, y_i, z_i - koordinate težišta elementa tela sa indeksom *i.* Broj *n* elemenata tela na koje je ono podeljeno je konačan.

Ako je telo homogeno (specifična težina je u svim tačkama tela ista) koordinate težišta tela odeređene su u odnosu na koordinatni sistem *Oxyz* izrazima:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i V_i}{V}, \tag{3}$$

gde su:

V - zapremina tela,

V_i - zapremina elemenata tela sa indeksom *i,*

x_i, y_i, z_i - koordinate težišta elementa sa indeksom *i.*

Ako je jedna dimenzija tela mnogo manja u odnosu na ostale dve (površinski raspored mase) koordinate težišta tela određene su u odnosu na koordinatni sistem *Oxyz* izrazima:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i A_i}{A}, \tag{4}$$

gde su:

A - površina tela ili ploče,

A_i - površina elementa sa indeksom i,

x_i, y_i, z_i - koordinate težišta elemenata sa indeksom i.

U slučaju ravne ploče koordinate težišta su:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A} = \frac{S_y}{A} \quad , \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A} = \frac{S_x}{A} , \tag{5}$$

pri čemu su S_x i S_y statički momenti površine u odnosu ne ose Ox i Oy.

U slučaju tela kod koga su dve dimenzije mnogo manje u odnosu na treću (linijski raspored mase) za određivanje koordinata težišta tela u odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$ služe izrazi:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i L_i}{L} \quad , \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i L_i}{L} \quad , \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i L_i}{L} \quad , \tag{6}$$

gde su:

L - dužina tela,

L_i - dužina elementa sa indeksom i,

x_i, y_i, z_i - koordinate težišta elemenata sa indeksom i.

Kada broj elemenata tela teži beskonačnom broju ($n \to \infty$) jednačine (3), (4) i (6) prelaze u formu:

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint xdV \ , \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint ydV \ , \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint zdV \ , \tag{7}$$

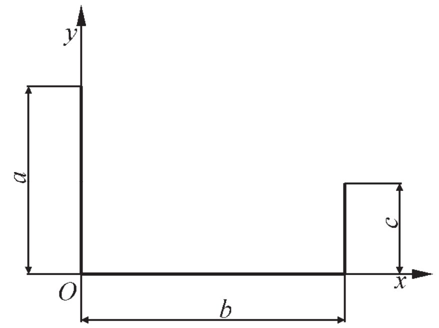
$$x_c = \frac{1}{A}\iint xdA, \ y_c = \frac{1}{A}\iint ydA, \ z_c = \frac{1}{A}\iint zdA \ , \tag{8}$$

$$x_c = \frac{1}{L}\int xdL, \ y_c = \frac{1}{L}\int ydL, \ z_c = \frac{1}{L}\int zdL \ . \tag{9}$$

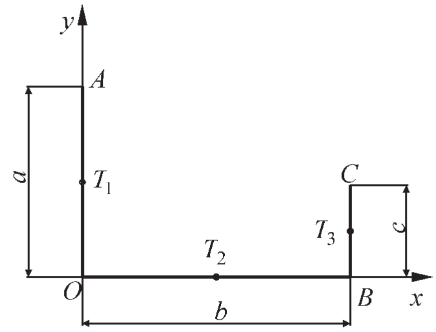
ZADACI

Određivanje težišta linije

1. *Odrediti težište homogene žice u odnosu na zadati koordinatni sistem. Dužine delova žice zadati su na slici 1.*



slika 1



slika 1.1

Rešenje:

Položaj težišta zadate figure određen je koordinatama težišta T_1, T_2, T_3 pojedinih delova figure (slika 1.1), u odnosu na zadati koordinatni sistem *xOy*. Koordinate x_T, y_T, težišta *T* određuju se metodom rastavljanja na konačan broj linija.
U tom slučaju obrasci za izračunavanje koordinata težišta su:

$$x_T = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{3} x_i l_i\,, \qquad y_T = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{3} y_i l_i\,, \tag{1}$$

gde su:

$$\overline{AO} = l_1 = a, \qquad \overline{OB} = l_2 = b, \qquad \overline{BC} = l_3 = c,$$

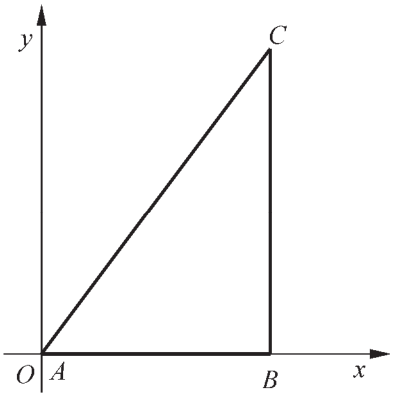
$$L = l_1 + l_2 + l_3 = a + b + c\,. \tag{2}$$

Koordinate težišta $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$, $T_3(x_3, y_3)$ pojedinih delova figure (slika 1.1), su: $T_1\left(0, \frac{a}{2}\right)$, $T_2\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $T_3\left(b, \frac{c}{2}\right)$, pa se primenom obrazaca (1) dobijaju koordinate težišta linije *AOBC* u odnosu na zadati koordinatni sistem:

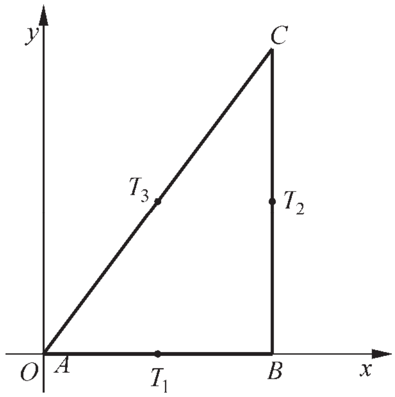
$$x_T = \frac{1}{a+b+c}\left(x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3\right) = \frac{b^2 + 2bc}{2(a+b+c)},$$

$$y_T = \frac{1}{a+b+c}\left(y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3\right) = \frac{a^2 + c^2}{2(a+b+c)}. \tag{3}$$

2. *Odrediti položaj težišta homogene žice savijene u obliku trougla u odnosu na zadati koordinatni sistem (slika 2) čija su temena određena koordinatama* $A(0,0), B(6,0), C(6,8)$. *Brojne vrednosti koordinata date su u centimetrima.*



slika 2



slika 2.1

***Rešenje*:**

Kao i u prethodnom zadatku položaj težišta $T(x_T, y_T)$ zadate figure određuje se u odnosu na koordintni sistem *xOy*, koristeći metodu rastavljanja. Otuda je:

$$x_T = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{3} x_i l_i = \frac{1}{(l_1 + l_2 + l_3)}(x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3), \tag{1}$$

$$y_T = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{3} y_i l_i = \frac{1}{(l_1 + l_2 + l_3)}(y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3),$$

Sa slike 2.1 sledi:

$$l_1 = \overline{AB} = 6cm, \quad l_2 = \overline{BC} = 8cm, \quad l_3 = \overline{AC} = 10cm\ , \tag{2}$$

pa je

$$L = l_1 + l_2 + l_3 = 24cm. \tag{3}$$

Koordinate tačaka T_1, T_2 i T_3 u odnosu na koordinatni sistem *xOy* su:

$T_1(3,0),\ T_2(6,4),\ T_3(3,4).$

Konačno je:

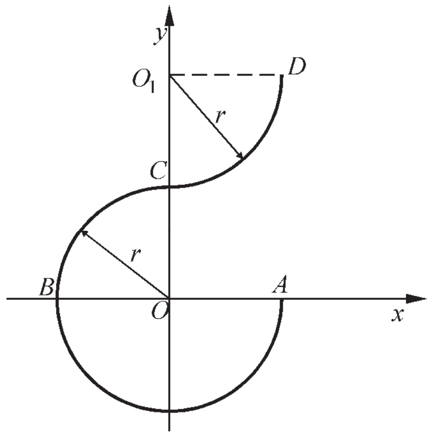
$$x_T = \frac{1}{24}(18 + 48 + 30) = 4cm\ ,$$

$$y_T = \frac{1}{24}(32 + 40) = 3cm\ . \tag{4}$$

3. *Odrediti koordinate težišta složene konture koja se sastoji od dva luka AC i CD poluprečnika r. Koordinatni sistem xOy zadat je na slici 3.*

Rešenje:

Zadatu figuru treba podeliti, na primer, kao na slici 3.1, na lukove *AB, BC,CD*, odrediti njihove dužine, kao i koordinate težišta tih lukova u odnosu na zadati koordinatni sistem *xOy*.



slika 3

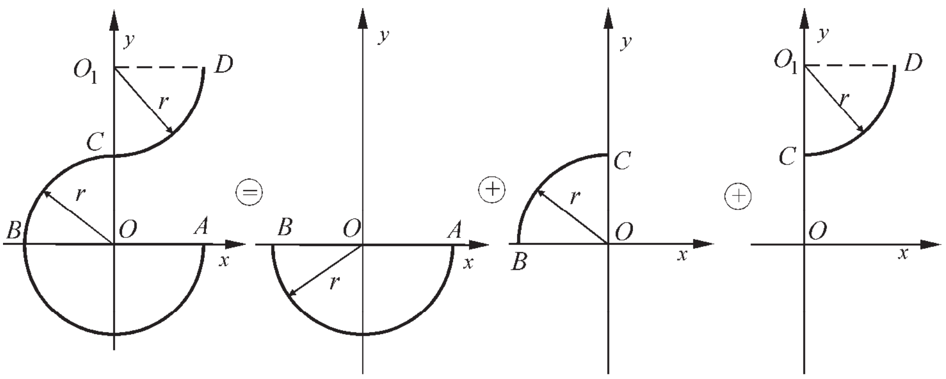
Tako je: luk *AB* dužine $r\pi$; luk *BC* dužine $\frac{r\pi}{2}$ i luk *CD* dužine $\frac{r\pi}{2}$. Postupkom koji je prikazan u teoriji, vodeći računa o položaju koordinatnog sistema *xOy*, određuju se koordinate težišta pomenutih lukova.

Zbog simetrije luka *AB* poluprečnika *r*, u odnosu na osu *Oy*, težište luka leži na osi *Oy* i to na negativnom delu. Otuda je *x* – koordinata težišta tog luka jednaka nuli $(x_1 = 0)$, (slika 3.2).

Za izračunavanje *y* koordinate težišta T_1 luka *AB,* može se uočiti elementarni delić luka $dl_1 = rd\varphi$, čiji je položaj u odnosu na osu *Oy* određen uglom φ. Težište ovog elementa ja na rastojanju $y = -r\cos\varphi$, pa je na osnovu formule

$$y_1 = \frac{1}{l_1}\int_{(l_1)} y dl_1 = \frac{1}{l_1}\int_{(l_1)} (-r\cos\varphi) r d\varphi = -\frac{r^2}{l_1}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi, \tag{1}$$

$$y_1 = -\frac{2r^2\sin\alpha}{l_1}. \tag{2}$$



slika 3.1

Sa slike 3.2. vidi sa da je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pa je

$$y_1 = -\frac{2r}{\pi}. \tag{3}$$

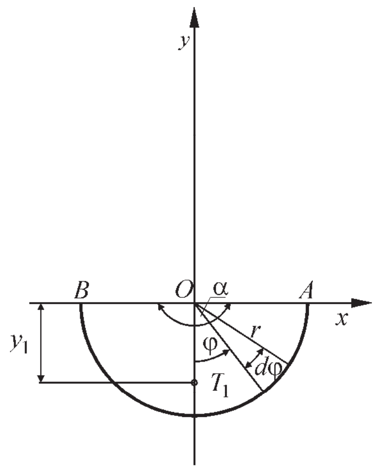
Na isti način, vodeći računa o položaju , luka *BC* u odnosu na koordinatni sistem *xOy*, kao činjenicu da je $O\xi$ osa simetrije luka *BC* (slika 3.3) sledi:

$$x_2 = -\overline{OT_2}\cos 45° = -\frac{2r}{\pi},$$

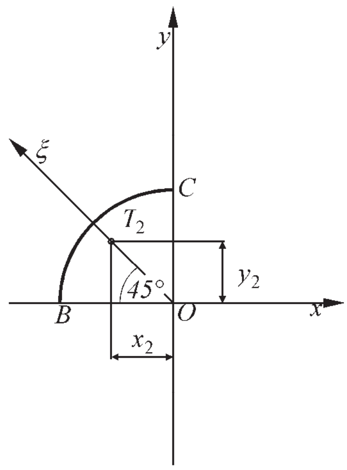
$$y_2 = \overline{OT_2}\sin 45° = \frac{2r}{\pi}, \qquad (4)$$

gde je:

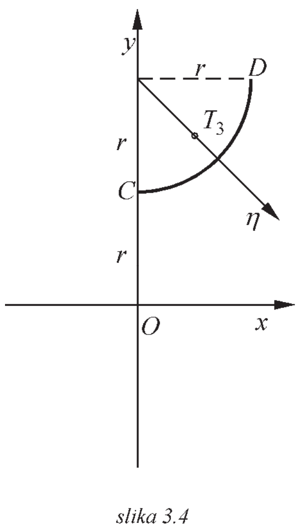
$$\overline{OT_2} = \frac{r\sin 45°}{\pi/4} = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi} \qquad (5)$$



slika 3.2



slika 3.3



slika 3.4

Za deo konture CD koji predstavlja luk dužine $\frac{r\pi}{2}$ (slika 3.4), koordinate težišta T_3 u odnosu na koordinatni sistem xOy glase:

$$x_3 = \overline{O_1T_3}\cos 45° = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2r}{\pi},$$

$$y_3 = 2r - \overline{O_1T_3}\cos 45° = 2r - \frac{2r}{\pi} = \frac{2r}{\pi}(\pi - 1). \qquad (6)$$

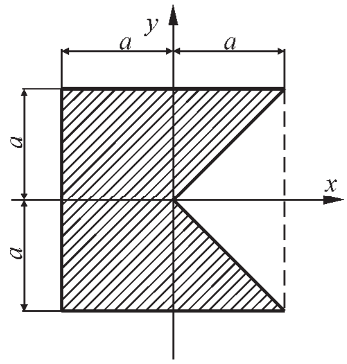
Koordinate težišta zadate u odnosu na koordinatni sistem xOy su:

$$x_T = \frac{1}{L}(x_1l_1 + x_2l_2 + x_3l_3) = 0, \qquad (7)$$

$$y_T = \frac{1}{L}(y_1l_1 + y_2l_2 + y_3l_3) = \frac{r(\pi - 2)}{2\pi},$$

gde je $L = l_1 + l_2 + l_3 = AB + BC + CD = 2r\pi$.

Određivanje težišta površine



slika 4

4. *Za površinu prikazanu na slici 4 odrediti položaj težišta u odnosu na zadat koordinatni sistem. Dimenzije površine zadate su na slici 4.*

Rešenje:

Površina prikazana na slici 4 može se pretpostaviti kao razlika površina A_1 i A_2 (slika 4.1). Težite zadate površine izračunava se iz relacija:

$$x_T = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2},$$

$$y_T = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}. \qquad (1)$$

U prethodnim izrazima su:

x_1, y_1 - koordinate težišta T_1 površine A_1 u odnosu na koordinatni sistem xOy;

x_2, y_2 - koordinate težišta T_2 površine A_2 u odnosu na taj isti koordinatni sistem;

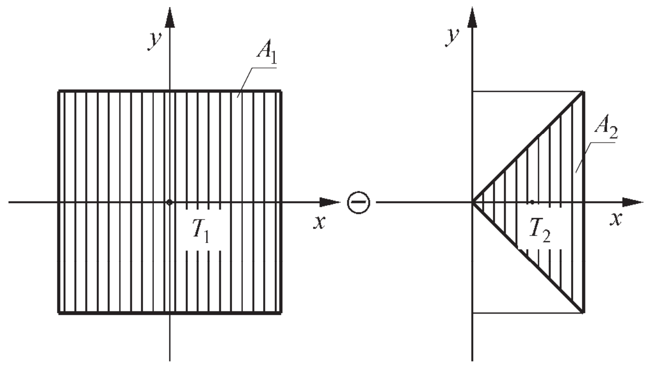
A_1 i A_2 - površina kvadrata i površina trougla;

$A = A_1 - A_2$ - ukupna površina čiji se položaj težišta izračunava,

pri čemu su njihove vrednosti:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2a}{3}, \quad y_2 = 0, \qquad (2)$$

$$A_1 = 4a^2, \; A_2 = a^2, \; A = 3a^2. \qquad (3)$$



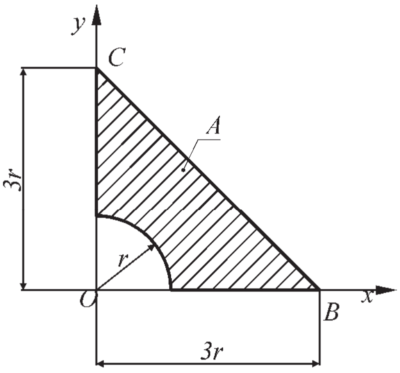
slika 4.1

Na kraju se na osnovu jednačina (1) izračunavaju koordinate težišta zadate površine sa slike 4:

$$x_T = -\frac{2a}{9}, \quad y_T = 0. \qquad (4)$$

Može se uočiti da je površina simetrična u odnosu na osu Ox pa je $y_T = 0$.

5. *Iz homogene ploče oblika jednakokrakog pravouglog trougla katete dužine 3r, izrezana je četvrtina kruga poluprečnika r. Odrediti položaj težišta ove površine u odnosu na zadati Dekartov koordinatni sistem (slika 5).*



slika 5

***Rešenje*:**

Površina sa slike 5 može se predstaviti kao razlika dveju površina (slika 5.1). Koordinate težišta T (zadate figure) u odnosu na koordintni sistem xOy su:

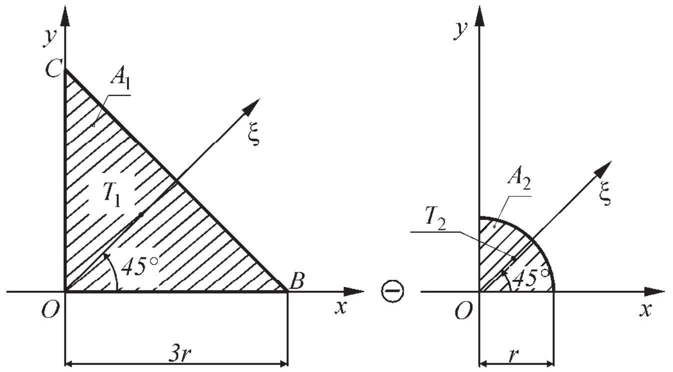
$$x_T = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2},$$

$$y_T = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}. \qquad (1)$$

Pošto je zadata površina simetrična u odnosu na osu $O\xi$ to će težište te povšine, $T(x_T, y_T)$, pripadati pomenutoj osi. Sa slike 5.1 izračunavaju se sledeće veličine:

$$A_1 = \frac{3r \cdot 3r}{2} = \frac{9r^2}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\left(r^2\pi\right) = \frac{r^2\pi}{2}, \qquad (2)$$

a zatim i



slika 5.1

$$x_1 = \overline{OT_1}\cos 45°, \quad y_1 = \overline{OT_1}\sin 45°,$$

$$x_2 = \overline{OT_2}\cos 45°, \quad y_2 = \overline{OT_2}\sin 45°. \qquad (3)$$

Veličine $\overline{OT_1}$ i $\overline{OT_2}$ su:

$$\overline{OT_1} = \frac{2}{3}\frac{3r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2},$$

$$\overline{OT_2} = \frac{2}{3} r \frac{\sin \pi/4}{\pi/4} = \frac{r\sqrt{2}}{3}\frac{4}{\pi}. \qquad (4)$$

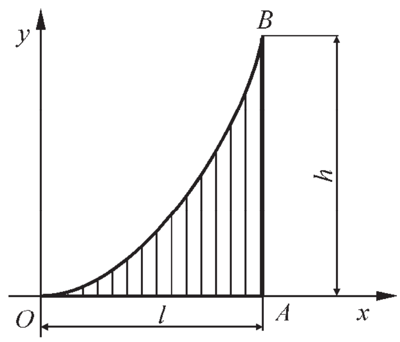
Kako je:

$$x_1 = r,\ \ y_1 = r\,, \quad x_2 = \frac{4r}{3\pi},\ \ y_2 = \frac{4r}{3\pi}\,, \tag{5}$$

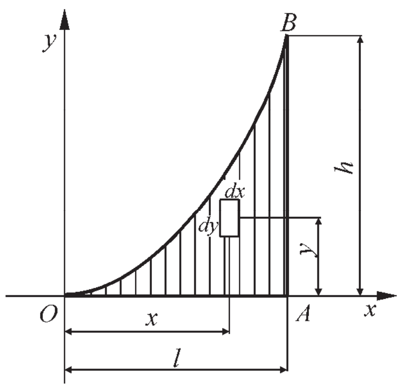
koordinate težišta zadate površine u odnosu na koordinatni sistem xOy su:

$$x_T = \frac{50r}{3(18-\pi)}\,, \quad y_T = \frac{50r}{3(18-\pi)}\,. \tag{6}$$

6. *Odrediti položaj težišta površine ograničene parabolom i pravim linijama $x = l$ i $y=0$ kao na slici 6. Teme parabole je u tački O. Koordinatni sistem je zadat na slici.*



slika 6



slika 6.1

Rešenje:

Jednačina parabole koja prolazi kroz tačke O i B glasi:

$$y = \frac{h}{l^2}x^2\,. \tag{1}$$

Površina OAB čiji položaj težišta treba odrediti izračunava se na sledeći način :

$$A = \int_0^l ydx = \int_0^l \frac{h}{l^2}x^2 = \frac{h}{l^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^l = \frac{hl}{3}. \tag{2}$$

Koordinate težišta zadate površine u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem xOy izračunavaju se u ovom slučaju po obrascima:

$$x_T = \frac{1}{A}\iint_{(A)} xdxdy\,, \qquad y_T = \frac{1}{A}\iint_{(A)} ydxdy\,. \tag{3}$$

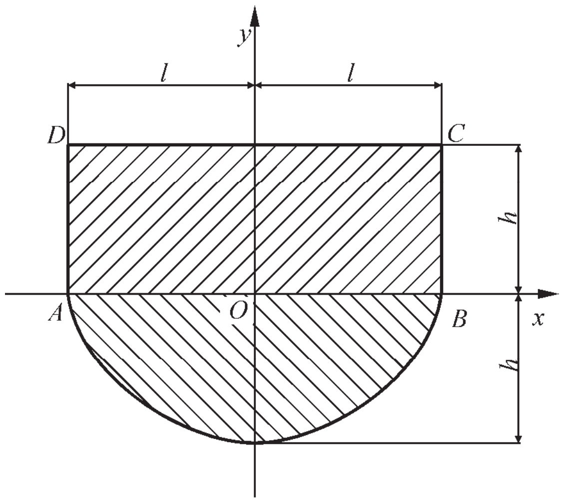
Sada je:

$$x_T = \frac{3}{hl}\iint_{(A)} xdxdy = \frac{3}{hl}\int_0^l xdx \int_0^{\frac{h}{l}x^2} dy = \frac{3}{4}l, \tag{4}$$

$$y_T = \frac{3}{hl}\iint\limits_{(A)} ydxdy = \frac{3}{hl}\int\limits_0^l dx \int\limits_0^{\frac{h}{l}x^2} ydy = \frac{3}{10}l\,, \qquad (5)$$

Koordinate težišta zadate površine su $T\left(\frac{3}{4}l, \frac{3}{10}l\right)$.

7. *Odrediti težište površine koja se sastoji od pravougaonika i dela ograničenog kvadratnom parabolom. Visina pravougaonika je h kao i visina paraboličkog dela. Koordinatni sistem je zadat na slici 7.*



slika 7

***Rešenje*:**

Površina zadate figure je:

$$A = A_1 + A_2 \qquad (1)$$

gde su:

A_1 - površina pravougaonika $(A_1 = 2hl)$,

A_2 - površina odsečka parabole $\left(A_2 = \frac{4}{3}hl\right)$.

Površina ograničena parabolom izračunava se poznatim postupkom

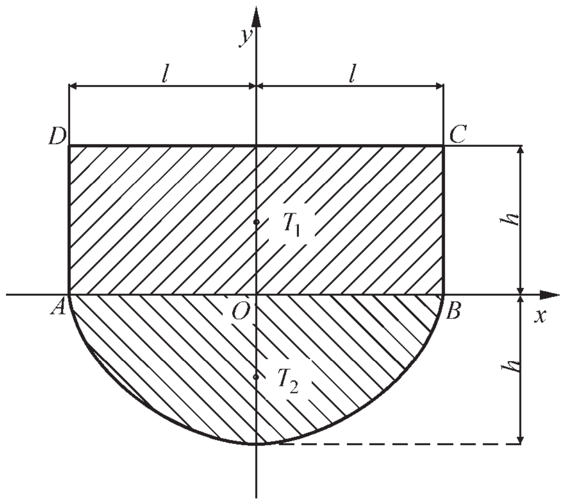
$$A_2 = \int\limits_{-l}^{l}(-ydx) = 2\int\limits_0^l \left(-\left(kx^2 - h\right)dx\right) = 2\left[-\frac{h}{l^2}\frac{x^3}{3} + hx\right]\Bigg|_0^l = \frac{4}{3}hl\,, \qquad (2)$$

gde je $y = kx^2 - h$ jednačina parabole u odnosu na koordinatni sistem xOy.

Koeficijent k izračunava se iz uslova da tačka $B(l,0)$ pripada istovremeno paraboli i osi Ox. Otuda je $k = \dfrac{h}{l^2}$.

Zatim, potrebno je odrediti položaj težišta $T_1(x_1, y_1)$, odnosno $T_2(x_2, y_2)$, prostih figura u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem xOy. Pošto su obe slike simetrične u odnosu na osu Oy tada je $x_1 = x_2 = 0$.

Sa slike 7.1 vidi se da je $y_1 = \dfrac{h}{2}$, dok koordinatu y_2 treba odrediti na sledeći način:



slika 7.1

$$y_2 = \frac{1}{A_2} \iint\limits_{(A_2)} y dx dy = \frac{1}{A_2} \int_{-l}^{l} dx \int_{(kx^2-h)}^{0} y dy , \tag{3}$$

odnosno

$$y_2 = \frac{2}{A_2} \int_{0}^{l} dx \int_{(kx^2-h)}^{0} y dy = -\frac{2}{A_2} \int_{0}^{l} dx \frac{y^2}{2} = -0{,}4h \ .$$

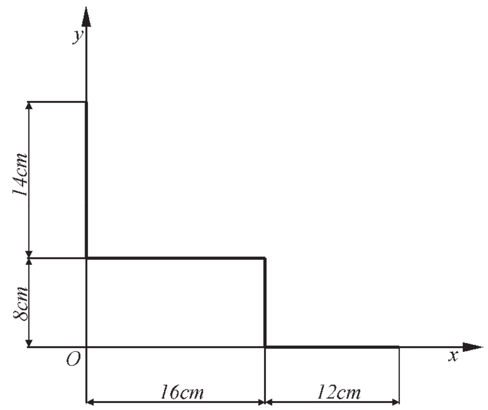
Dalje je

$$y_T = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = 0{,}14h \ . \tag{4}$$

Kako je $x_T = 0$ (simetrija zadate površine u odnosu na osu Oy) tada je težište T zadate površine odredjeno koordinatama $T(0,\ 0.14h)$.

Zadaci za vežbu

1. *Odrediti težište homogene žice oblika kao na slici 8 u odnosu na zadati koordinatni sistem.*

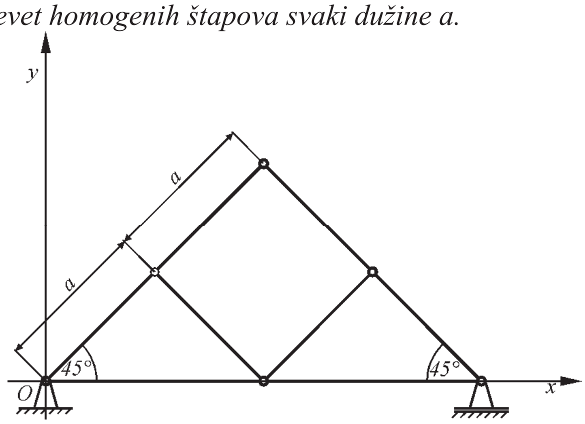


Slika 8

Odgovor:

$x_T = 10{,}4cm$, $y_T = 7{,}4cm$.

2. *Odrediti položaj težišta rešetke u odnosu na zadati koordinatni sistem (slika 9) sastavljene od devet homogenih štapova svaki dužine a.*



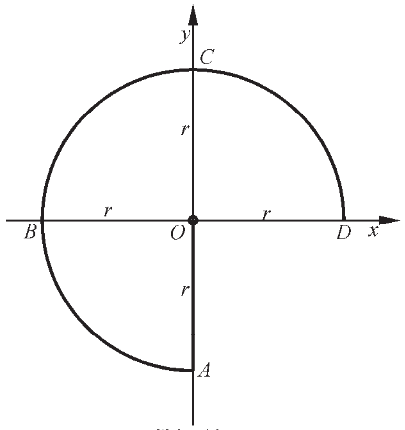
Slika 9

Odgovor:

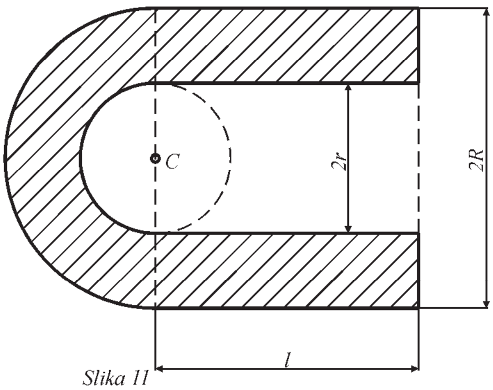
$x_T = 1.414a\left[m\right]$, $y_T = 0.443a\left[m\right]$.

3. *Odrediti položaj težišta konture OABCD u odnosu na zadati koordinatni sistem (slika 10).*

Odgovor: $x_T = -\dfrac{4r}{9\pi}$, $y_T = \dfrac{4r}{9\pi}$.



Slika 10



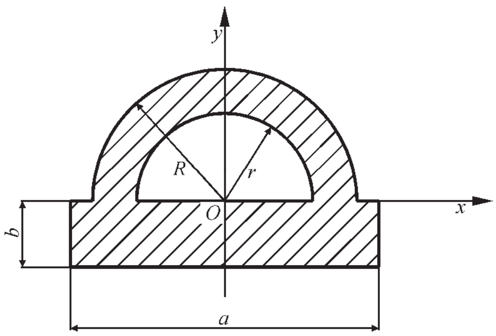
Slika 11

4. *Odrediti dužinu l tako, da se težište zadate površine poklopi sa tačkom C kruga ako je $R = 2r$ (slika 11).*

Odgovor:

$l = R\sqrt{\dfrac{7}{6}}$

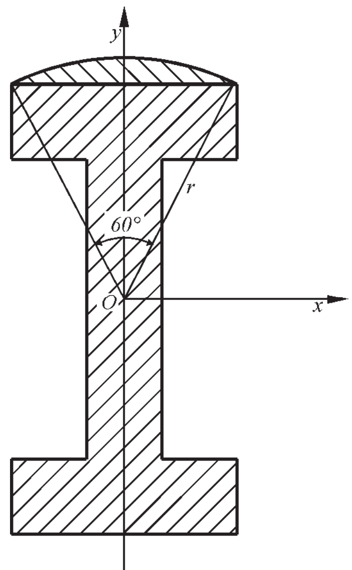
5. *Odrediti položaj težišta površine u odnosu na zadati koordinatni sistem (slika 12) ako je $a = 14cm$, $b = 3cm$, $R = 6cm$, $r = 4cm$.*



Slika 12

Odgovor:

$x_T = 0$, $y_T = 0.522cm$.



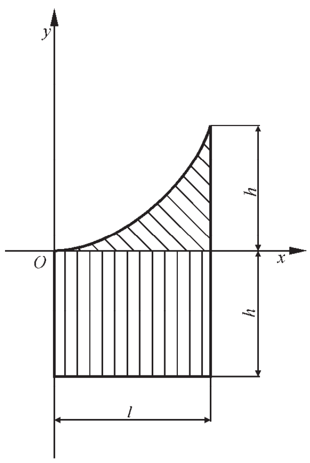
Slika 13

6. *Odrediti položaj težišta površine u odnosu na zadati koordinatni sistem (slika 13) koja se sastoji od segmenta kruga poluprečnika* $r = 10cm$ *i profila (* I *– profil) površine* $40cm^2$. *Centar kruga poklapa se sa centrom profila.*

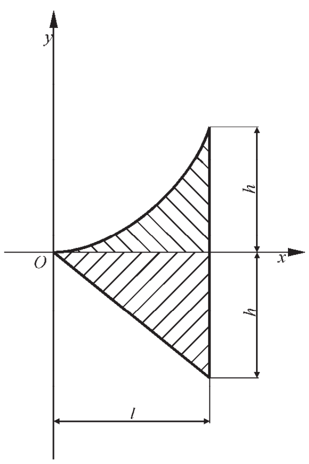
Odgovor:

$x_T = 0$, $y_T = 1.70cm$.

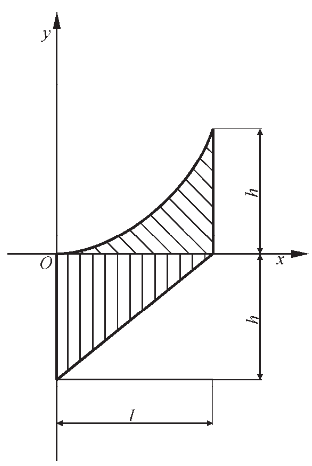
7. *Odrediti položaj težišta sledećih površina (u odnosu na zadati koordinatni sistem) koje su ograničene pravama i kvadratnim parabolama sa temenima u koordinatnom početku (slike 14, 15 i 16).*



Slika 14



Slika 15



Slika 16

Odgovor:

$x_T = 0.5625l$

$y_T = -0.3h$

Odgovor:

$x_T = 0.7l$

$y_T = -0.08h$

Odgovor:

$y_T = -0{,}08h$

$x_T = 0.5l$