
NOSAČI



Uvodna razmatranja



Linijski i okvirni nosači



Postupak za rešavanje zadataka



Zadaci

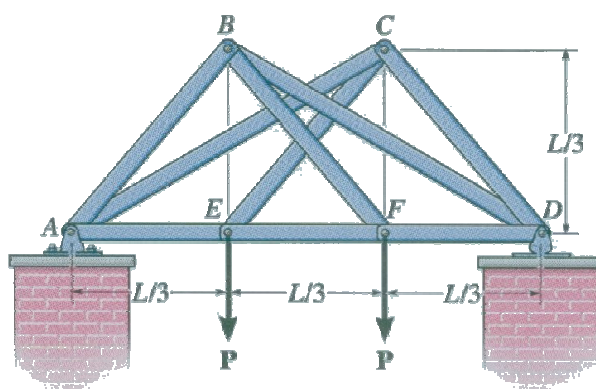
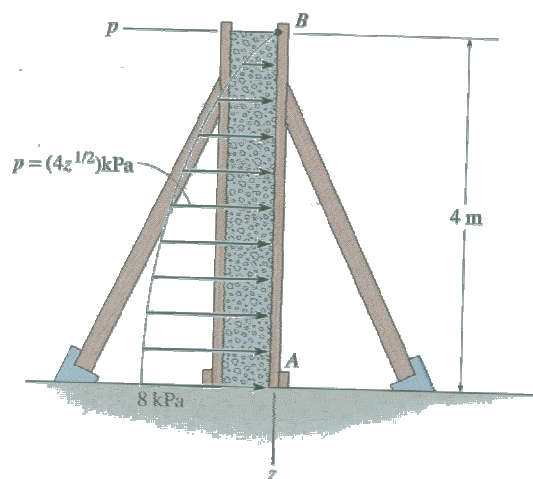
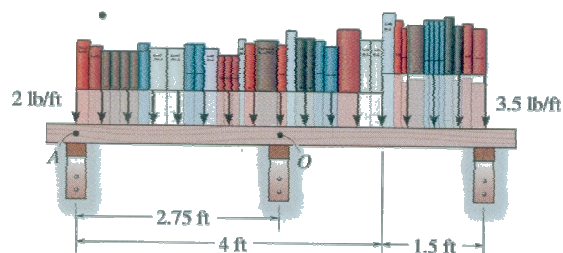


Rešetkasti nosači



Zadaci

Analiza opterećenja nosećih konstrukcija (nosača) pripada važnoj oblasti, u inženjerstvu poznatoj pod imenom strukturalna analiza (jer se analizira svaki presek odgovarajućeg nosača ili svaki element konstrukcije). U noseće konstrukcije mogu se svrstati mnoge vrste kranova, građevinskih mašina, čeličnih mostova, motornih i železničkih vozila itd. U realnim uslovima te su konstrukcije najčešće dinamički opterećene. U ovom poglavlju će, međutim, biti analizirani statički problemi na pojednostavljen način, što će studentima korisnicima ove knjige biti uvod u bavljenje strukturalnom analizom u inženjerskoj praksi.



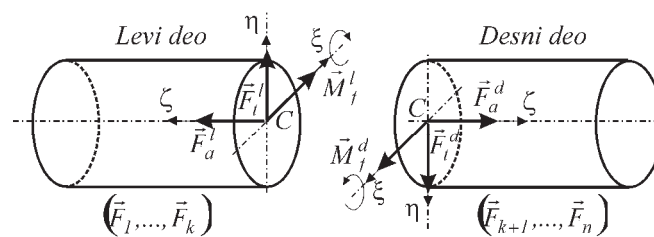
UVODNA RAZMATRANJA

Nosači predstavljaju vezana kruta tela koja nose određene terete. Oni mogu biti *ravni i prostorni*, u zavisnosti od oblika nosača i položaja napadnih linija sila koje deluju na nosač. Takođe, nosači se mogu podeliti na *pune i rešetkaste*. U slučaju da su dimenzije poprečnog preseka mnogo manje od ostalih dimenzija, nosači se nazivaju *linijskim*. Neki od tipova linijskih, ravnih i rešetkastih nosača su: *prosta greda, greda sa prepustima, konzola, okvirni nosač ili ram i rešetkasti nosač ili rešetka*. Grede, ramovi i rešetke sa Gerberovim zgلوبom nazivaju se: *Gerberova greda, Gerberov ram i Gerberova rešetka*.

Osnovni zadaci pri analizi nosača su, najpre *reakcija oslonaca* a zatim određivanje *osnovnih statičkih veličina* u poprečnom preseku nosača. Osnovne statičke veličine određuju se analitički, a zatim se predstavljaju grafički u obliku dijagrama, na osnovu kojih se određuju najveće vrednosti ovih veličina i preseccima u kojima se javljaju, što je od velike važnosti pri dimenzionisanju nosača. Osnovne statičke veličine u poprečnom preseku nosača su: *aksijalna sila, transversalna sila, moment savijanja i moment uvijanja* (određjivanje momenata uvijanja nije predmet ovog kursa).

Pri pisanju analitičkih izraza za osnovne statičke veličine u poprečnom preseku nosača potrebno je pridržavati se opšte prihvaćene konvencije o njihovim znacima (slika 1).

Za ravan linijski nosač izrazi za transversalnu silu, aksijalnu silu i moment savijanja, za levi deo nosača glase:



Slika 1

$$F_{t(c)}^l = \sum_{j=1}^k F_{j\eta} \quad , \quad F_{a(c)}^l = \sum_{j=1}^k F_{j\zeta} \quad , \quad M_{f(c)}^l = \sum_{j=1}^k M_{C\xi}^{\bar{F}_j} \quad (1)$$

Za desni deo nosača navedeni izrazi imaju formu:

$$F_{t(c)}^d = \sum_{j=k+1}^n F_{j\eta} \quad , \quad F_{a(c)}^d = \sum_{j=k+1}^n F_{j\zeta} \quad , \quad M_{f(c)}^d = \sum_{j=k+1}^n F_{j\xi} \quad (2)$$

Diferencijalne veze između osnovnih statičkih veličina u poprečnom preseku nosača glase:

$$\frac{dF_{t(z)}}{dz} = -q(z) \quad , \quad (3)$$

$$\frac{dM_{f(z)}}{dz} = F_{t(z)} \quad , \quad (4)$$

$$\frac{d^2 M_{f(z)}}{dz^2} = -q(z) \quad , \quad (5)$$

gde je $q(z)$ specifično opterećenje. Na osnovu jednačine (3) transversalna sila ima strogi ekstremum u preseku grede u kome specifično opterećenje menja znak tj. gde je $q(z)=0$. Na osnovu jednačine (4) moment savijanja ima strogi ekstremum u preseku u kome transversalna sila menja znak, tj. gde je $F_{t(z)}=0$.

6.1. LINIJSKI I OKVIRNI NOSAČI

Postupak za rešavanje zadataka

1. Usvajanje koordinatnog sistema

Uobičajeno je usvojiti Dekartov pravougli koordinatni sistem desne orijentacije, tako da ose Oz i Oy leže u ravni opterećenja nosača, i da se osa Oz poklapa sa osom nosača.

2. Određivanje reakcija veza

Pored aktivnih sila i spregova sila na mestima gde je nosač vezan uklanjaju se veze i zamenjuju reakcijama veza na osnovu aksiome o vezama. Smerovi sila i momenata sila koji predstavljaju reakcije veze pretpostavljaju se proizvoljno. Primenjujući analitičke uslove ravnoteže za proizvoljan ravan sistem sila i spregova sila sledi:

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Ox}^{\vec{F}_i} = 0, \quad (3)$$

gde su Z_i projekcije svih sila \vec{F}_i koje deluju na nosač na osu Oz , a n broj tih sila, Y_i projekcije svih sila F_i koje deluju na nosač na osu Oy , a $M_{Ox}^{\vec{F}_i}$ projekcije momenata svih sila i spregova sila na osu Ox upravnu na ravan dejstva sila. Pri tome momentna tačka može biti proizvoljno izabrana u ravni opterećenja nosača. Uobičajeno je da to bude mesto veze nosača. Složeni nosači koji imaju za k više od tri reakcije veze (komponenti reakcija veza) moraju imati k Gerberovih zglobova, odnosno isto toliko dodatnih analitičkih uslova ravnoteže da bi bili statički određeni. Dakle, pored jednačina (1), (2) i (3) za svaki od Gerberovih zglobova G_j , gde je $j = 1, 2, \dots, k$, piše se jedan od sledeća dva analitička uslova ravnoteže:

$$\sum_{i=1}^{n'} M_{G_j x}^{\vec{F}_i^{(l)}} = 0, \quad \text{ili} \quad \sum_{i=1}^{n''} M_{G_j x}^{\vec{F}_i^{(d)}} = 0, \quad (4)$$

gde je n' , broj sila i spregova sila sa leve strane, odnosno n'' broj sila i spregova sila desno od Gerberovog zgloba G_j za koji se jednačine (4) pišu. Oznake (l) i (d) ukazuju na to da se u prvom slučaju u (4) sabiraju projekcije momenata svih sila i spregova sila levo, a u drugom slučaju u (4) projekcije momenata svih sila i spregova sila desno od Gerberovog zgloba G_j , na osu $G_j x$. Uбудуće će se uslovi ravnoteže (1), (2), (3) i (4) pisati na sledeći način:

$$\sum Z_i = 0, \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad (6)$$

$$\sum M_{Ox} = 0, \quad (7)$$

$$\sum M_{G_j, x}^l = 0, \quad (8)$$

$$\sum M_{G_j, x}^d = 0 \quad (9)$$

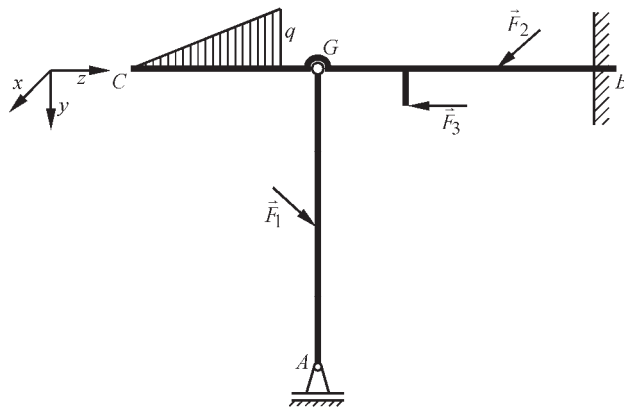
Oznake (l) i (d) treba tretirati uslovno. Naime, svaki Gerberov zglob G_j deli nosač na dva dela. Prva jednačina (4) predstavlja zbir projekcija momenata svih sila i spregova sila sa jedne (leve), odnosno druga jednačina (4) sa druge (desne) strane Gerberovog zgloba, na osu G_j, x . Međutim, kod nosača gde nije moguće podeliti nosač na delove “levo” i “desno” od zgloba G (na primer nosač na slici 1), jednačine (4) glase:

$$\sum M_{Gx}^{AG} = 0, \quad \text{ili} \quad \sum M_{Gx}^{CB} = 0. \quad (10)$$

Rešavanjem algebarskih jednačina (1), (2), (3) i (4) dobijaju se projekcije reakcija veza. Ukoliko se tom prilikom dobije negativna vrednost neke od projekcija reakcija veza, znači da je smer odgovarajuće komponente reakcije veze pogrešno pretpostavljen. U tom slučaju nije neophodno menjati pretpostavljen smer komponente reakcije veza (ucrtan na slici), već je u daljem proračunu uzimati sa negativnim znakom. Kada su izračunate projekcije reakcija veza mogu se izračunati i ukupne reakcije veza.

3. Provera

Kada su određene reakcije veza, potrebno je izvršiti proveru dobijenih brojnih vrednosti. Ona se vrši postavljanjem jednog uslova ravnoteže koji nije korišćen prilikom izračunavanja projekcija reakcija veza. To može biti momentna jednačina za proizvoljno izabranu osu upravnu na ravan nosača koja prolazi kroz bilo koju tačku ravni nosača, sem tačke O . Najbolje je izabrati tačku kroz koju ne prolaze napadne linije reakcija veza, dok kod Gerberovog nosača to može biti jednačina (5), ako je prilikom određivanja reakcija veza upotrebljena jednačina (4) i obratno.

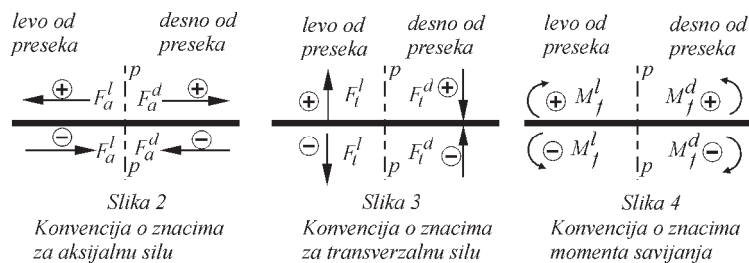


Slika 1 Gerberov nosač

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Aksijalna sila (F_a) u nekom poprečnom preseku $p-p$ nosača jednaka je algebarskom zbiru projekcija svih sila koje dejstvuju levo ili desno od uočenog preseka na

uzdužnu osu nosača Az . *Transverzalna ili poprečna sila* (F_t) u nekom poprečnom preseku $p-p$ nosača jednaka je algebarskom zbiru projekcija svih sila koje dejstvuju na nosač, levo ili desno od uočenog preseka, na osu Ay upravnu na uzdužnu osu nosača Az . *Napadni moment, ili moment savijanja (fleksije - M_f)*, u nekom poprečnom preseku $p-p$ nosača jednak je algebarskom zbiru momenata svih sila koje dejstvuju na nosač levo ili desno od uočenog preseka, a za osu Cx koja prolazi kroz težište C tog preseka. Kako su F_a , F_t i M_f sa obe strane uočenog preseka istih intenziteta samo suprotnih smerova, da bi se grafički mogli prikazivati duž celog nosača, potrebno je pridržavati se konvencije o znacima. Grafički prikaz ovog dogovora dat je za F_a na slici 2, za F_t na slici 3 i za M_f na slici 4 u odnosu na proizvoljan poprečni presek $p-p$ nosača.



Funkcije koje opisuju promene vrednosti sila i momenata savijanja potrebno je odrediti na svakom delu nosača. Svaki nosač sastoji se od više delova (polja) oivičenih poprečnim presecima nosača u kojima postoji promena vrste ili oblika opterećenja. Unutar ovih polja izrazi koji opisuju funkcije sila i momenata savijanja se ne menjaju. Moguće je polja nosača tretirati ili kao odsečke na jedinstvenoj osi Oz , ili za svako od polja uvesti ose $O_i z_i$ koje se poklapaju sa pravcem ose Oz , a počeci O_i se nalaze u jednom od krajnjih preseka i -tog polja. Ove ose su usmerene s leva u desno ako se funkcije sila i momenata savijanja u posmatranom preseku $p-p$, dobijaju uzimajući u obzir opterećenje nosača sa leve strane od preseka i obratno.

5. Crtanje dijagrama aksijalnih sila F_a , transverzalnih sila F_t i momenata savijanja M_f .

Kada su određene funkcije $F_a = F_a(z_i)$, $F_t = F_t(z_i)$ i $M_f = M_f(z_i)$ koje opisuju aksijalnu i transverzalnu silu i moment savijanja u svim poljima nosača, moguće je pristupiti crtanju dijagrama. Sva tri dijagrama crtaju se ispod prostog nosača ili ako je u pitanju okvirni nosač tada se dijagrami crtaju za svaki deo nosača, obilazeći ga deo po deo sa iste (unutrašnje ili spoljašnje) strane.

Pozitivne vrednosti aksijalnih i transverzalnih sila u presecima nosača ucrtavaju se iznad nultih linija za te sile, a negativne ispod. Kod dijagrama momenata je obrnuto iz praktičnih razloga. Takav izgled ovog dijagrama ukazuje na to kako bi se nosač deformisao da nije apsolutno krut kakvim se u statici tretira.

ZADACI

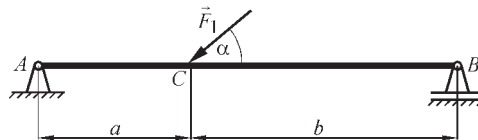
U zadacima u kojima su zadate brojne vrednosti sila i momenata koji opterećuju nosače jedinice mere za vrednosti na dijagramima su: 1 kN za aksijalne i transferzalne sile, 1 kNm za momente savijanja, i 1 m za dužine.

Linijski nosači

Prosta greda

U zadacima od 1 do 8 biće pokazano odeđivanje reakcija veza i crtanje statičkih dijagrama aksijalne, transverzalne sile i momenta savijanja duž nosača.

1. Prosta greda opterećena koncentrisanom silom intenziteta $F_1 = \frac{F}{\sin \alpha}$



Slika1 Prosta greda opterećena koncentrisanom silom

Rešenje

1. Usvajanje koordinatnog sistema

Usvojeni koordinatni sistem prikazan je na slici 1.1.

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 1.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - F \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + F - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow Y_B \cdot (a+b) - F \cdot a = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem ovog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Y_A = \frac{b}{a+b} \cdot F, \quad Z_A = F \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad Y_B = \frac{a}{a+b} \cdot F. \quad (4)$$

Reakcije veza određene su analitički na sledeći način**:

$$\vec{R}_A = -Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}, \quad \vec{R}_B = -Y_B \vec{j}.$$

3. Provera:

$$\sum M_{Cx} = -Y_A \cdot a + Y_B \cdot b \equiv 0, \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transversalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

U ovom primeru karakteristična su dva dela nosača (dva polja): AC i CB (slika 1.1)

Osnovne statičke veličine u preseku $I-I$, date su u funkciji koordinate z i z_1 koje se u ovom slučaju poklapaju.

$$F_a^I = -Z_A = -F \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad (0 < z < a, \text{ ili } 0 < z_1 < a)$$

$$F_t^I = Y_A = \frac{b}{a+b} \cdot F, \quad (0 < z < a, \text{ ili } 0 < z_1 < a)$$

$$M_f^I = Y_A \cdot z_1 = \frac{b}{a+b} \cdot F \cdot z_1. \quad (0 \leq z \leq a, \text{ ili } 0 \leq z_1 \leq a)$$

Osnovne statičke veličine u preseku 2-2 date su na tri različita načina:

Prvi način odnosi se na određivanje osnovnih statičkih veličina u funkciji od koordinate z :

$$F_a^I = -Z_A + F_1 \cdot \cos \alpha = -F \cdot \operatorname{ctg} \alpha + F \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad (a < z \leq a+b)$$

$$F_t^I = Y_A - F_1 \cdot \sin \alpha = \frac{b}{a+b} \cdot F - F = -\frac{a}{a+b} \cdot F, \quad (a < z < a+b)$$

$$M_f^I = Y_A \cdot z - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (z-a) = a \cdot F - \frac{a}{a+b} \cdot F \cdot z. \quad (a \leq z \leq a+b)$$

Drugi način odnosi se na određivanje osnovnih statičkih veličina u funkciji koordinate z_2 :

$$F_a^I = -Z_A + F_1 \cdot \cos \alpha = 0, \quad (0 < z_2 \leq b)$$

$$F_t^I = +Y_A - F_1 \sin \alpha = -\frac{a}{a+b} \cdot F, \quad (0 < z_2 < b)$$

$$M_f^I = Y_A \cdot (a+z_2) - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot z_2 = \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot F - \frac{a}{a+b} \cdot F \cdot z_2. \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

Treći način odnosi se na određivanje osnovnih statičkih veličina u funkciji koordinate z_3 :

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_3 < b)$$

$$F_t^d = -Y_B = -\frac{a}{a+b} \cdot F, \quad (0 < z_3 < b)$$

$$M_f^d = Y_B \cdot z_3 = \frac{a}{a+b} \cdot F \cdot z_3. \quad (0 \leq z_3 \leq b)$$

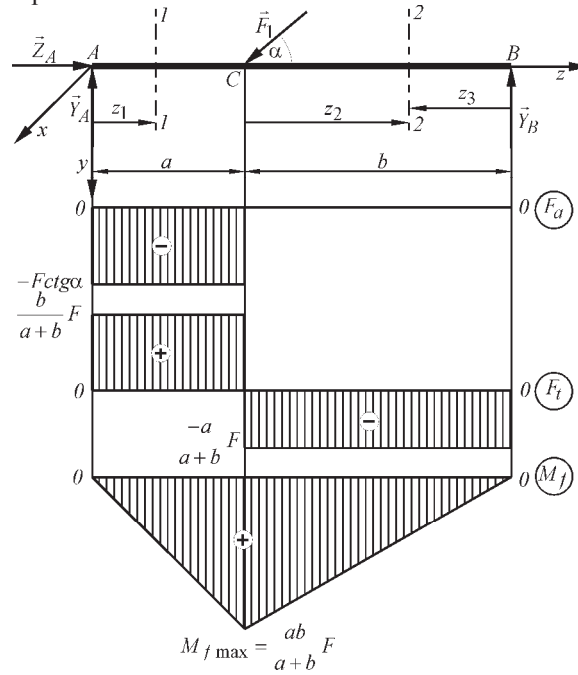
** Kako za crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina nije neophodno reakcije veza izražavati u vektorskom obliku, u narednim primerima reakcije veza će biti određene svojim projekcijama na odgovarajuće koordinatne ose.

* Indeks l ili d u gornjem desnom uglu označava da se za određeni presek sile ili momenti savijanja izračunavaju uzimajući u obzir opterećenja levo ili desno od preseka, respektivno.

U narednim slučajevima zadaci će biti rešavani tako što će za svako polje biti usvojeno z na samo jedan od prethodno navedenih načina.

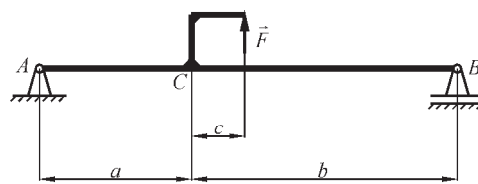
5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina

Na osnovu izračunatih vrednosti funkcija $F_a(z)$, $F_t(z)$, $M_f(z)$, po poljima, pristupa se crtanju dijagrama prikazanih na slici 1.1.



Slika 1.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

2. Prosta greda dužine $a+b=l$ opterećena poprečnom ekscentričnom silom \vec{F} .



Slika 2

Prosta greda opterećena poprečnom ekscentričnom silom

Rešenje

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 2.3)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji deluje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 2.3 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A - F - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow F \cdot (a+c) + Y_B \cdot (a+b) = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

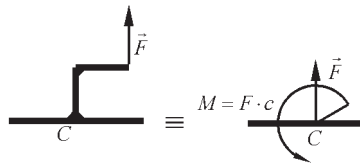
$$Y_A = -F \cdot \frac{-c+b}{a+b}, \quad Z_A = 0, \quad Y_B = -F \cdot \frac{a+c}{a+b}. \quad (4)$$

Negativne vrednosti projekcija Y_A i Y_B ukazuju na pogrešno pretpostavljene smerove komponenti odgovarajućih reakcija.

3. Provera:

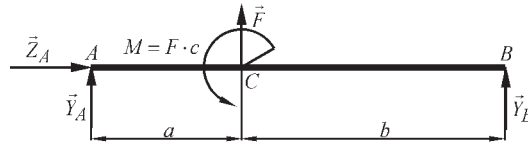
$$\sum M_{Cx} = -Y_A \cdot a + F \cdot c + Y_B \cdot b \equiv 0. \quad (5)$$

Koristeći teorem o paralelnom prenošenju sile, sila \vec{F} sa slike 2, može se redukovati na tačku C kao sila \vec{F} i spreg sila momenta $M = F \cdot c$, smer kao na slici 2.1.



Slika 2.1 Ekvivalentna opterećenja nosača

Tada je opterećenje grede, sa slike 2, moguće prikazati kao na slici 2.2.



Slika 2.2 Opterećenje grede ekvivalentno prikazanom na slici 2

Tako je jednačinu (3) prilikom izračunavanja projekcija reakcija veza (slika 2.2) moguće napisati u obliku:

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow M + F \cdot a + Y_B \cdot (a+b) = 0, \quad (6)$$

što je ekvivalentno sa jednačinom (3).

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim presecima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = 0, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t^I = Y_A = -F \cdot \frac{b-c}{l}, \quad (0 < z_1 < a)$$

$$M_f^l = Y_A \cdot z_1 = -F \cdot \frac{b-c}{l} \cdot z_1. \quad (0 \leq z_1 < a)$$

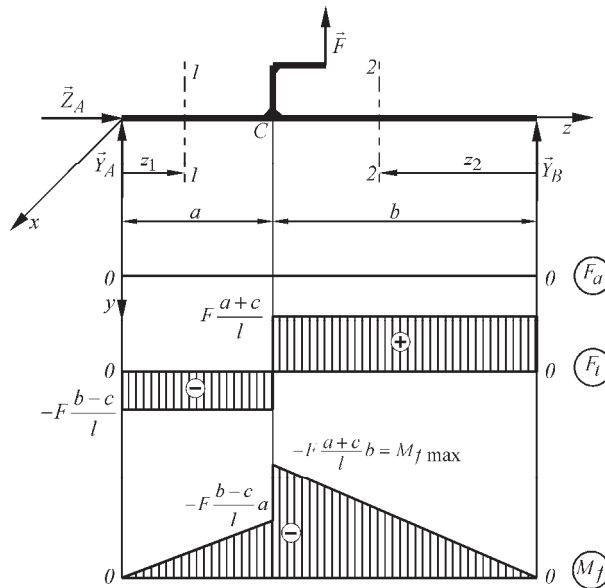
Presek 2-2

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

$$F_t^d = -Y_B = F \cdot \frac{a+c}{l}, \quad (0 < z_2 < b)$$

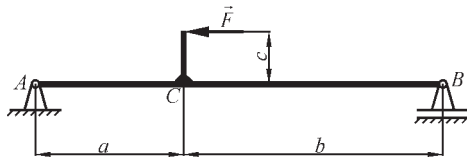
$$M_f^d = Y_B \cdot z_2 = -F \cdot \frac{a+c}{l} \cdot z_2. \quad (0 \leq z_2 < b)$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 2.3 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

3. Prosta greda dužine $l = a + b$ opterećena podužnom ekscentričnom silom \vec{F} .



Slika 3

Prosta greda opterećena podužnom ekscentričnom silom

Rešenje

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 3.3)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 3.3 su:

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A - Y_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - F = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow F \cdot c + Y_B \cdot l = 0. \quad (3)$$

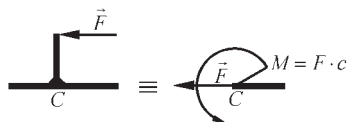
Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Z_A = F, \quad Y_A = -Y_B = F \cdot \frac{c}{l}, \quad Y_B = -F \cdot \frac{c}{l} \quad (\text{pog. pret. smer}) \quad (4)$$

3. Provera:

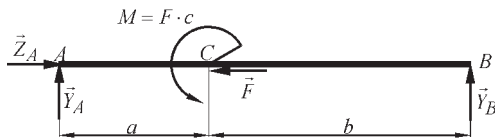
$$\sum M_{Cx} = Y_B \cdot b + F \cdot c - Y_A \cdot a \equiv 0. \quad (5)$$

Kao i u prethodnom primeru, sila \vec{F} (slika 3) može se redukovati na tačku C kao sila \vec{F} i spreg sila momenta $M = F \cdot c$, smeru kao na slici 3.1.



Slika 3.1 Ekvivalentna opterećenja nosača

Tada je opterećenje grede sa slike 3 moguće prikazati kao na slici 3.2.



Slika 3.2 Opterećenje grede ekvivalentno opterećenju prikazanom na slici 3

Tako je jednačinu (3) prilikom određivanja projekcija reakcija veza (slika 3.2) moguće napisati u obliku:

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow M + Y_B \cdot l = 0, \quad (6)$$

što je ekvivalentno jednačini (3).

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1

$$F_a^l = -Z_A = -F, \quad (0 < z_1 < a)$$

$$F_t^l = Y_A = F \cdot \frac{c}{l}, \quad (0 < z_1 \leq a)$$

$$M_f^l = Y_A \cdot z_1 = F \cdot \frac{c}{l} \cdot z_1. \quad (0 \leq z_1 < a)$$

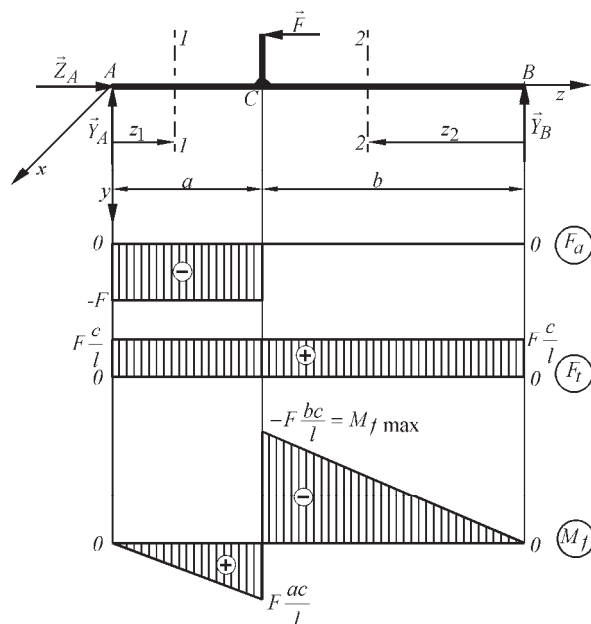
Presek 2-2

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_2 < b)$$

$$F_t^d = -Y_B = F \cdot \frac{c}{l}, \quad (0 < z_2 \leq b)$$

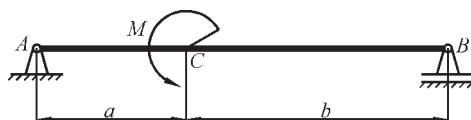
$$M_f^d = Y_B \cdot z_2 = -F \cdot \frac{c}{l} \cdot z_2. \quad (0 \leq z_2 < b)$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 3.3 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

4. Prosta greda dužine $l = a + b$ opterećena spregom sila momenta M (slika 4).



Slika 4 Prosta greda opterećena spregom sila momenta M

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 4.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 4.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow M + Y_B \cdot l = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Z_A = 0, \quad Y_A = -Y_B = \frac{M}{l}, \quad Y_B = -\frac{M}{l} \text{ (pog. pretp. smer).} \quad (4)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Cx} = -Y_A \cdot a + Y_B \cdot b + M \equiv 0. \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim presecima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = -Z_A = 0, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t^I = Y_A = \frac{M}{l}, \quad (0 < z_1 \leq a)$$

$$M_f^I = Y_A \cdot z_1 = \frac{M}{l} \cdot z_1. \quad (0 \leq z_1 < a)$$

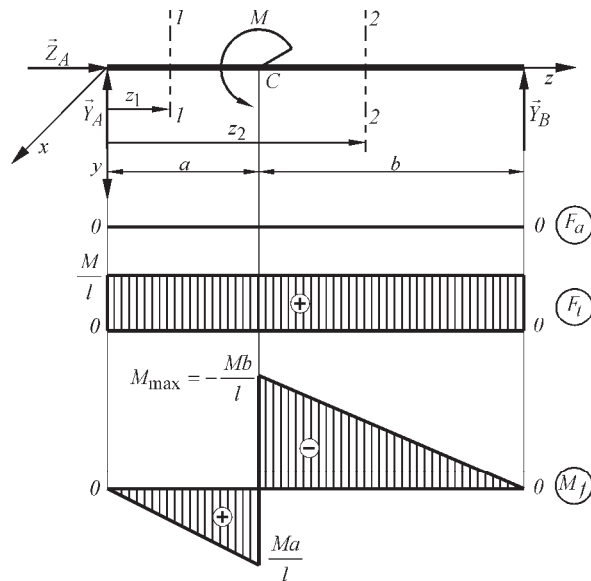
Presek 2-2

$$F_a^I = -Z_A = 0, \quad (a \leq z_2 \leq l)$$

$$F_t^I = Y_A = \frac{M}{l}, \quad (a \leq z_2 < l)$$

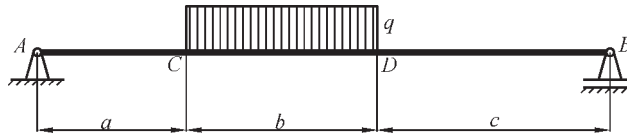
$$M_f^I = Y_A \cdot z_2 - M = \frac{M}{l} \cdot z_2 - M. \quad (a < z_2 \leq l)$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 4.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

5. Prosta greda dužine $l = a + b + c$ opterećena jednoliko podeljenim (pravougaonim) kontinualnim opterećenjem (specifično opterećenje je $q(z) = \text{const.}$).



Slika 5 Prosta greda opterećena pravougaonim kontinualnim opterećenjem

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 5.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Koncentrisana sila ekvivalentna skupu kontinualno podeljenih sila ima intenzitet $F_q = q \cdot b$, usmerena je od opterećenja ka nosaču i polovi raspon kontinualnog opterećenja.

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji deluje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 5.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + qb - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -qb \left(a + \frac{b}{2} \right) + Y_B \cdot l = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Y_A = \frac{qb\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l}, \quad Z_A = 0, \quad Y_B = \frac{qb\left(\frac{b}{2} + a\right)}{l}. \quad (4)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Cx} = Y_B(b+c) - F_q \cdot \frac{b}{2} - Y_A \cdot a \equiv 0. \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = -Z_A = 0, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t^I = Y_A = \frac{q \cdot b\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l}, \quad (0 < z_1 \leq a)$$

$$M_f^I = Y_A z_1 = \frac{q \cdot b\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l} \cdot z_1. \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

Presek 2-2

$$F_a^I = -Z_A = 0, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

$$F_t^I = Y_A - qz_2 = \frac{q \cdot b\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l} - qz_2, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

$$M_f^I = Y_A(a+z_2) - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} = \frac{q \cdot a \cdot b\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l} + \frac{q \cdot b\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l} \cdot z_2 - \frac{q}{2} z_2^2, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

U slučaju jednoliko (ravnomerno) podeljenog opterećenja transverzalna sila F_t je linearna funkcija podužne koordinate (u ovom slučaju koordinate z_2). Ona ima jednu nulu koja se u ovom slučaju nalazi u posmatranom intervalu ($0 \leq z_2 \leq b$):

$$F_t = 0 \text{ za } z_0 = \frac{b\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l}.$$

Nule (jedna ili više) transverzalne sile određuju lokalne ekstremume (jedan ili više) momenta savijanja. U slučaju da su nule transverzalne sile van posmatranog intervala, i ekstremumi momenta savijanja su van tog intervala. U ovom slučaju moment savijanja ima lokalni maksimum u preseku određenom koordinatom z_0 :

$$M_{f \max} = M_f(z_0) = \frac{qab\left(\frac{b}{2} + c\right)}{l} + \frac{qb^2\left(\frac{b}{2} + c\right)^2}{2l^2}.$$

U narednim zadacima sa z_0 biće označavani preseći u kojima je vrednost transverzalne sile jednaka nuli ako su ti preseći unutar posmatranog intervala.

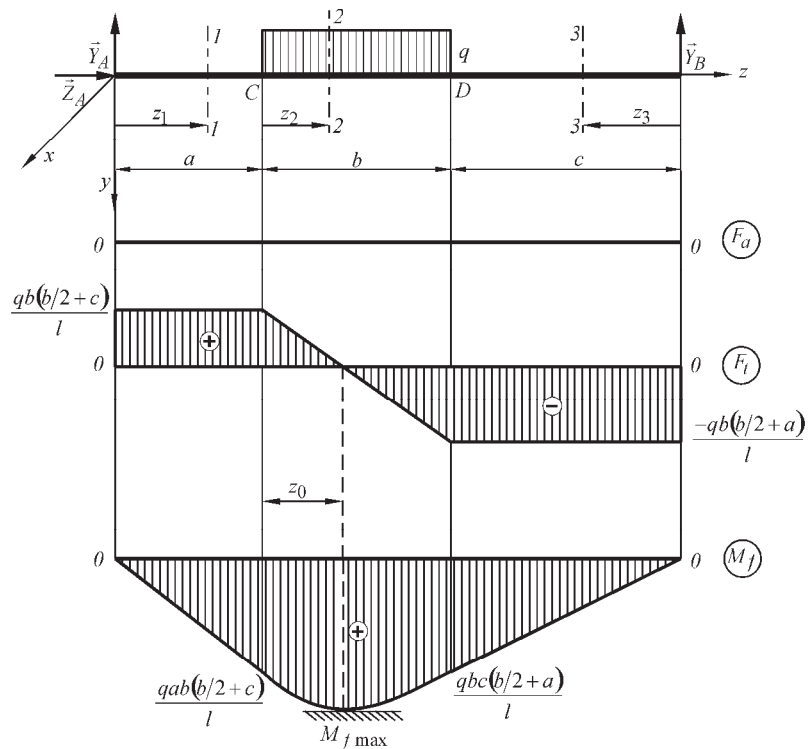
Presek 3-3

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_3 \leq c)$$

$$F_t^d = -Y_B = -\frac{q \cdot b \left(a + \frac{b}{2} \right)}{l}, \quad (0 < z_3 \leq c)$$

$$M_f^d = Y_B \cdot z_3 = \frac{q \cdot b \left(a + \frac{b}{2} \right)}{l} z_3. \quad (0 \leq z_3 \leq c)$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 5.1 Dijagram osnovnih statičkih veličina

6. Prosta greda dužine $l=a+b$ opterećena linearno podeljenim (trouglastim kontinualnim opterećenjem).

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 6.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Koncentrisana sila koja je ekvivalentna sistemu kontinualno podeljenih sila ima intenzitet $F_q = bq/2$, usmerena je od opterećenja ka nosaču, a njena napadna linija deli raspon kontinualnog opterećenja u odnosu 2:1 gledajući s leva (u ovom slučaju). Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza su (slika 6.1):

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + \frac{1}{2}bq - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}bq\left(a + \frac{2}{3}b\right) + Y_B l = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem ovog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Z_A = 0, \quad Y_A = \frac{qb^2}{6l}, \quad Y_B = \frac{qb(3a+2b)}{6l}. \quad (4)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Cx} = Y_B \cdot b - F_q \cdot \frac{2}{3}b - Y_A \cdot a \equiv 0. \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim presecima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = 0, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t^I = Y_A = \frac{b^2 q}{6l}, \quad (0 < z_1 \leq a)$$

$$M_f^I = Y_A \cdot z_1 = \frac{b^2 q}{6l} z_1, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

Presek 2-2

Kako je u ovom polju nosač opterećen linearno podeljenim kontinualnim opterećenjem potrebno je izraziti vrednost specifičnog opterećenja q_{z_2} (slika 6.1) u funkciji od podužne koordinate z_2 . Iz sličnosti trouglova CDE i CBH sledi

$$\frac{q_{z_2}}{q} = \frac{z_2}{b}, \text{ odakle se dobija } q_{z_2} = \frac{q}{b} z_2.$$



Slika 6 Prosta greda opterećena trouglastim kontinualnim opterećenjem

$$F_a^l = 0, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

$$F_t^l = Y_A - \frac{1}{2} q z_2 = Y_A - \frac{1}{2} \frac{q}{b} z_2^2 = \frac{b^2 q}{6l} - \frac{q}{2b} z_2^2, \quad (0 \leq z_2 < b)$$

$$M_f^l = Y_A(a + z_2) - \frac{1}{2} q z_2 z_2 \frac{1}{3} z_2 = Y_A(a + z_2) - \frac{1}{6} \frac{q}{b} z_2^3 = \frac{ab^2 q}{6l} + \frac{b^2 q}{6l} z_2 - \frac{1}{6} \frac{q}{b} z_2^3. \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

U slučaju linearno podeljenog opterećenja transverzalna sila je kvadratna funkcija podužne koordinate i može imati nijednu ili jednu ili dve realne nule. U ovom slučaju funkcija za transverzalnu silu ima dve realne nule i to:

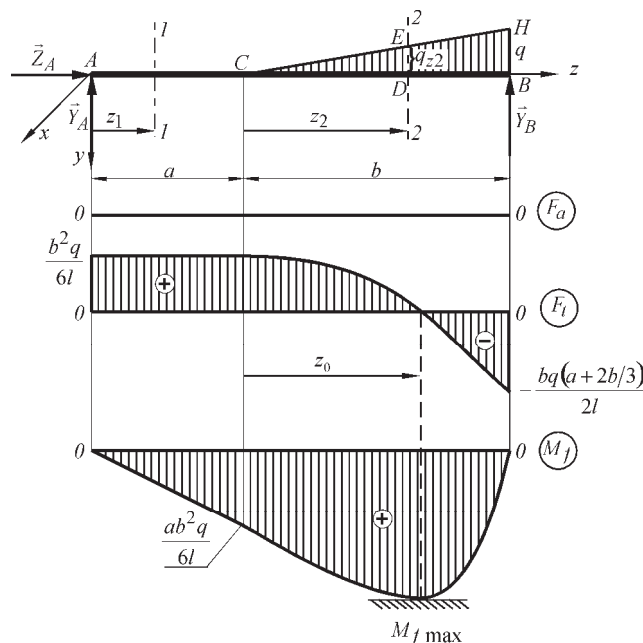
$$F_t = 0 \text{ za } z_0 = b\sqrt{\frac{b}{3l}} \text{ i } z_{(1)} = -b\sqrt{\frac{b}{3l}}.$$

Vrednost $z_{(1)}$ ne pripada posmatranom intervalu 2-2 ($0 \leq z_2 < b$), pa se ne razmatra. U narednim zadacima biće određene samo nule koje pripadaju odgovarajućem intervalu. U preseku određenom koordinatom $z_2 = z_0$ moment savijanja ima lokalni maksimum

$$M_{f \max} = M_f(z_0) = \frac{ab^2 q}{6l} + \frac{b^2 q}{6l} b\sqrt{\frac{b}{3l}} - \frac{1}{6} \frac{q}{b} \frac{b^4}{3l} \sqrt{\frac{b}{3l}} = \frac{b^2 q}{6l} \left(a + \frac{2b}{3} \sqrt{\frac{b}{3l}} \right).$$

Moment savijanja je kubna funkcija podužne koordinate u slučaju linearno podeljenog opterećenja.

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 6.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

7. Prosta greda dužine $l=a+b$ opterećena linearno podeljenim (trouglastim kontinualnim) opterećenjem.



Slika 7 Prosta greda opterećena trouglastim kontinualnim opterećenjem

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 7.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 7.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + \frac{1}{2}qa - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}qa \cdot \frac{1}{3}a + Y_B l = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem ovog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Z_A = 0, \quad Y_A = \frac{qa(3b+2a)}{6l}, \quad Y_B = \frac{qa^2}{6l}. \quad (4)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Cx} = Y_B \cdot b + F_q \cdot \frac{2}{3}a - Y_A \cdot a \equiv 0. \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momenate savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1 $\left(\frac{q_{z_1}}{z_1} = \frac{q}{a} \Rightarrow q_{z_1} = \frac{q}{a} \cdot z_1 \right)$

$$F_a^I = -Z_A = 0, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t^I = Y_A - \frac{1}{2}q_{z_1} \cdot z_1 - (q - q_{z_1}) \cdot z_1 = \frac{1}{2} \frac{q}{a} z_1^2 - qz_1 + \frac{qa(2a+3b)}{6l}, \quad (0 < z_1 \leq a)$$

$$M_f^I = Y_A z_1 - \frac{1}{2}q_{z_1} \cdot z_1 \cdot \frac{2}{3}z_1 - (q - q_{z_1}) \cdot \frac{z_1^2}{2} = \frac{q}{6a} z_1^3 - \frac{q}{2} z_1^2 + \frac{qa(2a+3b)}{6l} z_1, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t = 0 \text{ za } z_0 = a - \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3l}(2a+3b)} = a - a\sqrt{\frac{a}{3l}},$$

$$M_{f \max} = M_f(z_0) = \frac{qa^2b}{6l} + \frac{qa^3}{9l} \sqrt{\frac{a}{3l}}.$$

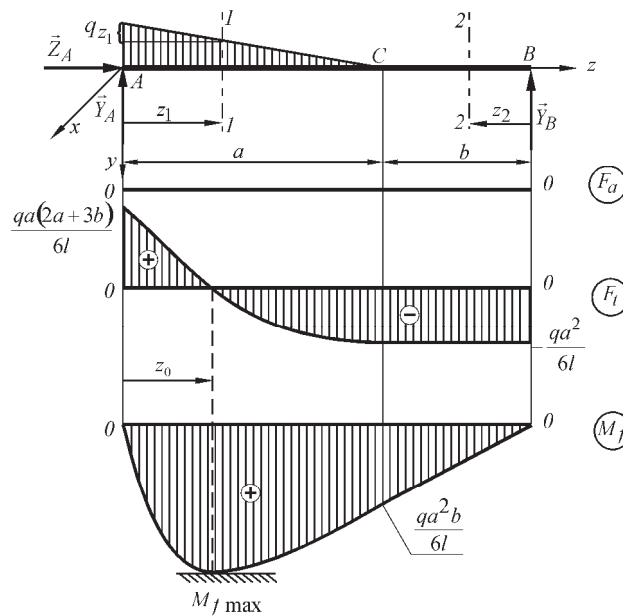
Presek 2-2

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

$$F_t^d = -Y_B = -\frac{qa^2}{6l}, \quad (0 < z_2 \leq b)$$

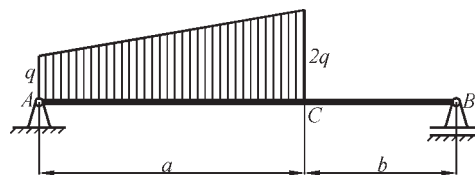
$$M_f^d = Y_B z_2 = \frac{qa^2}{6l} z_2. \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 7.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

8. Prosta greda dužine $l=a+b$ opterećena linearno podeljenim (trapeznim kontinualnim) opterećenjem



Slika 8 Prosta greda opterećena trapeznim opterećenjem

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 8.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Intenzitet sile kojom trapezno kontinualno opterećenje deluje na nosač je

$$F_q = \frac{1}{2}(2q - q)a + qa = \frac{3}{2}qa.$$

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 8.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + \frac{3}{2}qa - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -qa \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2}qa \cdot \frac{2}{3}a + Y_B \cdot l = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem ovog sistema algebraskih jednačina dobijaju se sledeće vrednosti projekcija reakcija veza:

$$Z_A = 0, \quad Y_A = qa \frac{(4a + 9b)}{6l}, \quad Y_B = \frac{5}{6} \frac{qa^2}{l}. \quad (4)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Cx} = -Y_A \cdot a + \frac{2qa^2}{3} + Y_B \cdot b \equiv 0. \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1 $\left(\frac{qz_1}{z_1} = \frac{q}{a} \Rightarrow q_{z_1} = \frac{q}{a} z_1 \right),$

$$F_a^I = 0, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t^I = Y_A - q \cdot z_1 - \frac{1}{2} q_{z_1} \cdot z_1 = \frac{qa(4a + 9b)}{6l} - q \cdot z_1 - \frac{q}{2a} z_1^2, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$M_f^I = Y_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} q_{z_1} \cdot \frac{1}{3} z_1^2 = \frac{qa(4a + 9b)}{6l} z_1 - \frac{q}{2} z_1^2 - \frac{q}{6a} z_1^3, \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$F_t = 0 \text{ za } z_0 = -a + a \sqrt{\frac{7a^3 + 12a^2b}{3l}} \text{ i } M_{f \max} = M_f(z_0).$$

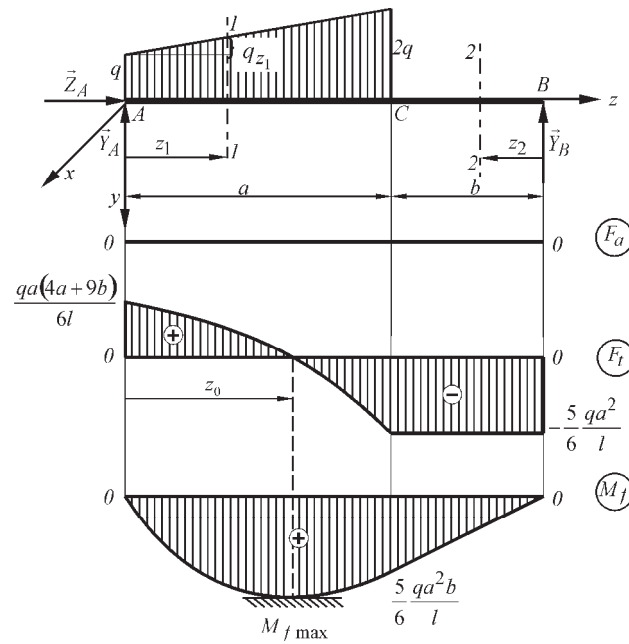
Presek 2-2

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

$$F_t^d = -Y_B = -\frac{5}{6} \frac{qa^2}{l}, \quad (0 < z_2 \leq b)$$

$$M_f^d = Y_B \cdot z_2 = \frac{5}{6} \frac{qa^2}{l} z_2 \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

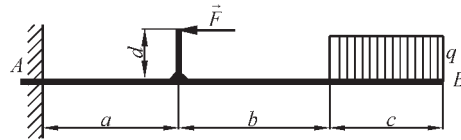
5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 8.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

Konzola

9. Za konzolu prikazanu na slici 9 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je $F = qc$, gde je q specifično opterećenje.



Slika 9 Konzola

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (sl. 9.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veze

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 9.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - F = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + qc = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow M_A + F \cdot d - qc \left(a + b + \frac{c}{2} \right) = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina slede projekcije reakcija veza

$$Z_A = F, \quad Y_A = qc = F, \quad M_A = F \left(a + b + \frac{c}{2} - d \right). \quad (4)$$

3. Provera

$$\sum M_{Bx} = -Y_A \cdot (a + b + c) + M_A + F \cdot d + q \cdot c \cdot \frac{c}{2} \equiv 0. \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transversalne sile F_t i momenat savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = -Z_A = -F, \quad (0 < z_1 < a)$$

$$F_t^I = Y_A = F, \quad (0 < z_1 \leq a)$$

$$M_f^I = -M_A + Y_A z_1 = -F \left(a + b + \frac{c}{2} - d \right) + F z_1, \quad (0 < z_1 < a)$$

Presek 2-2

$$F_a^I = -Z_A + F = 0, \quad (0 < z_2 \leq b)$$

$$F_t^I = Y_A = F, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

$$M_f^I = -M_A + Y_A(a + z_2) - Fd = -F\left(b + \frac{c}{2}\right) + F \cdot z_2. \quad (0 < z_2 \leq b)$$

Presek 3-3

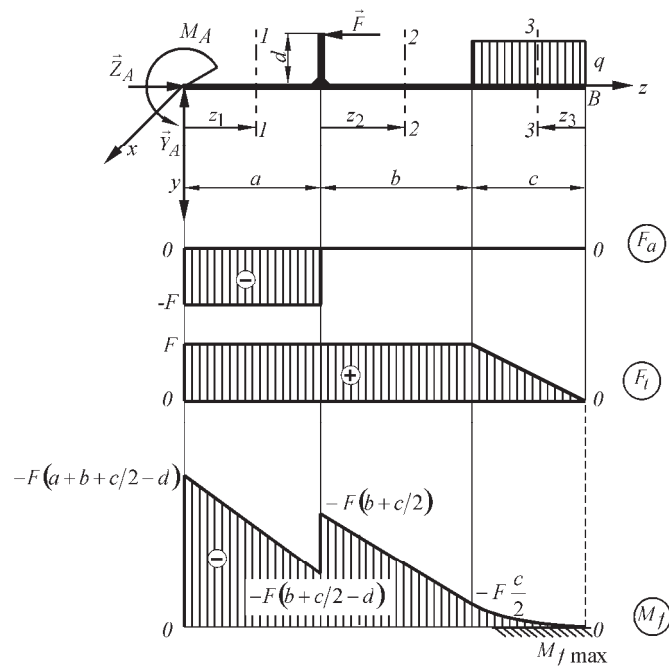
$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_3 \leq c)$$

$$F_t^d = q \cdot z_3, \quad (0 \leq z_3 \leq c)$$

$$M_f^d = -q \frac{z_3^2}{2}, \quad (0 \leq z_3 \leq c)$$

$$M_{f \max} = 0.$$

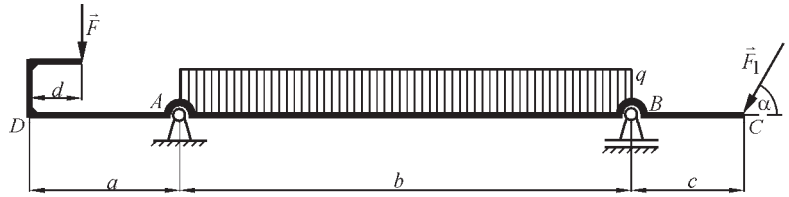
5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 9.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

Greda sa dva prepusta

10. Za nosač opterećen kao na slici 10 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je $F = qb$, $F_1 = \frac{F}{\sin \alpha}$, $b = 2a$, $c = a$, $d = \frac{a}{2}$.



Slika 10 Greda sa dva prepusta

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (sl.10.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 10.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - F \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F - Y_A + qb - Y_B + F = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Bx} = 0 \Rightarrow F(a + b - d) - Y_A \cdot b + qb \cdot \frac{b}{2} - F \cdot c = 0. \quad (3)$$

Iz prethodnog sistema algebarskih jednačina sledi:

$$Z_A = F \operatorname{ctg} \alpha, \quad Y_A = F \frac{(2a + 3b - 2c - 2d)}{2b} = \frac{5}{4} F,$$

$$Y_B = F \frac{-2a + 3b + 2c + 2d}{2b} = \frac{7}{4} F. \quad (4)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Cx} = -Y_B \cdot c + F_q \left(c + \frac{b}{2} \right) - Y_A (b + c) - F \cdot d + F(a + b + c) \equiv 0, \quad (5)$$

gde je $F_q = qb = F$.

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = 0, \quad (0 \leq z_1 < a)$$

$$F_t^I = -F, \quad (0 < z_1 < a)$$

$$M_f^l = F \cdot d - F \cdot z_1. \quad (0 < z_1 \leq a)$$

Presek 2-2

$$F_a^l = -Z_A = -F \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad (0 < z_2 \leq b)$$

$$F_t^l = -F + Y_A - qz_2 = F \frac{1}{4} - qz_2, \quad (0 < z_2 < b)$$

$$M_f^l = -F(a - d + z_2) + Y_A z_2 - q \frac{z_2^2}{2} = -F \frac{a}{2} + F \frac{1}{4} z_2 - q \frac{z_2^2}{2}, \quad (0 \leq z_2 \leq b)$$

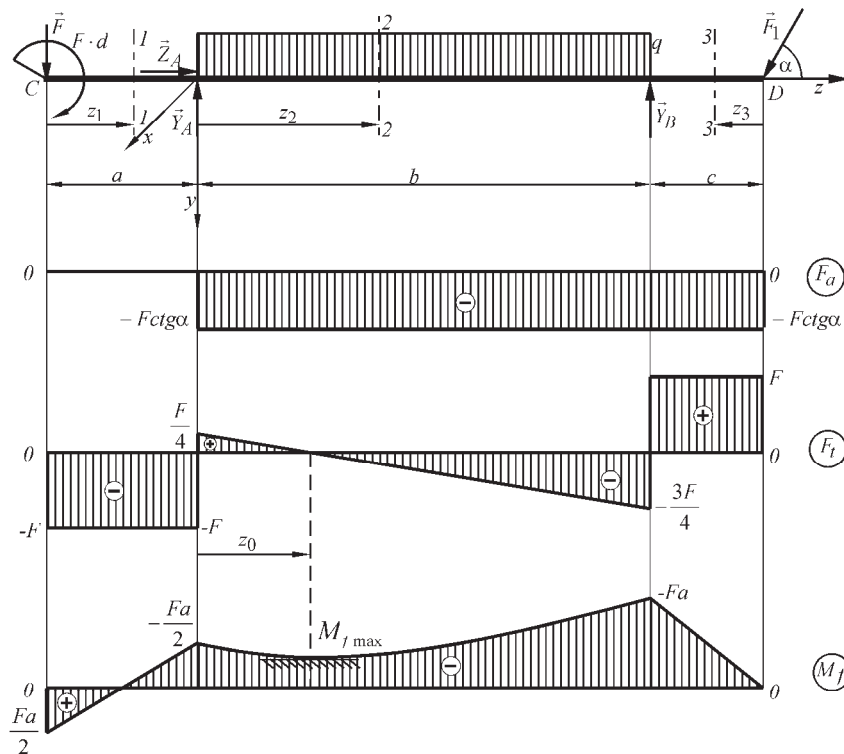
$$F_t = 0 \text{ za } z_0 = \frac{a}{2} \Rightarrow M_{f \max} = M_f(z_0) = -\frac{7}{16} Fa.$$

Presek 3-3

$$F_a^d = -F \operatorname{ctg} \alpha, \quad (0 < z_3 \leq c)$$

$$F_t^d = F, \quad (0 < z_3 < c)$$

$$M_f^d = -F \cdot z_3. \quad (0 \leq z_3 \leq c)$$

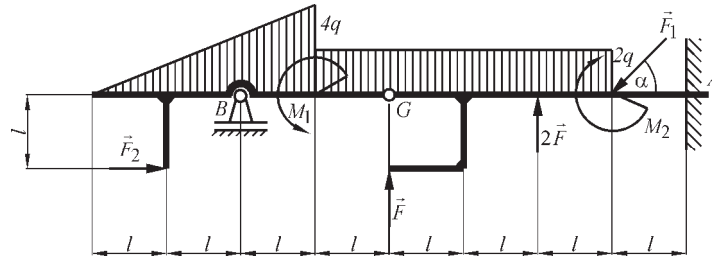
5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina

Slika 10.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

Gerberov linijski nosač

11. Za Gerberov nosač opterećen prema slici 11 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame ako je

$$M_1 = Fl, \quad M_2 = 2Fl, \quad F = ql, \quad F_1 = F\sqrt{2} \quad \text{i} \quad F_2 = 2F.$$



Slika 11 Gerberov linijski nosač

Rešenje

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 11.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Intenziteti sila trougaonog i pravougaonog kontinualnog opterećenja su:

$$F_{q1} = \frac{1}{2} 3l4q = 6ql \quad \text{i} \quad F_{q2} = 8ql, \quad \text{respektivno.}$$

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 11.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow 2F - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_B + F_{q1} + F_{q2} - F - 2F + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - Y_A = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow 2Fl + (F_{q1} - Y_B)6l + M_1 - 4Fl - 4Fl + F_{q2}3l - M_2 + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}l - M_A = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Gx}^I = 0 \Rightarrow 2Fl + (F_{q1} - Y_B)2l + M_1 + 2ql \frac{l}{2} = 0. \quad (4)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Y_A = 4ql, \quad Z_A = F = ql, \quad M_A = 6ql^2, \quad Y_B = 8ql. \quad (5)$$

3. Provera

$$\sum M_{Gx}^d = -M_A + 4Y_A \cdot l - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3l - M_2 + 2F \cdot 2l - 2q3l \frac{3l}{2} = 0. \quad (6)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momeante savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1 $\left(\frac{q_z}{4q} = \frac{z}{3l} \Rightarrow q_z = \frac{4q}{3l} z \right)$

$$F_a^l = 0, \quad (0 \leq z < l)$$

$$F_t^l = -\frac{1}{2} q_z z = -\frac{2q}{3l} z^2, \quad (0 \leq z \leq l)$$

$$M_f^l = -\frac{1}{3} z \frac{2q}{3l} z^2 = -\frac{2q}{9l} z^3. \quad (0 \leq z < l)$$

Presek 2-2

$$F_a^l = -2F, \quad (l < z \leq 2l)$$

$$F_t^l = -\frac{2q}{3l} z^2, \quad (l \leq z < 2l)$$

$$M_f^l = -\frac{2q}{9l} z^3 - 2ql^2. \quad (l < z \leq 2l)$$

Presek 3-3

$$F_a^l = -2F = -2ql, \quad (2l \leq z \leq 3l)$$

$$F_t^l = -\frac{2q}{3l} z^2 + 8ql, \quad (2l < z \leq 3l)$$

$$M_f^l = -\frac{2q}{9l} z^3 + 8qlz - 18ql^2. \quad (2l \leq z < 3l)$$

Presek 4-4

$$F_a^l = -2F = -2ql, \quad (3l \leq z \leq 4l)$$

$$F_t^l = -2qz + 8ql, \quad (3l \leq z \leq 4l)$$

$$M_f^l = -6ql(z-2l) - 2Fl + 8ql(z-2l) - M_1 - 2q \frac{(z-3l)^2}{2} =$$

$$= -16ql^2 + 8qlz - qz^2. \quad (3l < z \leq 4l)$$

Presek 8-8

$$F_a^d = -Z_A = -F = -ql, \quad (0 < z_1 < l)$$

$$F_t^d = -Y_A = -4ql, \quad (0 < z_1 < l)$$

$$M_f^d = -M_A + Y_A \cdot z_1 = -6ql^2 + 4qlz_1. \quad (0 < z_1 < l)$$

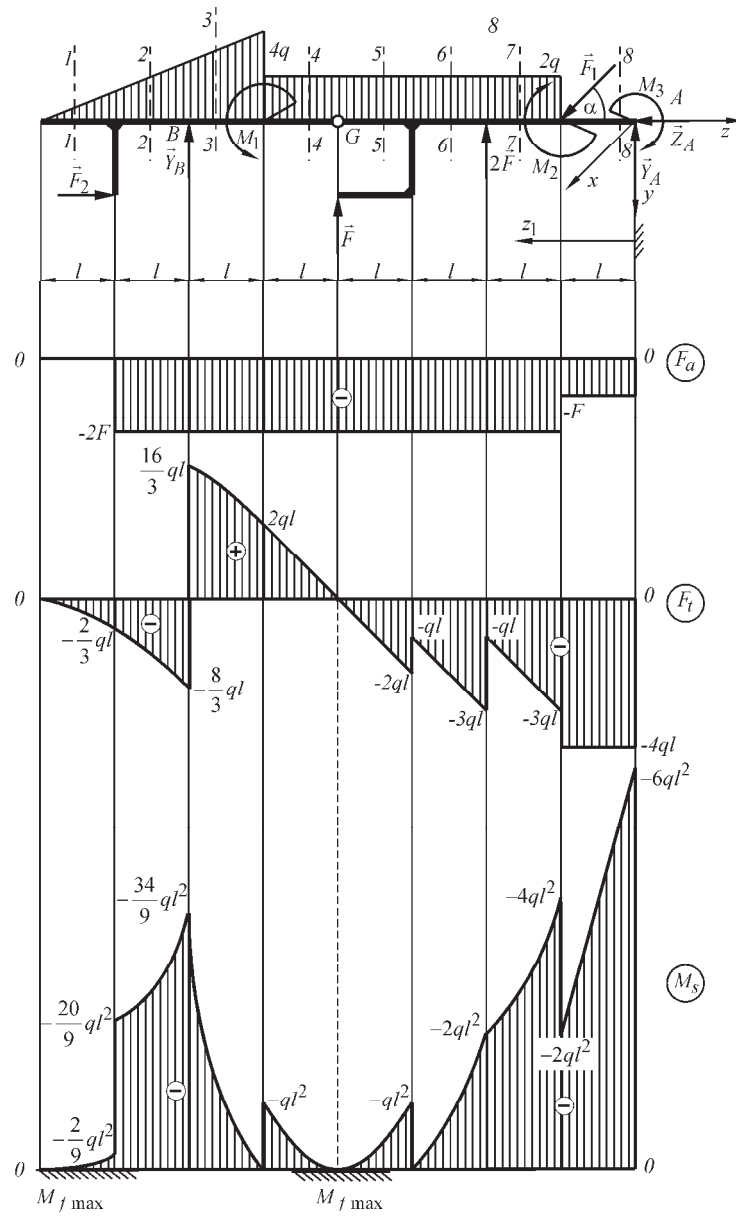
Presek 7-7

$$F_a^d = -Z_A - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -2ql, \quad (l < z_1 \leq 2l)$$

$$F_t^d = -Y_A + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2q(z_1 - l) = -5ql + 2qz_1, \quad (l < z_1 < 2l)$$

$$M_f^d = -M_A + Y_A z_1 - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (z_1 - l) - M_2 - 2 \cdot q \frac{(z_1 - l)^2}{2} = -8ql^2 + 5qlz_1 - qz_1^2.$$

$$(l < z_1 \leq 2l)$$



Slika 11.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

Presek 6-6

$$F_a^d = -Z_A - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -2F = -2ql, \quad (2l \leq z_1 \leq 3l)$$

$$F_t^d = -Y_A + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2F + 2q(z_1 - l) = -7ql + 2qz_1, \quad (2l < z_1 < 3l)$$

$$M_f^d = -M_A + Y_A z_1 - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (z_1 - l) - M_2 + 2F(z_1 - 2l) - 2q \frac{(z_1 - l)^2}{2} =$$

$$= -12ql^2 + 7qlz_1 - qz_1^2. \quad (2l \leq z_1 < 3l)$$

Presek 5-5

$$F_a^d = -Z_A - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -2ql, \quad (3l \leq z_1 \leq 4l)$$

$$F_t^d = -Y_A + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2F - F + 2q(z_1 - l) = -8ql + 2qz_1,$$

$$(3l < z_1 \leq 4l)$$

$$M_f^d = -M_A + Y_A z_1 - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (z_1 - l) - M_2 + 2F(z_1 - 2l) - Fl -$$

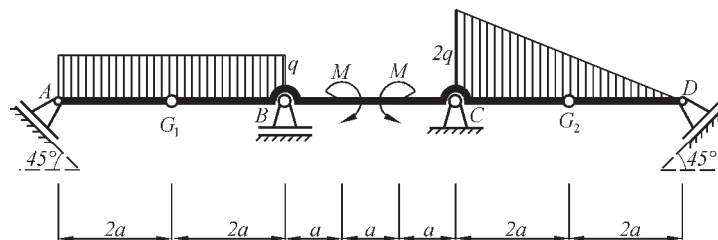
$$- 2q \frac{(z_1 - l)^2}{2} + F(z_1 - 3l) = -16ql^2 + 8qlz_1 - qz_1^2.$$

$$(3l < z_1 \leq 4l)$$

Napomena: Kod Gerberovih nosača moment savijanja u Gerberovom zglobu uvek je jednak nuli!

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina (slika 11.1)

12. Za Gerberov nosač opterećen kao na slici 12 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame ako je $M = 4 \text{ kNm}$, i $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $a = 1 \text{ m}$.



Slika 12 Nosač sa dva Gerberova zgloba

Rešenje

- 1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 12.1)**
- 2. Određivanje brojnih vrednosti reakcija veza**

Kako se radi o nosaču koji ima dva Gerberova zglobova, potrebno je napisati pet analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza (slika 12.1):

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow R_A \frac{\sqrt{2}}{2} + Z_C - R_D \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -R_A \frac{\sqrt{2}}{2} + q \cdot 4a - Y_B - Y_C + \frac{1}{2} 2q \cdot 4a - R_D \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Cx} = 0 \Rightarrow -R_A \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7a + q \cdot 4a \cdot 5a - Y_B \cdot 3a + M - M - 4qa \frac{4a}{3} + R_D \frac{\sqrt{2}}{2} 4a = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{G_1x}^{(AG_1)} = 0 \Rightarrow -R_A \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a + q \cdot 2a \cdot a = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_{G_2x}^{(G_2D)} = 0 \Rightarrow R_D \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a - \frac{1}{2} q \cdot 2a \cdot \frac{2a}{3} = 0. \quad (5)$$

Iz prethodnih jednačina sledi:

$$R_A = 2\sqrt{2} \text{ kN}, \quad R_B = Y_B = 6 \text{ kN}, \quad Y_C = \frac{22}{3} \text{ kN}, \quad Z_C = -\frac{4}{3} \text{ kN}, \quad R_D = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ kN},$$

$$R_C = \sqrt{Y_C^2 + Z_C^2} = \frac{10\sqrt{5}}{3} \text{ kN}.$$

(6)

3. Provera:

$$\sum M_{G_1x}^{(G_1D)} = -q \cdot 2a \cdot a + Y_B \cdot 2a - M + M + Y_C \cdot 5a - \frac{1}{2} 2q \cdot 4a \cdot \frac{19a}{3} + R_D \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9a \equiv 0, \quad (7)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = -R_A \frac{\sqrt{2}}{2} = -2, \quad (0 < z \leq 4a)$$

$$F_t^I = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} - qz = 2 - 2z, \quad (0 < z < 4a)$$

$$M_f^I = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} z - q \frac{z^2}{2} = 2z - z^2, \quad (0 \leq z \leq 4a)$$

$$F_t = 0 \text{ za } z_{0(1-1)} = a = 1 \Rightarrow M_{f \max} = M_f(z_{0(1-1)}) = 1.$$

Presek 2-2

$$F_a^l = -R_A \frac{\sqrt{2}}{2} = -2, \quad (4a \leq z \leq 5a)$$

$$F_t^l = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} - 4qa + Y_B = 0, \quad (4a < z \leq 5a)$$

$$M_f^l = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} z - 4qa(z - 2a) + Y_B(z - 4a) = -8. \quad (4a \leq z < 5a)$$

Presek 3-3

$$F_a^l = -R_A \frac{\sqrt{2}}{2} = -2, \quad (5a \leq z \leq 6a)$$

$$F_t^l = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} - 4qa + Y_B = 0, \quad (5a \leq z \leq 6a)$$

$$M_f^l = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} z - 4qa(z - 2a) + Y_B(z - 4a) + M = -4. \quad (5a < z < 6a)$$

Presek 4-4

$$F_a^l = -R_A \frac{\sqrt{2}}{2} = -2, \quad (6a \leq z < 7a)$$

$$F_t^l = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} - 4qa + Y_B = 0, \quad (6a \leq z < 7a)$$

$$M_f^l = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} z - 4qa(z - 2a) + Y_B(z - 4a) + M - M = -8 \quad (6a < z \leq 7a)$$

Presek 5-5 $\left(\frac{q_z}{z_5} = \frac{2q}{4a} \Rightarrow q_z = z_5 \cdot 1 \right)$

$$F_a^d = -R_D \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{3}, \quad (0 < z_5 < 4a)$$

$$F_t^d = -R_D \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} q_z z_5 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} z_5^2, \quad (0 < z_5 < 4a)$$

$$M_f^d = R_D \frac{\sqrt{2}}{2} z_5 - \frac{1}{2} q_z \cdot z_5 \cdot \frac{1}{3} z_5 = \frac{2}{3} z_5 - \frac{1}{6} z_5^3. \quad (0 \leq z_5 \leq 4a)$$

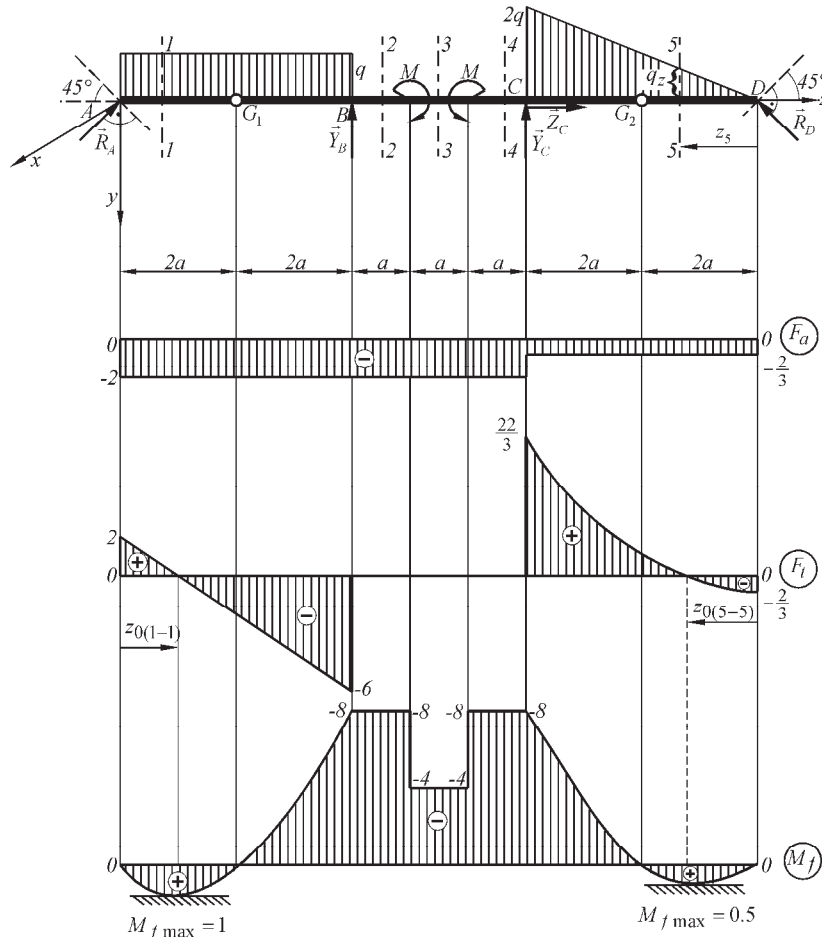
$$F_t = 0 \text{ za } z_{0(5-5)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow M_{f \max} = M_f(z_{0(5-5)}) = 0,5.$$

Funkciju momenta savijanja jednostavnije je nacrtati ako su joj poznate nule. U ovom slučaju postoje tri nule za moment savijanja:

$$M_f^d = 0 \text{ za } z_{5,1} = 0, z_{5,2} = 2 \text{ i } z_{5,3} = -2,$$

gde samo prve dve vrednosti pripadaju posmatranom intervalu $(0 \leq z_5 \leq 4a)$.

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 12.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

Okvirni nosači

13. Za Gerberov okvirni nosač opterećen kao na slici 13 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako

$$\text{je } a = 1\text{m}, q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}},$$

$$F = F_I = 4\text{kN},$$

$$M = 4\text{kNm}.$$

Rešenje

1. Usvajanje koordinatnog sistema
(slika 13.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 13.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + F + Z_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + q \cdot 4a + F = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow M_A - F \cdot 2a - q \cdot 4a \cdot 2a - M - F \cdot 5a = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Gx}^{(BG)} = 0 \Rightarrow Z_B \cdot 4a - F \cdot a = 0. \quad (4)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se sledeće projekcije reakcija veza:

$$Z_A = 5\text{kN}, \quad Y_A = 8\text{kN}, \quad Z_B = 1\text{kN}, \quad M_A = 40\text{kN}. \quad (5)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Gx}^{(ACD)} = -Z_A \cdot 4 - Y_A \cdot 4 + M_A + F \cdot 2 + q \cdot 8 - M \equiv 0. \quad (6)$$

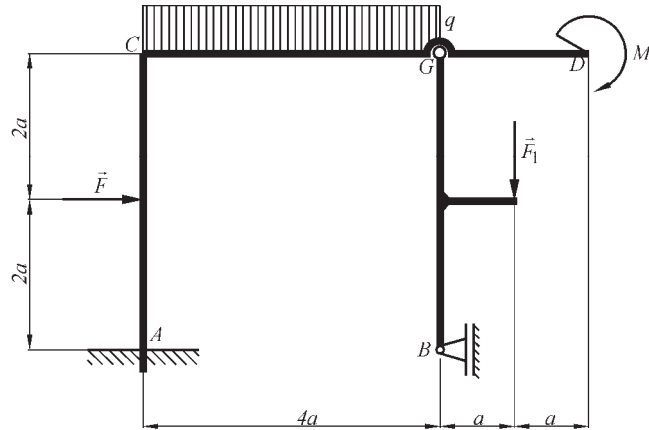
4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momenat savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = -Y_A = -8, \quad (0 < y_1 \leq 2a)$$

$$F_t^I = Z_A = 5, \quad (0 < y_1 < 2a)$$

$$M_f^I = -M_A + Z_A \cdot y_1 = -40 + 5y_1. \quad (0 < y_1 \leq 2a)$$



Slika 13 Gerberov okvirni nosač

Presek 2-2

$$F_a^l = -Y_A = -8, \quad (0 \leq y_2 < 2a)$$

$$F_t^l = Z_A - F = 1, \quad (0 < y_2 < 2a)$$

$$M_f^l = -M_A + Z_A \cdot (2a + y_2) - F \cdot y_2 = -30 + y_2. \quad (0 \leq y_2 < 2a)$$

Presek 3-3

$$F_a^l = Z_A - F = 1, \quad (0 < z < 4a)$$

$$F_t^l = Y_A - q \cdot z = 8 - z, \quad (0 < z < 4a)$$

$$M_f^l = -M_A + Z_A \cdot 4a - F \cdot 2a + Y_A \cdot z - q \frac{z^2}{2} = -\frac{z^2}{2} + 8z - 28 \quad (0 < z \leq 4a)$$

$F_t = 0$ za $z_0 = 8 > 4$, dakle van polja 3-3.

Presek 4-4

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_4 < 2a)$$

$$F_t^d = 0, \quad (0 \leq z_4 < 2a)$$

$$M_f^d = -M = -4. \quad (0 < z_4 \leq 2a)$$

Presek 6-6

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq y_6 < 2a)$$

$$F_t^d = -Z_B = -1, \quad (0 < y_6 \leq 2a)$$

$$M_f^d = Z_B \cdot y_6 = y_6. \quad (0 \leq y_6 < 2a)$$

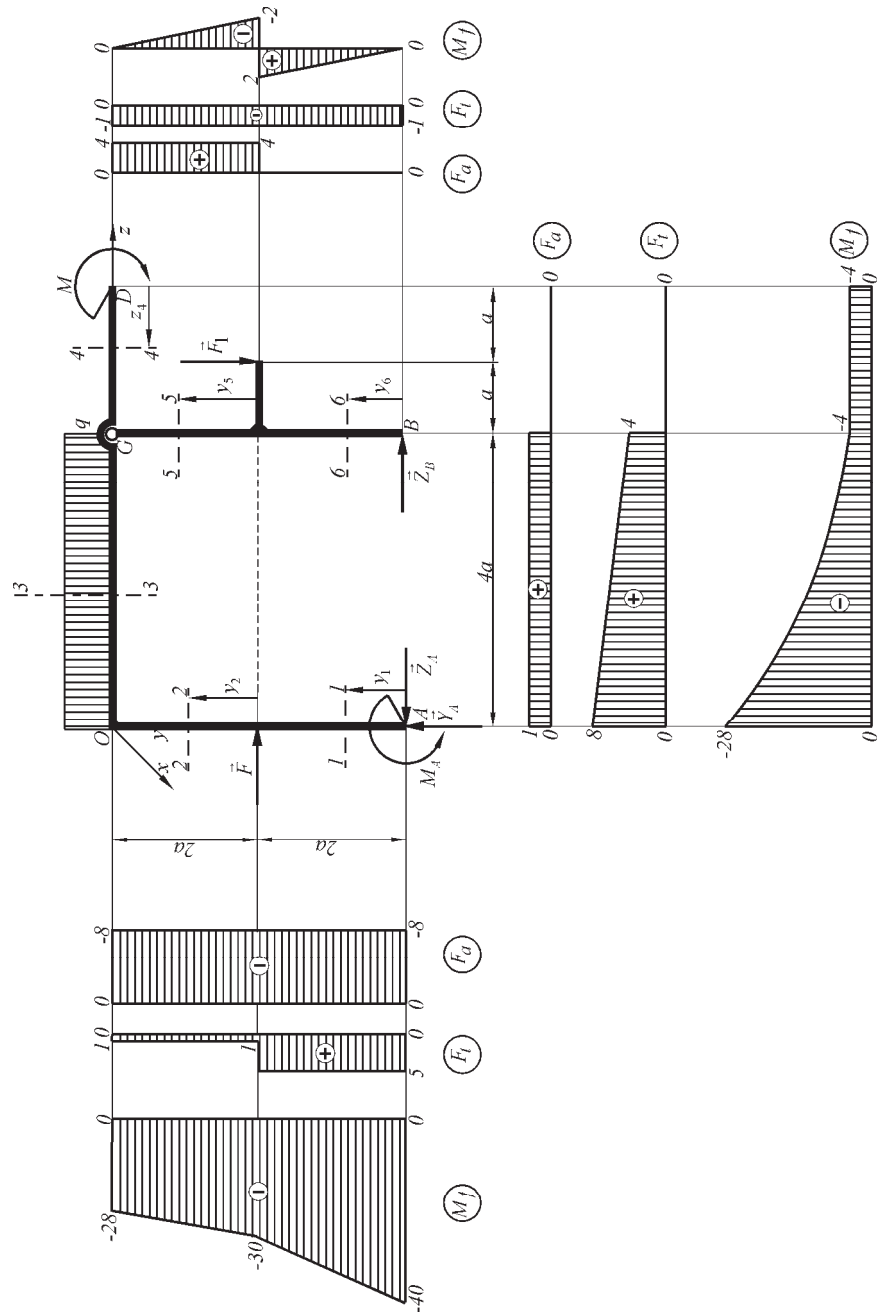
Presek 5-5

$$F_a^d = F = 4, \quad (0 < y_5 < 2a)$$

$$F_t^d = -Z_B = -1, \quad (0 \leq y_5 < 2a)$$

$$M_f^d = Z_B \cdot (2a + y_5) - F \cdot a = -2 + y_5. \quad (0 < y_5 < 2a)$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina (slika 13.1)



Slika 13.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

14. Za okvirni nosač prikazan na slici 14 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame,

ako je $a = 1\text{m}$, $q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$,

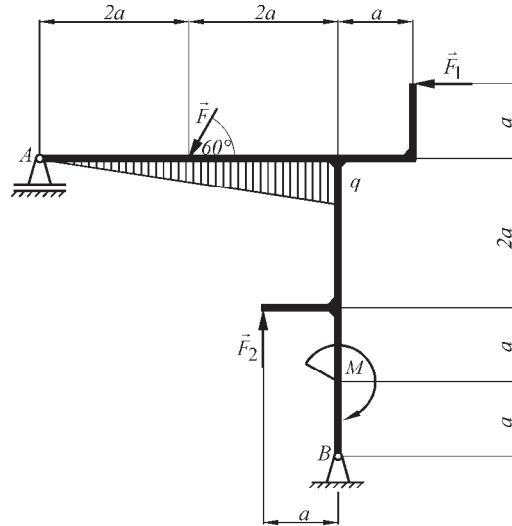
$F_1 = F_2 = F = 2\text{kN}$, $M = 2\text{kNm}$.

Rešenje

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 14.1)

2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 14.1 su:



Slika 14 Okvirni nosač

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -F \cos 60^\circ - F + Z_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A - F \sin 60^\circ + \frac{1}{2} q \cdot 4a + F - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Bx} = 0 \Rightarrow -M - F \cdot a + F \cdot 5a + F \cos 60^\circ \cdot 4a + F \sin 60^\circ \cdot 2a - \frac{1}{2} q \cdot 4a \cdot \frac{4a}{3} - Y_A \cdot 4a = 0. \quad (3)$$

Rešenje prethodnog sistema algebarskih jednačina je:

$$Y_A = \frac{11 + 3\sqrt{3}}{6} \approx 2,7\text{kN}, \quad Z_B = 3\text{kN}, \quad Y_B = \frac{3\sqrt{3} - 35}{6} \approx -4,97\text{kN} \quad (\text{pogrešno}$$

pretpostavljen smer).

(4)

3. Provera:

$$\sum M_{Ax} = \frac{1}{2} q \cdot 4a \cdot \frac{2}{3} \cdot 4a - F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a + F \cdot a + F \cdot 3a - M + Z_B \cdot 4a + Y_B \cdot 4a \equiv 0. \quad (5)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momenat savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1 $\left(\frac{qz}{z} = \frac{q}{4a} \Rightarrow q_z = \frac{1}{4} z \right)$

$$F_a^I = 0, \quad (0 \leq z < 2a)$$

$$F_t^l = Y_A + \frac{1}{2} q_z \cdot z = 2,7 + \frac{1}{8} z^2, \quad (0 < z < 2a)$$

$$M_f^l = Y_A \cdot z + \frac{1}{2} q_z \cdot z \cdot \frac{z}{3} = 2,7z + 0,042z^3 \quad (0 \leq z \leq 2a)$$

$F_t = 0$ za $z_0 = \pm 4,65$, dakle transversalna sila nema realne nule, pa moment savijanja nema lokalne ekstremume u posmatranom intervalu. Za preciznije crtanje dijagrama transversalne sile, moguće je ispitati da li F_t ima ekstremum na posmatranom intervalu, tj.

$$F_t' = \frac{dF_t}{dz} = 0 \quad \text{za } z = 0,$$

gde je minimum funkcije $F_{t\min}(z=0) = 2,7$ (slika 14.1).

Presek 2-2

$$F_a^l = F \cos 60^\circ = 1, \quad (2a < z < 4a)$$

$$F_t^l = Y_A + \frac{1}{2} q_z \cdot z - F \sin 60^\circ = 0,97 + 0,125z^2, \quad (2a < z < 4a)$$

$$M_f^l = Y_A \cdot z + \frac{1}{2} q_z \cdot z \cdot \frac{z}{3} - F \cdot \sin 60^\circ (z - 2a) = 0,042z^3 + 0,97z + 3,46. \quad (2a \leq z < 4a)$$

Presek 5-5

$$F_a^d = -Y_B = 4,97, \quad (0 < y_5 \leq a)$$

$$F_t^d = -Z_B = -3, \quad (0 < y_5 \leq a)$$

$$M_f^d = Z_B \cdot y_5 = 3y_5. \quad (0 \leq y_5 < a)$$

Presek 4-4

$$F_a^d = -Y_B = 4,97, \quad (0 \leq y_4 < a)$$

$$F_t^d = -Z_B = -3, \quad (0 \leq y_4 \leq a)$$

$$M_f^d = Z_B \cdot (y_4 + a) - M = 3y_4 + 1. \quad (0 < y_4 < a)$$

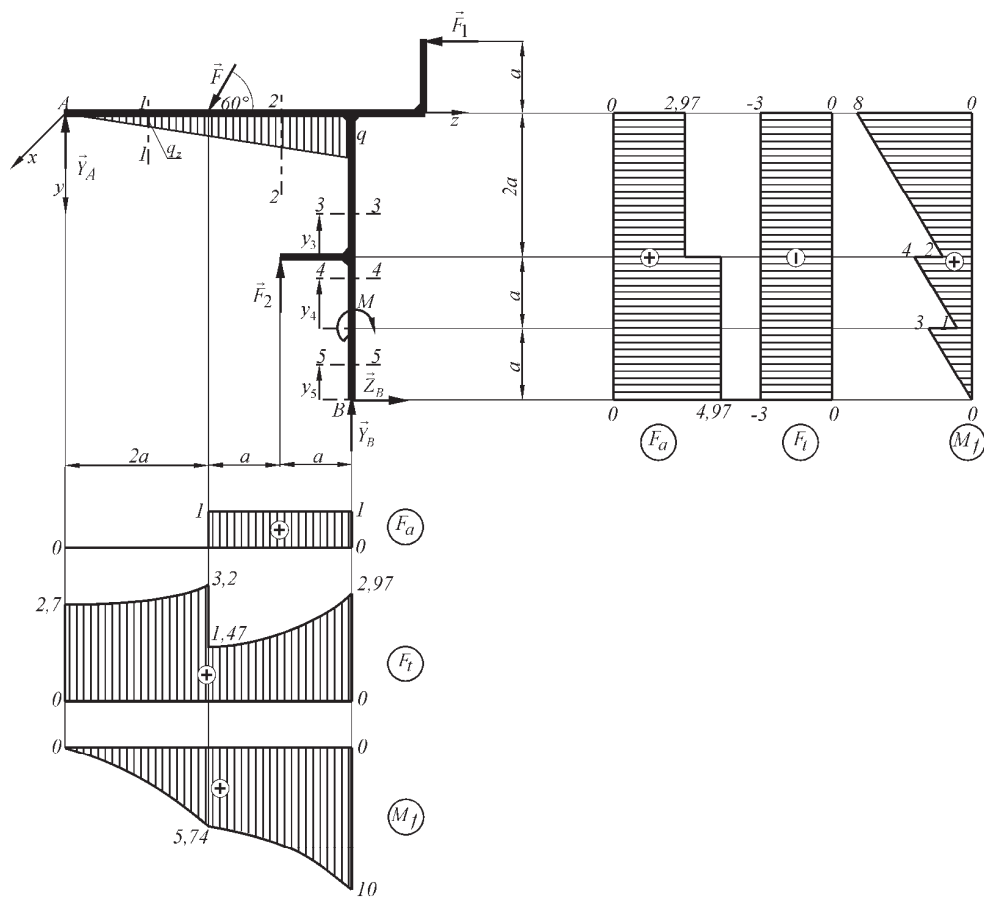
Presek 3-3

$$F_a^d = -Y_B - F = 2,97, \quad (0 < y_3 < 2a)$$

$$F_t^d = -Z_B = -3, \quad (0 \leq y_3 < a)$$

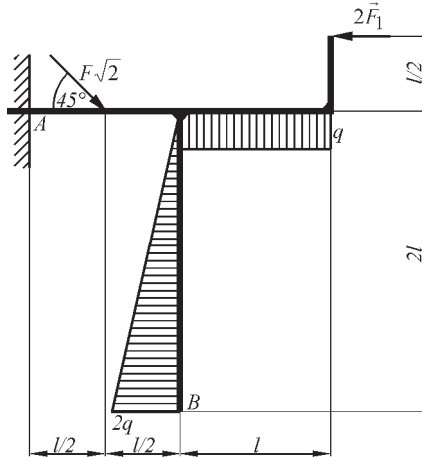
$$M_f^d = Z_B \cdot (y_3 + 2a) - M - F \cdot a = 2 + 3y_3, \quad (0 < y_3 < 2a)$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina (slika 14.1)



Slika 14.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

15. Za konzolni okvirni nosač opterećen kao na slici 15 odrediti sve reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je $F_1 = F = ql$.



Slika 15 Okvirni nosač

Rešenje:

1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 15.1)
2. Određivanje projekcija reakcija veza

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 15.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2F + \frac{1}{2} 2l \cdot 2q = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - ql = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -M_A - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l}{2} + ql \frac{3}{2} l + 2F \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2q \cdot 2l \cdot \frac{4l}{3} = 0. \quad (3)$$

Rešenja prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se sledeće vrednosti projekcija reakcija veza:

$$Z_A = F, \quad Y_A = 0, \quad M_A = \frac{14}{3} Fl. \quad (4)$$

3. Provera:

$$\begin{aligned} \sum M_{Bx} &= Z_A \cdot 2l - Y_A \cdot l - M_A + F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{l}{2} - \\ &- F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l + ql \frac{l}{2} + 2F \frac{5l}{2} - \frac{1}{2} 4ql \cdot \frac{2l}{3} \equiv 0. \end{aligned}$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim presecima nosača

Presek 1-1

$$F_a^l = Z_A = F, \quad (0 < z < l/2)$$

$$F_t^l = Y_A = 0, \quad (0 \leq z < l/2)$$

$$M_f^l = Y_A \cdot z + M_A = \frac{14}{3} Fl, \quad (0 < z \leq l/2)$$

Presek 2-2

$$F_a^l = Z_A - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (l/2 < z < l)$$

$$F_t^l = Y_A - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -F, \quad (l/2 < z \leq l)$$

$$M_f^l = Y_A \cdot z + M_A - F\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(z - \frac{l}{2} \right) = \frac{31}{6} Fl - Fz, \quad (l/2 \leq z < l)$$

Presek 3-3

$$F_a^d = -2F, \quad (0 < z_3 < l)$$

$$F_t^d = -qz_3, \quad (0 \leq z_3 \leq l)$$

$$M_f^d = 2F \frac{l}{2} + q \frac{z_3^2}{2} = Fl + q \frac{z_3^2}{2}, \quad (0 < z_3 < l)$$

Presek 4-4 $\left(\frac{q_y}{2q} = \frac{y_4}{2l} \Rightarrow q_y = \frac{q}{l} y_4 \right)$

$$F_a^l = 0, \quad (0 \leq y_4 < 2l)$$

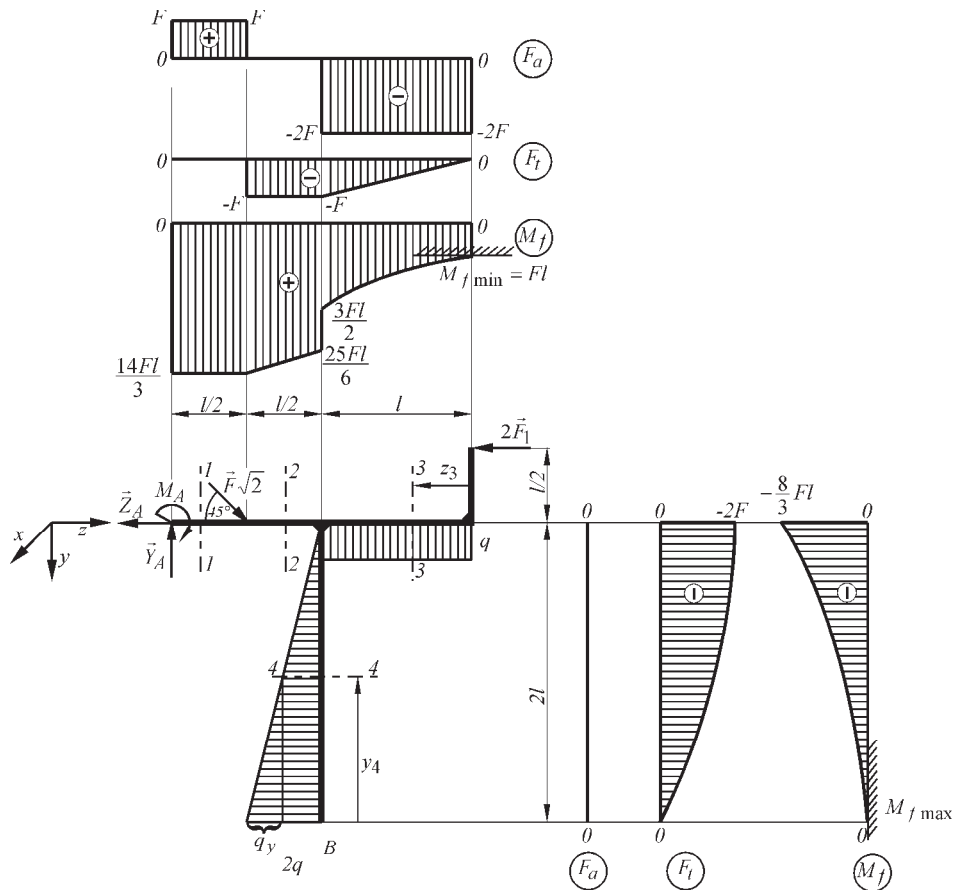
$$F_t^l = -\frac{1}{2} q_y \cdot y_4 - (2q - q_y) y_4 = \frac{1}{2} \frac{q}{l} y_4^2 - 2q \cdot y_4, \quad (0 \leq y_4 < 2l)$$

$$M_f^l = -\frac{1}{2} q_y \cdot y_4 \cdot \frac{2}{3} y_4 - (2q - q_y) y_4 \cdot \frac{y_4}{2} = \frac{1}{6} \frac{q}{l} y_4^3 - q y_4^2, \quad (0 \leq y_4 < 2l)$$

$$F_t = 0 \text{ za } y_4 = 0, M_{f \max} = 0,$$

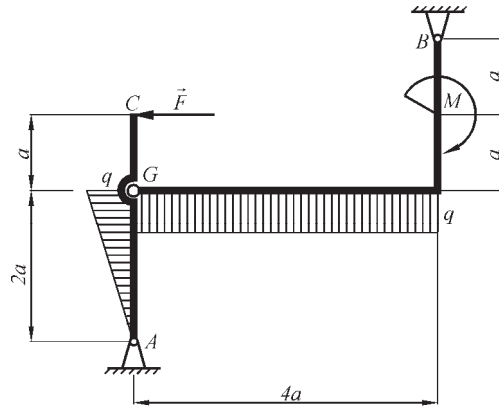
$$F'_t = 0 \text{ za } y_4 = 2l \Rightarrow F_{t \min}(2l) = -2F.$$

5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 15.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

16. Za Gerberov nosač prikazan na slici 16 odrediti vrednost reakcija veze i nacrtati osnovne statičke dijagrame ako je $M = F \cdot a$, $F = aq$, $F = 2kN$, $a = 1m$.



Slika 16. Gerberov okvirni nosač

Rešenje:**1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 16.1)****2. Određivanje projekcija reakcija veza**

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 16.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A + \frac{1}{2} q \cdot 2a = -F + Z_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A - 4qa + Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} q \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + F \cdot 3a + q \cdot 4a \cdot 2a - M - Z_B \cdot 4a - Y_B \cdot 4a = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Gx}^{(GB)} = 0 \Rightarrow q \cdot 4a \cdot 2a - M - Y_B \cdot 4a - Z_B \cdot 2a = 0. \quad (4)$$

Rešenje prethodnog sistema algebarskih jednačina je:

$$Z_B = \frac{5}{6} F = \frac{5}{3} kN, \quad Z_A = -\frac{5}{6} F = -\frac{5}{3} kN, \quad Y_A = -\frac{8}{3} F = -\frac{16}{3} kN, \quad Y_B = \frac{4}{3} F = \frac{8}{3} kN. \quad (5)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Gx}^{(AC)} = Z_A \cdot 2a + qa \frac{2a}{3} + Fa \equiv 0. \quad (6)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momente savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1 $\left(\frac{q_y}{y_1} = \frac{q}{2a} \Rightarrow q_y = \frac{q}{2a} y_1 = y_1 \right)$

$$F_a^I = -Y_A = \frac{16}{3}, \quad (0 < y_1 < 2a)$$

$$F_t^l = -Z_A - \frac{1}{2} q_y \cdot y_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} y_1^2, \quad (0 < y_1 < 2a)$$

$$M_f^l = -Z_A y_1 - \frac{1}{2} q_y y_1 \frac{y_1}{3} = \frac{5}{3} y_1 - \frac{1}{6} y_1^3, \quad (0 \leq y_1 \leq 2a)$$

$$F_t = 0 \text{ za } y_0 = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1,82 \text{ i } M_{f \max} = M_f(y_0) = \frac{5}{3} \cdot 1,82 - \frac{1}{6} \cdot 1,82^3 = 2,02$$

$F_t' = 0$ za $y_1 = 0$ i to je mesto maksimuma transverzalne sile.

Presek 2-2

$$F_a^d = 0, \quad (0 < y_2 < a)$$

$$F_t^d = -F = -2, \quad (0 < y_2 < a)$$

$$M_f^d = F \cdot y_2, \quad (0 \leq y_2 \leq a)$$

Presek 5-5

$$F_a^d = -Y_B = -\frac{8}{3}, \quad (0 < y_5 \leq a)$$

$$F_t^d = Z_B = \frac{5}{3}, \quad (0 < y_5 \leq a)$$

$$M_f^d = -Z_B \cdot y_5 = -\frac{5}{3} y_5. \quad (0 \leq y_5 < a)$$

Presek 4-4

$$F_a^d = -Y_B = -\frac{8}{3}, \quad (0 \leq y_4 < a)$$

$$F_t^d = Z_B = \frac{5}{3}, \quad (0 \leq y_4 < a)$$

$$M_f^d = -Z_B(a + y_4) - M = -\frac{11}{3} - \frac{5}{3} y_4, \quad (0 < y_4 < a)$$

Presek 3-3

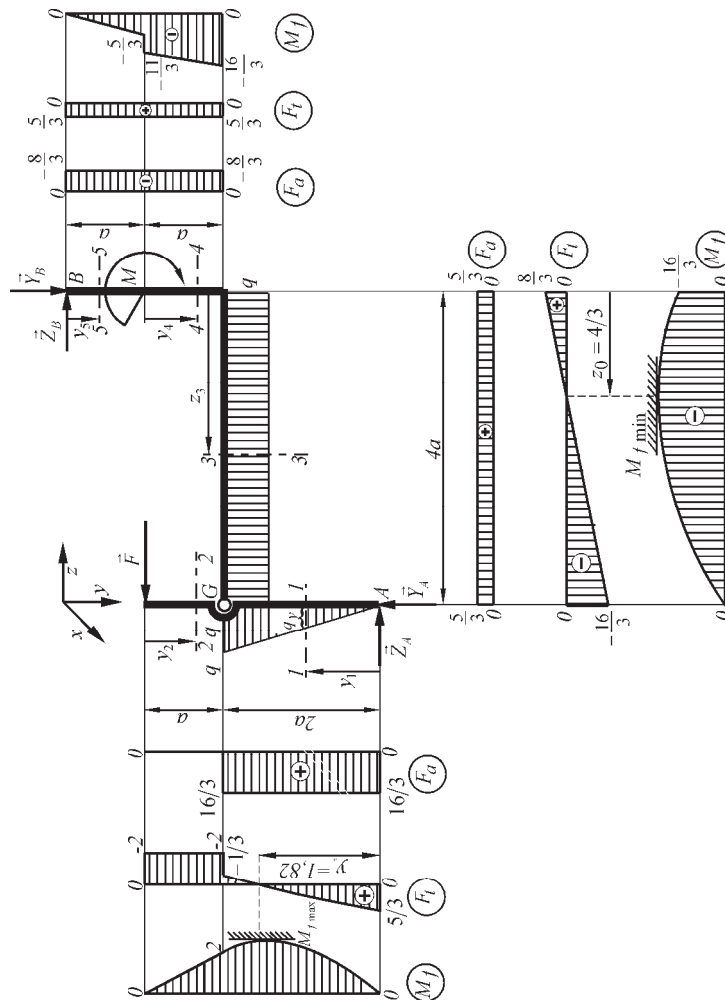
$$F_a^d = Z_B = \frac{5}{6} F = \frac{5}{3}, \quad (0 < z_3 < 4a)$$

$$F_t^d = Y_B - qz_3 = \frac{8}{3} - 2z_3, \quad (0 < z_3 < 4a)$$

$$M_f^d = -Z_B \cdot 2a - Y_B \cdot z_3 - M + q \frac{z_3^2}{2} = -\frac{16}{3} - \frac{8}{3} z_3 + z_3^2, \quad (0 < y_3 < 4a)$$

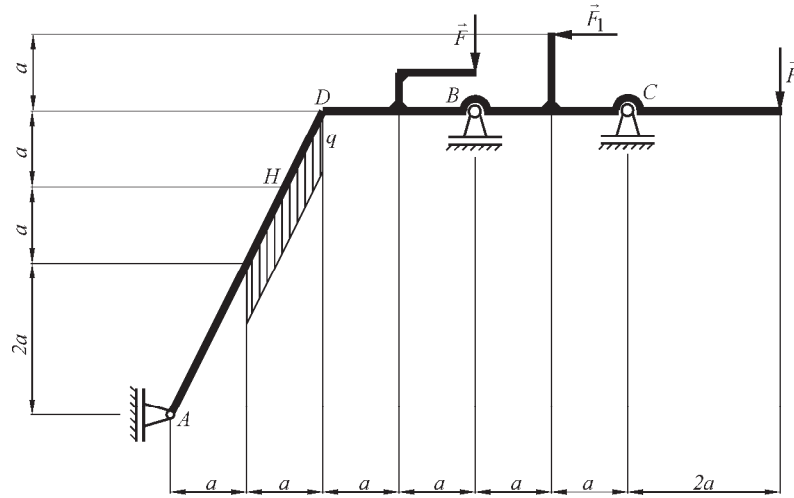
$$F_t = 0 \text{ za } z_3 = \frac{4}{3} \quad \text{i} \quad M_{f \min} = M_f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{9}$$

4. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina



Slika 16.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

17. Za okvirni nosač prikazan na slici 17 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je $F_1 = F = qa\sqrt{5}$.



Slika 17 Okvirni nosač

Rešenje:**1. Usvajanje koordinatnog sistema (slika 17.1)****2. Određivanje projekcija reakcija veza**

Analički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 17.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - F = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -q \cdot a\sqrt{5} + F - Y_B - Y_C + F = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow q \cdot a\sqrt{5} \frac{3a}{2} - F \cdot 4a + Y_B \cdot 4a + F \cdot 5a + Y_C \cdot 6a - F \cdot 8a = 0, \quad (3)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se broje vrednosti projekcija reakcija veza:

$$Z_A = F, \quad Y_C = \frac{3}{4}F, \quad Y_B = \frac{1}{4}F. \quad (4)$$

3. Provera:

$$\sum M_{Hx} = Z_A \cdot 3a + q \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a}{4} - q \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a}{4} - F \cdot 2,5a + Y_B \cdot 2,5a + F \cdot 2a + Y_C \cdot 4,5a - F \cdot 6,5a = 0, \quad (5)$$

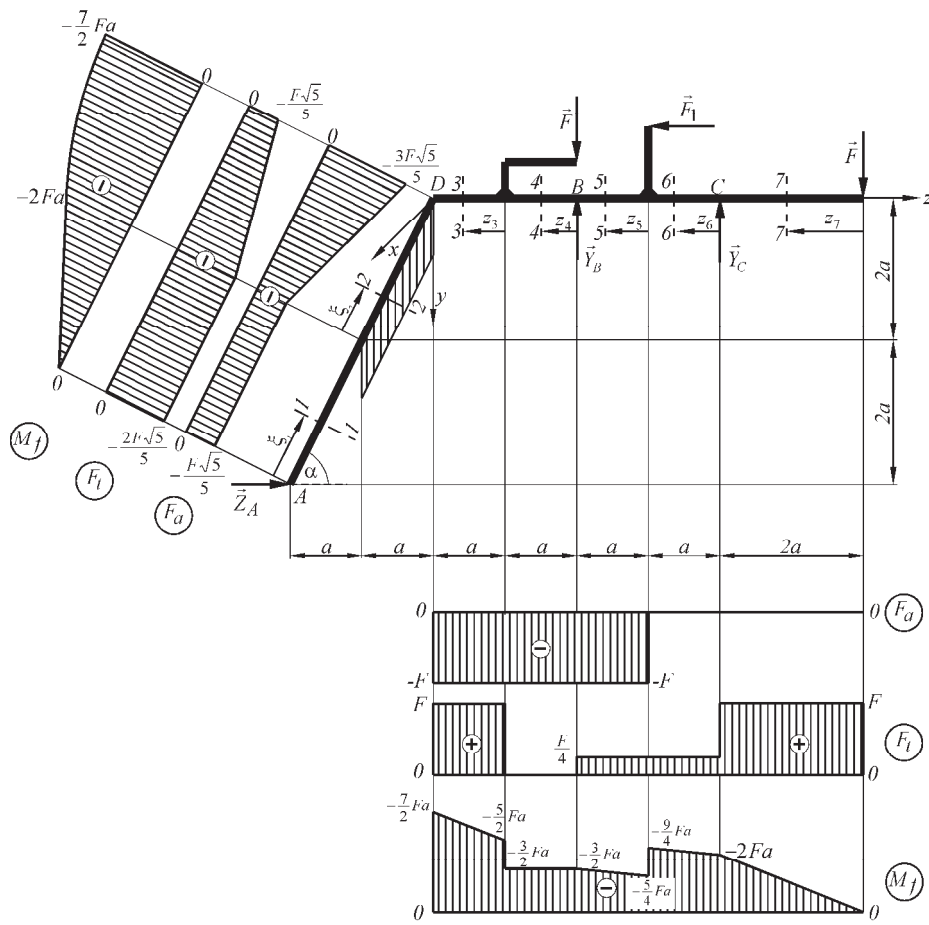
4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transverzalne sile F_t i momenat savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1 $\left(\cos \alpha = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$

$$F_a^l = -Z_A \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -F \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad (0 < \xi_1 \leq a\sqrt{5})$$

$$F_t^l = -Z_A \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -F \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad (0 < \xi_1 \leq a\sqrt{5})$$

$$M_f^l = -Z_A \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \xi_1 = -F \frac{2\sqrt{5}}{5} \xi_1, \quad (0 \leq \xi_1 \leq a\sqrt{5})$$



Slika 17.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

Presek 2-2

$$F_a^l = -Z_A \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - q \cdot \xi_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -F \frac{\sqrt{5}}{5} - F \frac{2}{5a} \xi_2, \quad (0 \leq \xi_2 < a\sqrt{5})$$

$$F_t^l = -Z_A \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + q\xi_2 \frac{1}{\sqrt{5}} = -F \frac{2\sqrt{5}}{5} + F \frac{1}{5a} \xi_2, \quad (0 \leq \xi_2 < a\sqrt{5})$$

$$\begin{aligned} M_f^l &= -Z_A \cdot (a\sqrt{5} + \xi_2) \sin \alpha + q\xi_2 \frac{\xi_2}{2} \frac{\sqrt{5}}{5} = \\ &= -2Fa - F \frac{2\sqrt{5}}{5} \xi_2 + \frac{F}{10a} \xi_2^2. \end{aligned} \quad (0 \leq \xi_1 < a\sqrt{5})$$

Kako transverzalna sila nema nula za $0 \leq \xi_2 \leq a\sqrt{5}$ moment fleksije (M_f) u ovom polju nema minimum.

Presek 7-7

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_7 \leq 2a)$$

$$F_t^d = F, \quad (0 < z_7 < 2a)$$

$$M_f^d = -F \cdot z_7, \quad (0 \leq z_7 \leq 2a)$$

Presek 6-6

$$F_a^d = 0, \quad (0 \leq z_6 < a)$$

$$F_t^d = F - Y_C = \frac{1}{4}F, \quad (0 < z_6 \leq a)$$

$$M_f^d = -F \cdot (2a + z_6) + Y_C z_6 = -2Fa - \frac{1}{4}F \cdot z_6, \quad (0 \leq z_6 < a)$$

Presek 5-5

$$F_a^d = -F, \quad (0 < z_5 \leq a)$$

$$F_t^d = F - Y_C = \frac{1}{4}F, \quad (0 \leq z_5 < a)$$

$$M_f^d = -F \cdot (3a + z_5) + Y_C (a + z_5) + Fa = -\frac{5}{4}Fa - \frac{1}{4}F \cdot z_5, \quad (0 < z_5 \leq a)$$

Presek 4-4

$$F_a^d = -F, \quad (0 \leq z_4 \leq a)$$

$$F_t^d = F - Y_C - Y_B = 0, \quad (0 < z_4 < a)$$

$$M_f^d = -F \cdot (4a + z_4) + Y_C (2a + z_4) + Fa + Y_B z_4 = -\frac{3}{2}Fa, \quad (0 \leq z_4 < a)$$

$$\sum M_{Hx}^{(HGB)} = 0 \Rightarrow Z_B \cdot 1,4a + Y_B \cdot 3a - q \cdot \frac{(1,4a)^2}{2} - F \cdot a = 0. \quad (6)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina dobijaju se vrednosti projekcija reakcija veza:

$$Z_A \approx 0,39kN, \quad Y_A \approx 0,35kN, \quad Z_B = 0,7kN, \quad Y_B = \frac{1}{3}kN \approx 0,33kN, \quad Z_C = Y_C \approx 0,31kN.$$

3. Provera:

$$\sum M_{Hx}^{(CAH)} = 0 \Rightarrow Z_C \cdot 1,4a - Y_C \cdot 2a + Z_A \cdot 1,4a - Y_A \cdot a \equiv 0. \quad (8)$$

4. Određivanje funkcija za aksijalne sile F_a , transversalne sile F_t i momenat savijanja M_f u poprečnim preseccima nosača

Presek 1-1

$$F_a^I = -Y_A = -0,35, \quad (0 < y_1 < a)$$

$$F_t^I = -Z_A = -0,39, \quad (0 < y_1 < a)$$

$$M_f^I = -Z_A \cdot y_1 = -0,39y_1, \quad (0 \leq y_1 \leq a)$$

Presek 2-2

Poprečni presek 2-2 uzet je na proizvoljnom mestu na delu nosača CD . Ugao koji normala na poprečni presek zaklapa sa pravcem AC označen je sa α . Duž dela nosača CD ugao α menja se u intervalu $\alpha \in [90^\circ, 0]$.

$$F_a^I = -Y_C \sin \alpha - Z_C \cos \alpha = -0,31(\sin \alpha + \cos \alpha), \quad (90^\circ > \alpha > 0)$$

$$F_a(\alpha = 45^\circ) = -0,31\sqrt{2} = -0,44,$$

$$F_t^I = -Z_C \sin \alpha + Y_C \cos \alpha = 0,31(\cos \alpha - \sin \alpha), \quad (90^\circ > \alpha > 0)$$

$$F_t(\alpha = 45^\circ) = 0, \quad (90^\circ > \alpha > 0)$$

$$M_f^I = -Z_C \cdot a \cos \alpha + Y_C \cdot a(1 - \sin \alpha) = 0,31(1 - \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (90^\circ \geq \alpha \geq 0)$$

$$M_f(\alpha = 45^\circ) = -0,13.$$

Presek 3-3

$$F_a^l = -Y_A - Y_C = -0,67, \quad (0 < y_3 < 0,4a)$$

$$F_t^l = -Z_A - Z_C = -0,7, \quad (0 < y_3 < 0,4a)$$

$$M_f^l = -(Z_A + Z_C)(a + y_3) + Y_C \cdot a = -0,39 - 0,7 \cdot y_3, \quad (0 \leq y_3 < 0,4a)$$

Presek 4-4

$$F_a^l = -Z_A - Z_C = -0,7, \quad (0 < z_4 \leq 2a)$$

$$F_t^l = Y_A + Y_C = 0,67, \quad (0 < z_4 < 2a)$$

$$M_f^l = Y_C(a + z_4) + Y_A z_4 - (Z_A + Z_C) \cdot 1,4a = -0,67 + 0,67 z_4, \quad (0 < z_4 \leq 2a)$$

Presek 6-6

$$F_a^d = -Y_B = -0,33, \quad (0 < y_6 < 1,4a)$$

$$F_t^d = -Z_B + q y_6 = -0,7 + y_6, \quad (0 < y_6 < 1,4a)$$

$$M_f^d = Z_B \cdot y_6 - q \frac{y_6^2}{2} = 0,7 y_6 - 0,5 y_6^2, \quad (0 \leq y_6 < 1,4a)$$

$$F_t = 0 \text{ za } y_6 = 0,7a \Rightarrow M_{f \max}(0,7) = 0,245$$

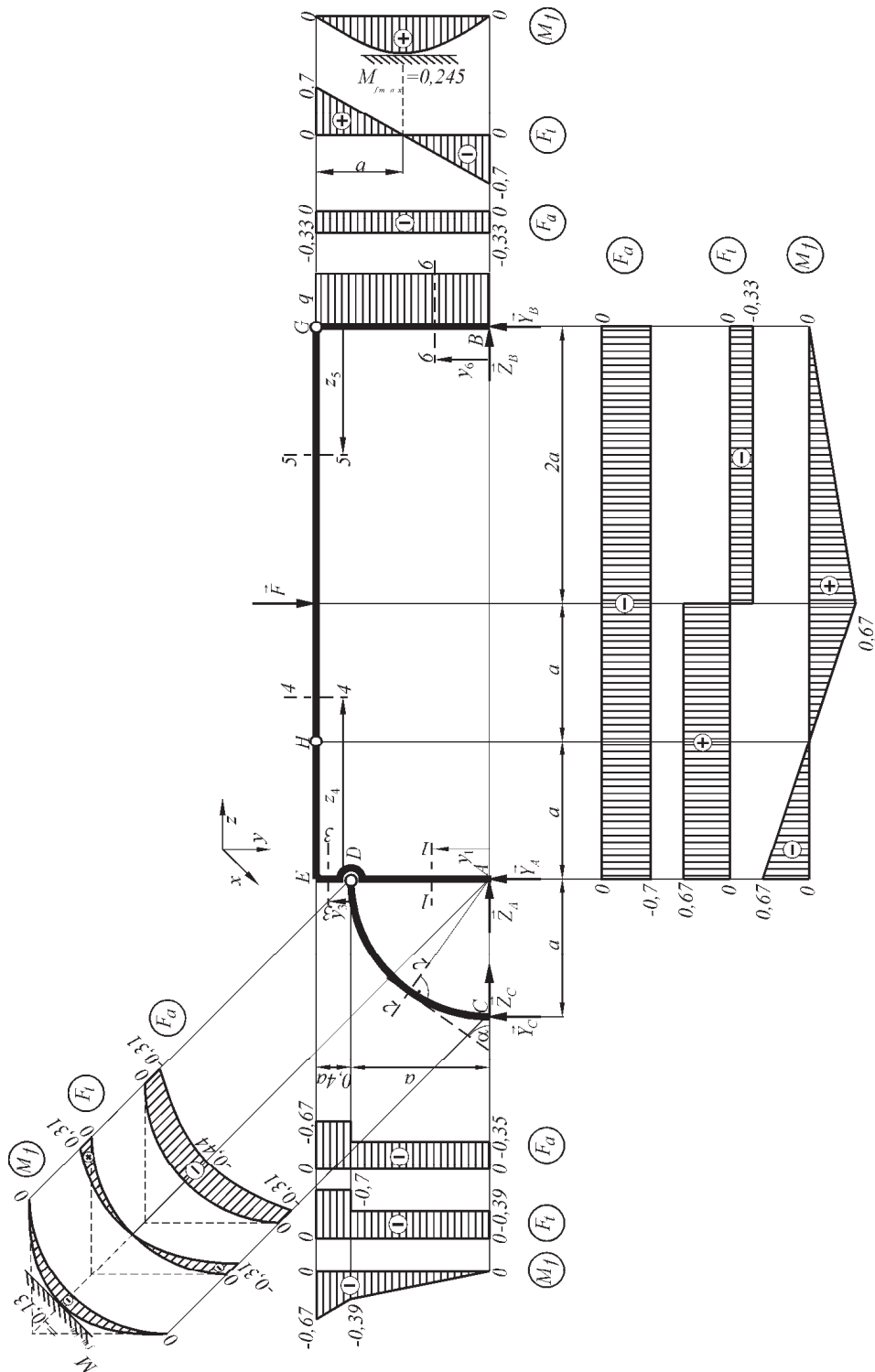
Presek 5-5

$$F_a^d = Z_B - q \cdot 1,4a = -0,7, \quad (0 < z_5 \leq 2a)$$

$$F_t^d = -Y_B = -0,33, \quad (0 < z_5 < 2a)$$

$$M_f^d = Y_B \cdot z_5 + Z_B \cdot 1,4a - q \frac{(1,4a)^2}{2} = 0,33 \cdot z_5, \quad (0 < z_5 \leq 2a)$$

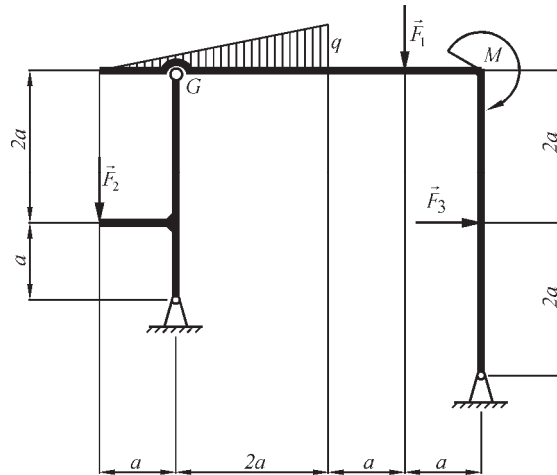
5. Crtanje dijagrama osnovnih statičkih veličina (slika 18.1)



Slika 18.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

19. Za Gerberov okvirni nosač opterećen kao što je prikazano na slici 19 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je

$$F_1 = F_3 = 2 \text{ kN}, \quad F_2 = 3 \text{ kN}, \quad M = 3 \text{ kNm}, \quad q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad a = 1 \text{ m}.$$



Slika 19 Gerberov okvirni nosač

Rešenje:

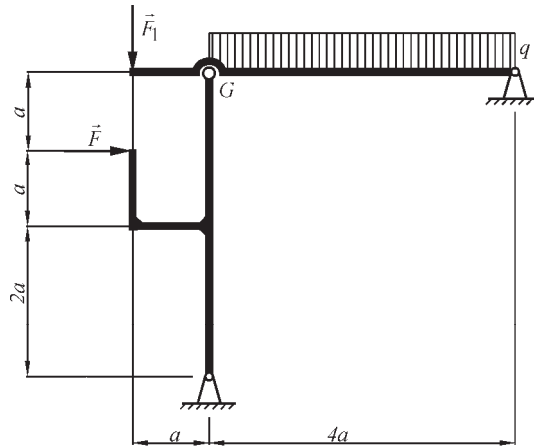
Projekcije reakcija veza (slika 19.1) datog okvirnog nosača su:

$$Z_A = 1 \text{ kN}, \quad Y_A = 5 \text{ kN}, \\ Z_B = 1 \text{ kN}, \quad Y_B = 3 \text{ kN}.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 19.1.

20. Za okvirni nosač prikazan na slici 20 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je

$$F = F_1 = qa, \quad q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad a = 1 \text{ m}.$$



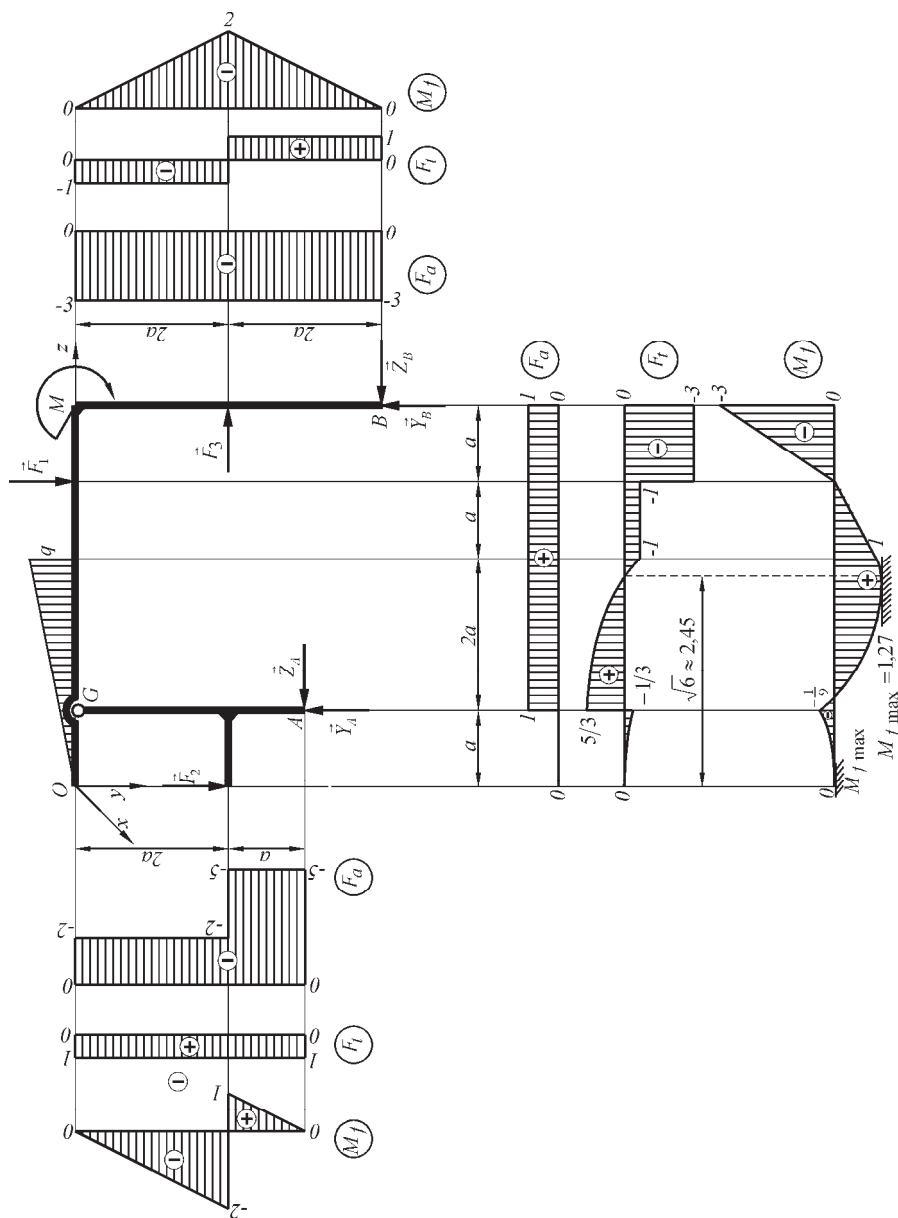
Slika 20 Gerberov okvirni nosač

Rešenje:

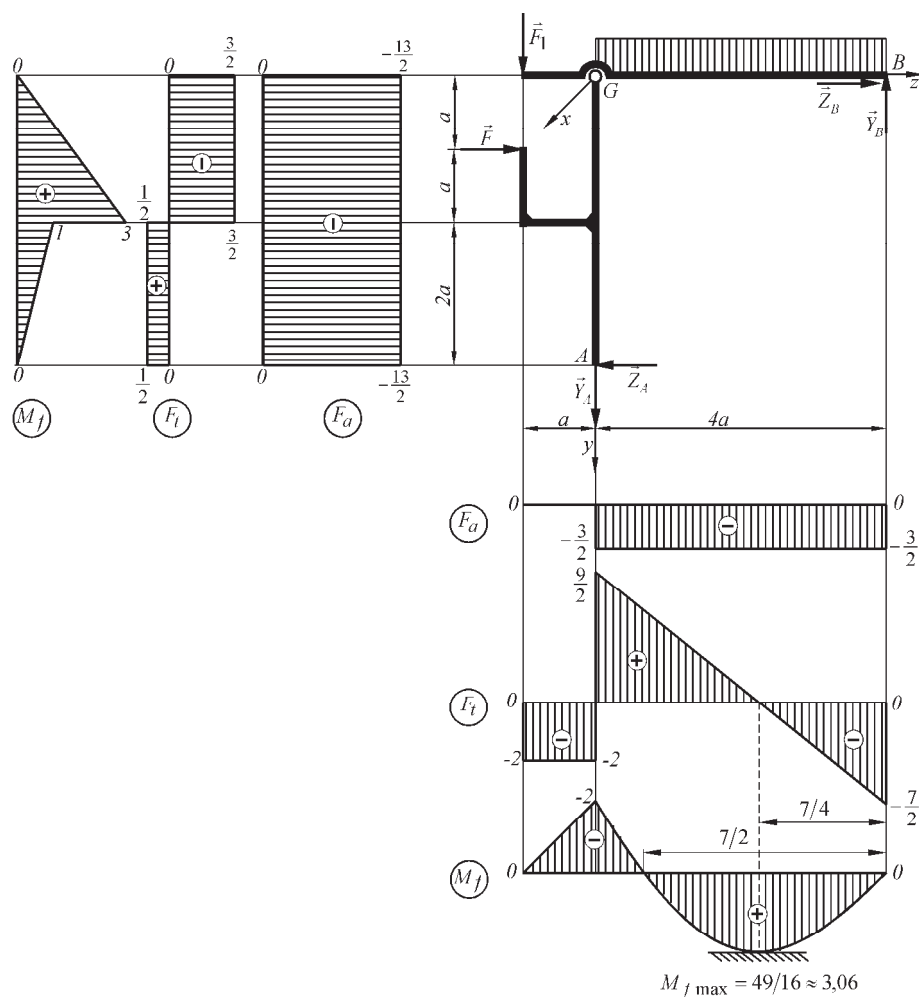
Projekcije reakcija veza (slika 20.1) datog okvirnog nosača su:

$$Z_A = \frac{1}{2} \text{ kN}, \quad Y_A = -\frac{13}{2} \text{ kN}, \quad Z_B = -\frac{3}{2} \text{ kN}, \quad Y_B = \frac{7}{2} \text{ kN}$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 20.1.



Slika 19.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina



Slika 20.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

21. Za dati okvirni nosač prikazan na slici 21 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame ako je $F = F_1 = qa$, $q = 2 \frac{kN}{m}$ i $a = 1m$.

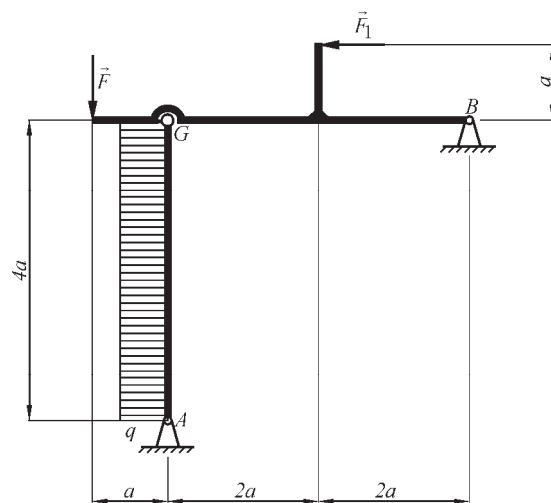
Rešenje:

Projekcije reakcija veza (slika 21.1) datog okvirnog nosača su:

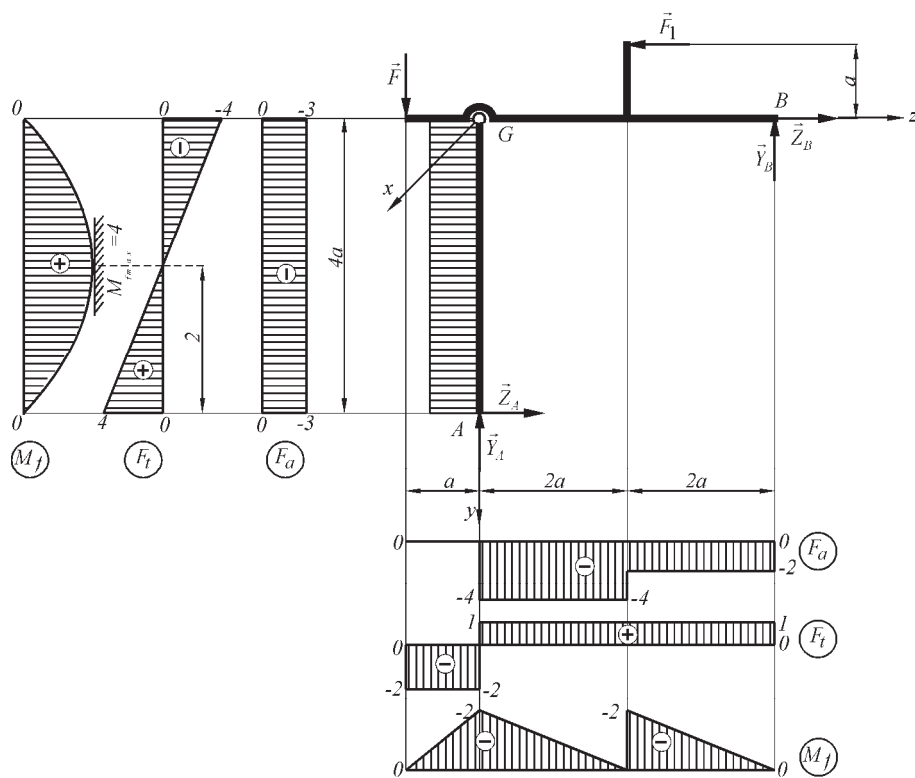
$$Z_A = -4kN, \quad Y_A = 3kN,$$

$$Z_B = -2kN, \quad Y_B = -1kN.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 21.1.



Slika 21 Gerberov okvirni nosač



slika 21.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

22. Za okvirni nosač prikazan na slici 22 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je,

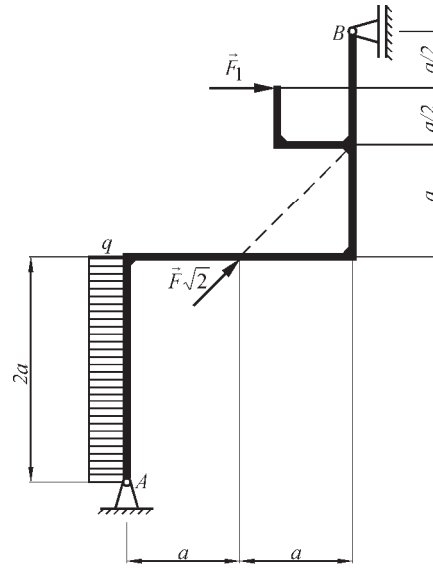
$$F = F_1 = q \cdot 2a, \quad q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \text{ i } a = 1 \text{ m}.$$

Rešenje:

Projekcije reakcija veza okvirnog nosača prikazanog na slici 22.1 su:

$$Z_A = \frac{13}{4} \text{ kN}, \quad Y_A = 2 \text{ kN}, \quad Z_B = \frac{11}{4} \text{ kN}.$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 22.1.

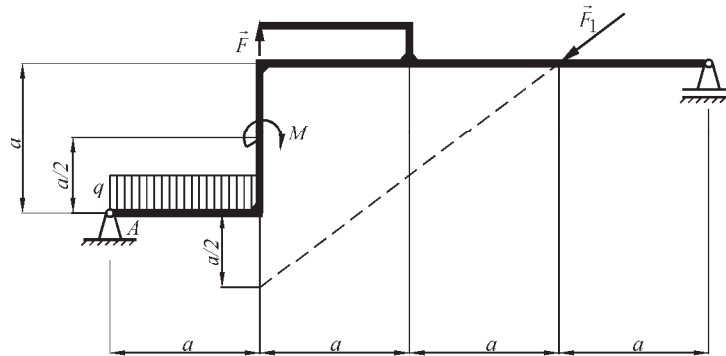


Slika 22 Okvirni nosač

23. Za okvirni nosač opterećen kao što je prikazano na slici 23 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame.

Dato je:

$$F = F_1 = qa, \quad M = \frac{qa^2}{2}, \quad q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad a = 1 \text{ m}$$



Slika 23 Okvirni nosač

Rešenje:

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen veza i prikazan na slici 23.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow \quad Z_A - \frac{4}{5} F = 0, \quad (1)$$

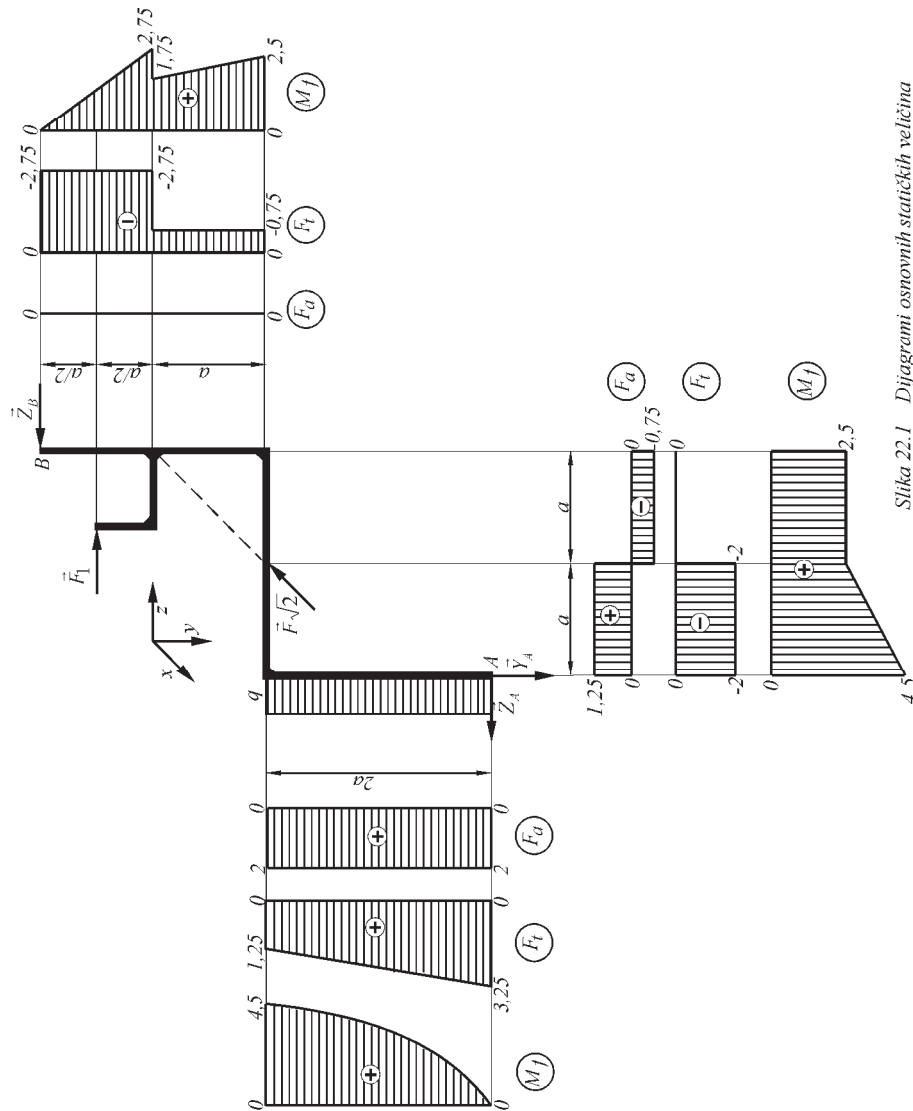
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \quad -Y_A + qa - F + \frac{3}{5} F - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -q \frac{a^2}{2} - M + Fa + \frac{4}{5}Fa - \frac{3}{5} \cdot 3Fa + Y_B \cdot 4a = 0. \quad (3)$$

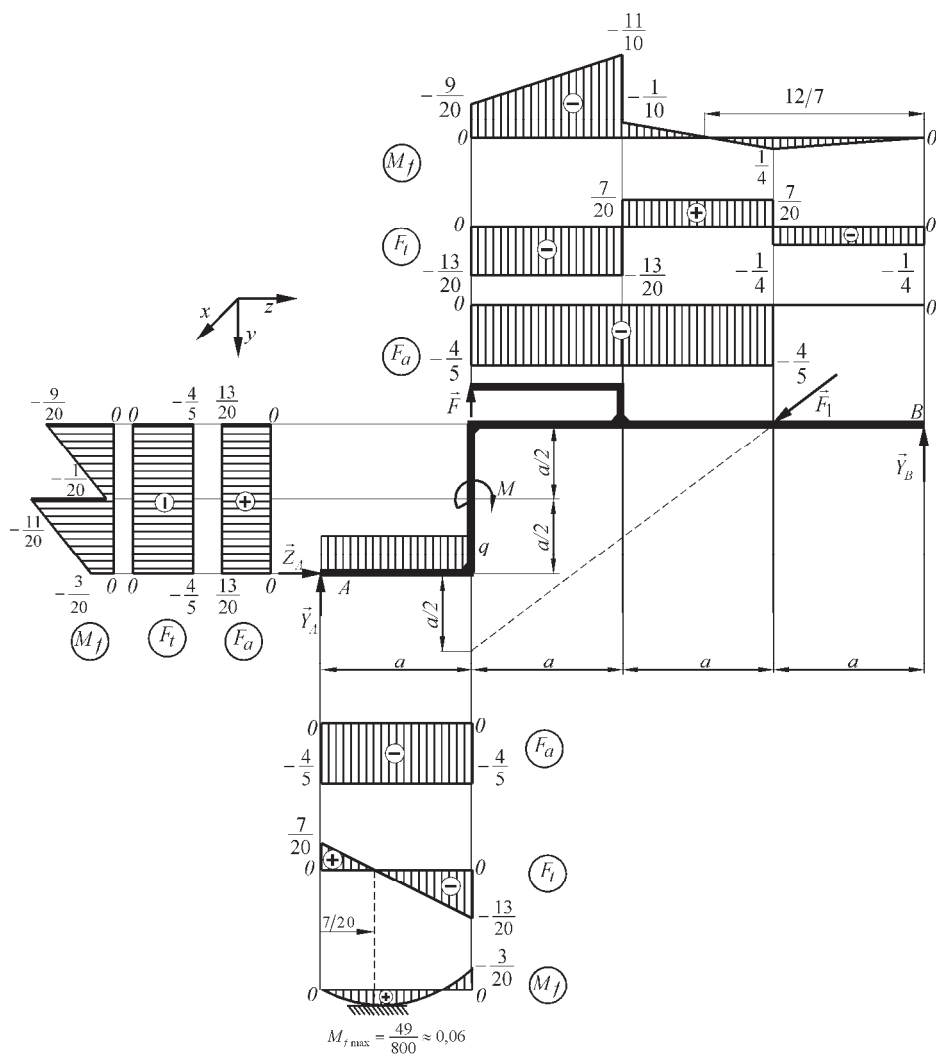
Rešavanjem prethodnog sistema jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Z_A = \frac{4}{5}kN, \quad Y_A = \frac{7}{20}kN, \quad Y_B = \frac{1}{4}kN. \quad (4)$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 23.1.



Slika 22.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina



Slika 23.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

24. Za Gerberov nosač prikazan na slici 24 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je $F = F_1 = 2 \text{ kN}$, $q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $a = 1 \text{ m}$.

Rešenje:

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuju na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 24.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A + F - Z_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + F + 2qa - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -F \cdot 2a - F \cdot a - 2q \cdot 2a^2 + Y_B \cdot 6a + Z_B \cdot 4a = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Gx}^{(BG)} = 0 \Rightarrow -Z_B \cdot 3a + Y_B \cdot 3a = 0. \quad (4)$$

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Z_B = Y_B = 1kN, \quad Z_A = -1kN, \quad Y_A = 3kN. \quad (5)$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 24.1.

25. Za Gerberov nosač opterećen kao što je prikazano na slici 25 odrediti reakcije veze i nacrtati statičke dijagrame ako je

$$F = F_I = qa, \quad M = qa^2,$$

$$q = 1 \frac{kN}{m} \text{ i } a = 1m.$$

Rešenje:

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na nosač oslobođen od veza i prikazan na slici 25.1 su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + F = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow +Y_A + F - 2qa - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow -M_A + 2qa \cdot 2a - M + M + F \cdot 3a - F \cdot 7a + Y_B \cdot 6a = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Gx}^{(GB)} = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 3a - F \cdot 4a + F \cdot 3a + M - M = 0. \quad (4)$$

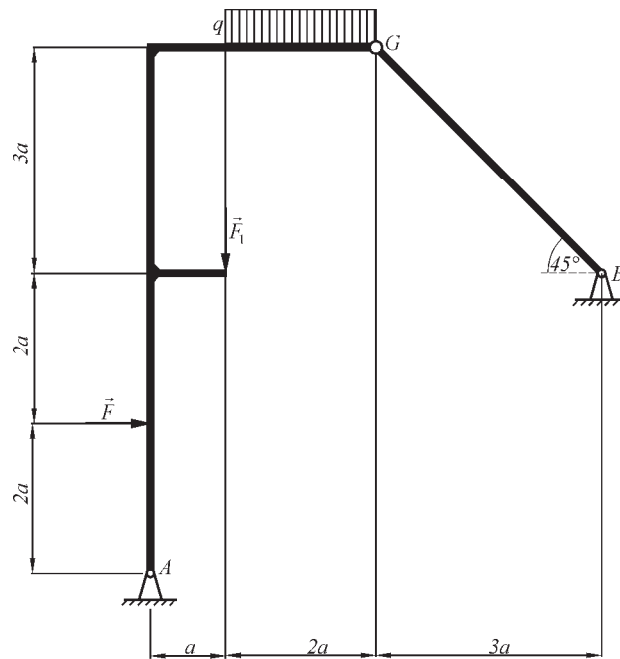
Rešavanjem prethodnog sistema jednačina dobijaju se projekcije reakcija veza:

$$Z_A = 1kN, \quad Y_A = \frac{4}{3}kN, \quad Y_B = \frac{1}{3}kN, \quad M_A = 2kNm \quad (5)$$

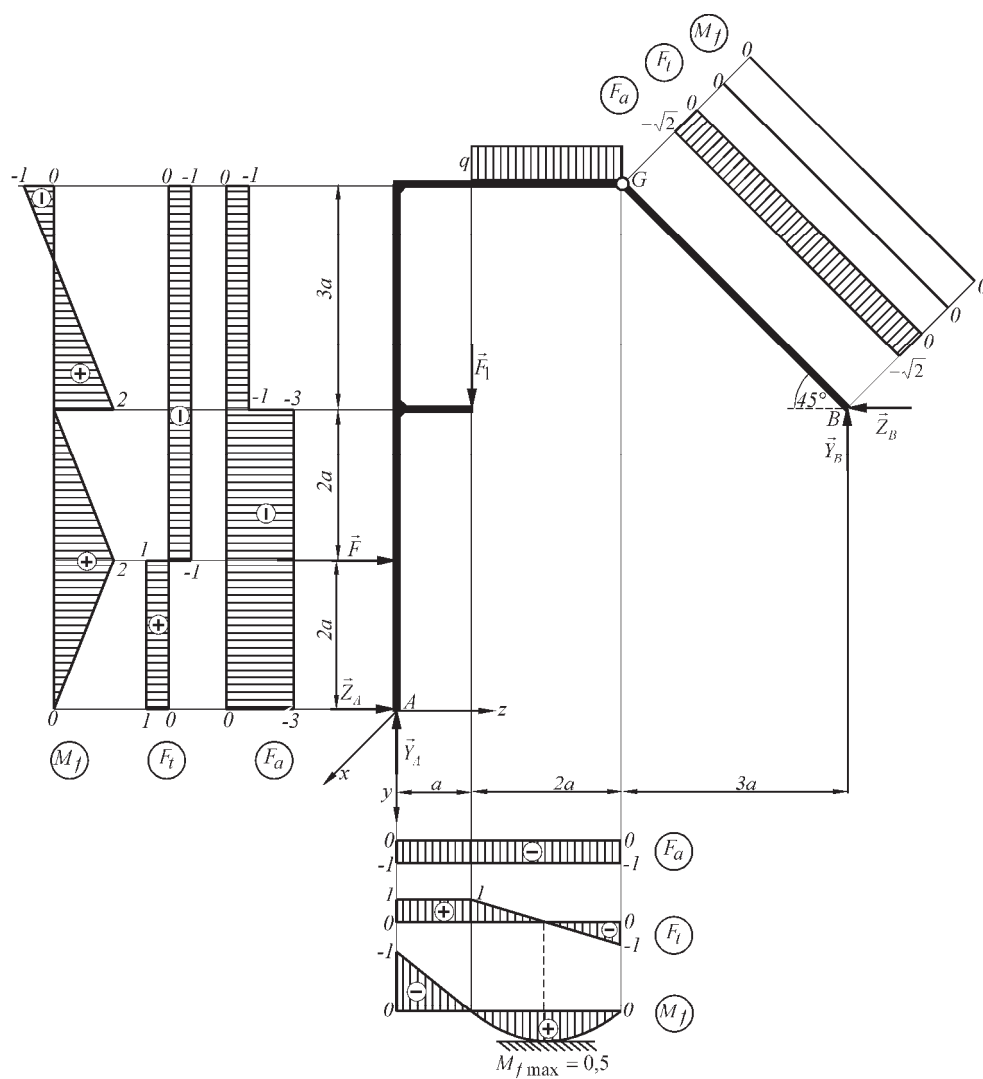
Provera:

$$\sum M_{Bx} = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 6a + Z_A \cdot 5a - M_A - q \cdot 2a \cdot 4a + M - M - F \cdot 2a - F \cdot a \equiv 0, \quad (6)$$

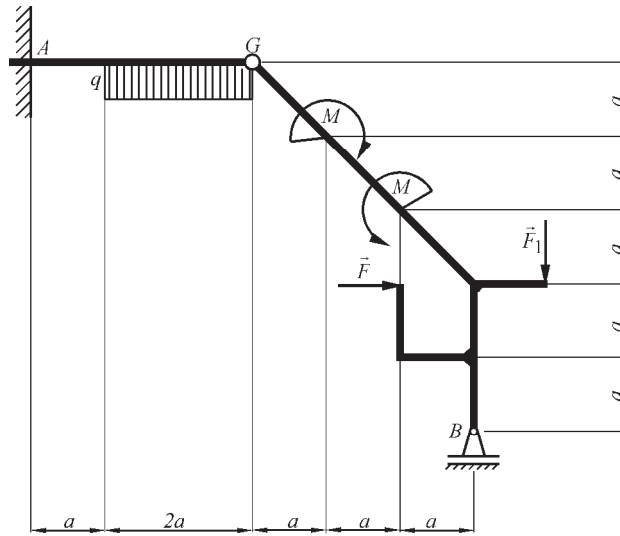
Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 25.1.



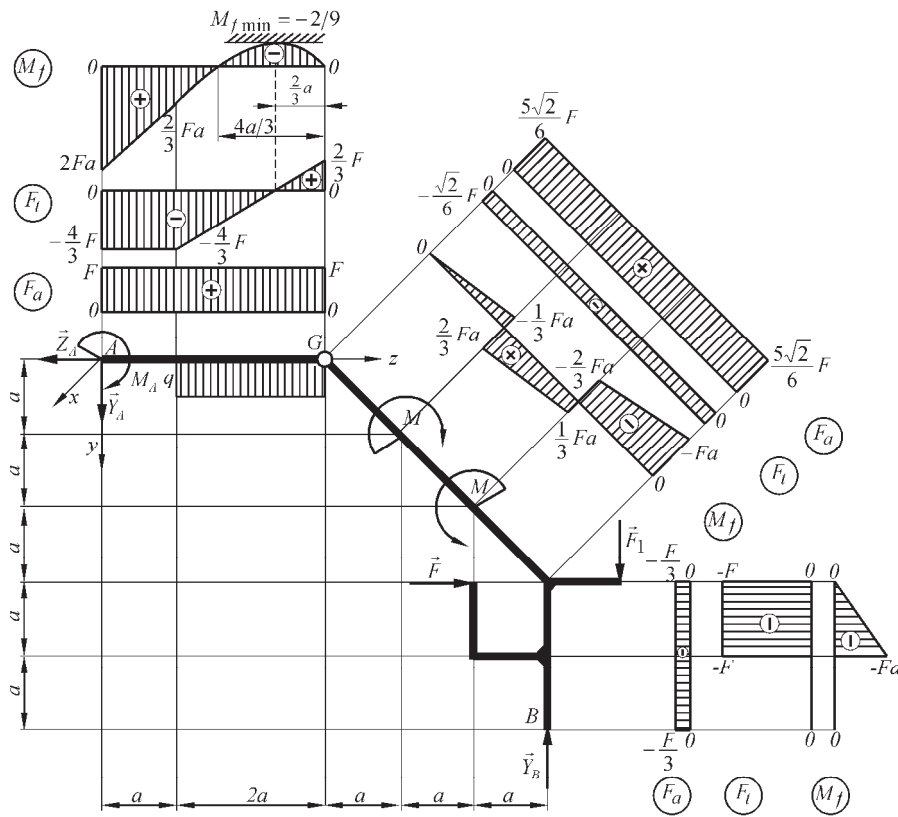
Slika 24 Gerberov okvirni nosač



Slika 24.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina



Slika 25 Gerberov nosač



Slika 25.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

26. Za nosač prikazan na slici 26 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je

$$F = F_1 = F_2 = 2 \text{ kN},$$

$$q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad a = 1 \text{ m}$$

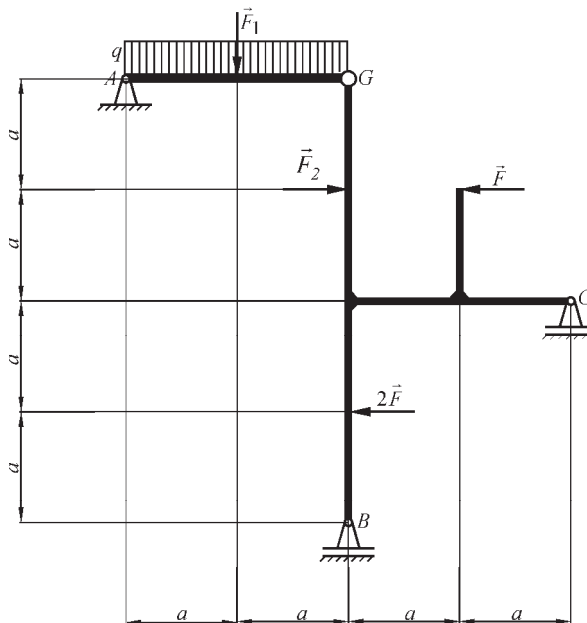
Rešenje:

Projekcije reakcija veza okvirnog nosača prikazanog na slici 26.1 su:

$$Z_A = 4 \text{ kN}, \quad Y_A = 3 \text{ kN},$$

$$Y_B = 3 \text{ kN}, \quad Y_C = 6 \text{ kN}$$

Dijagrami osnovnih statičkih veličina predstavljeni su na slici 26.1.



Slika 26 Gerberov okvirni nosač

27. Za nosač prikazan na slici

27 odrediti reakcije veza i nacrtati osnovne statičke dijagrame ako je

$$F = F_1 = 1 \text{ kN}, \quad q = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \text{ i } \quad F_2 = 2F = 2 \text{ kN}, \quad a = 1 \text{ m}.$$

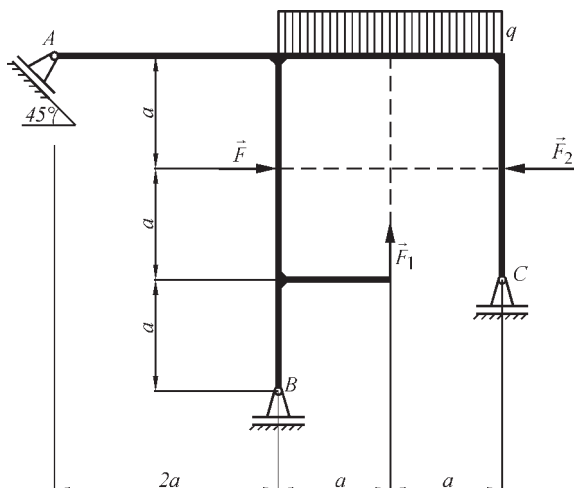
Rešenje:

Projekcije reakcija veza okvirnog nosača prikazanog na slici 27.1 su:

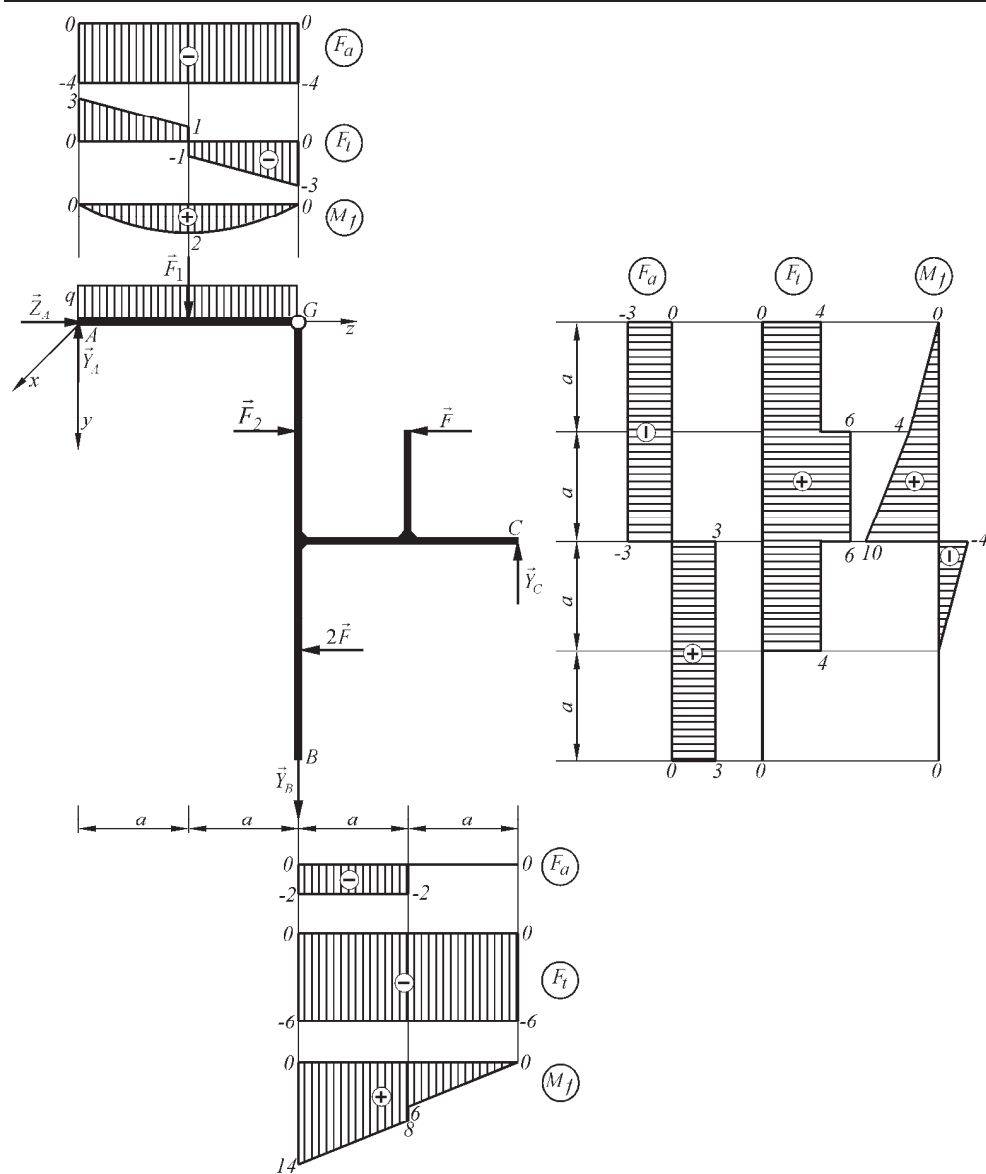
$$Z_A = Y_A = 1 \text{ kN}, \quad R_A = \sqrt{2} \text{ kN}$$

$$Y_B = 1 \text{ kN}, \quad Y_C = 5 \text{ kN}$$

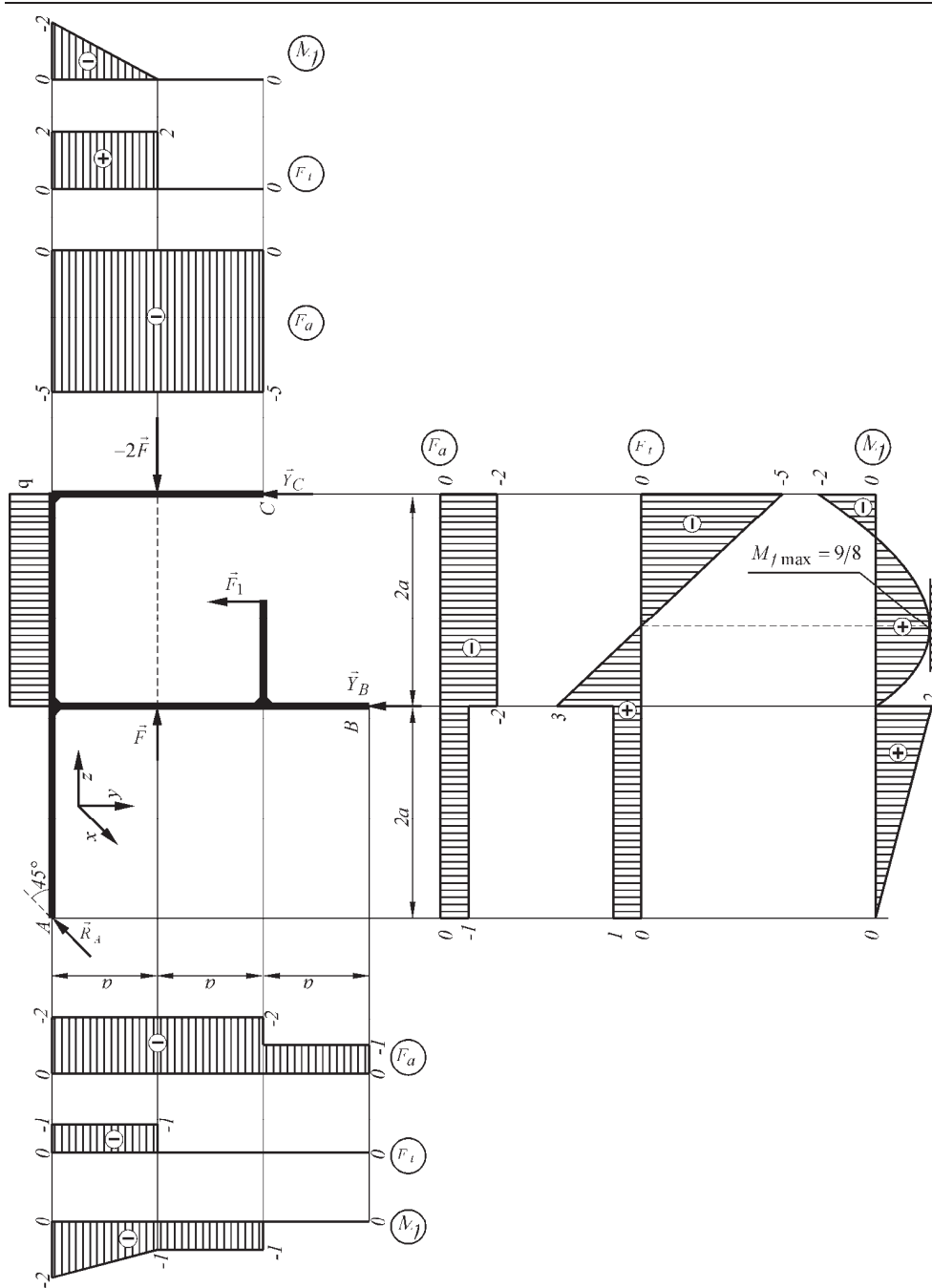
Dijagrami osnovnih statičkih veličina prikazani su na slici 27.1.



Slika 27 Okvirni nosač



Slika 26.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina



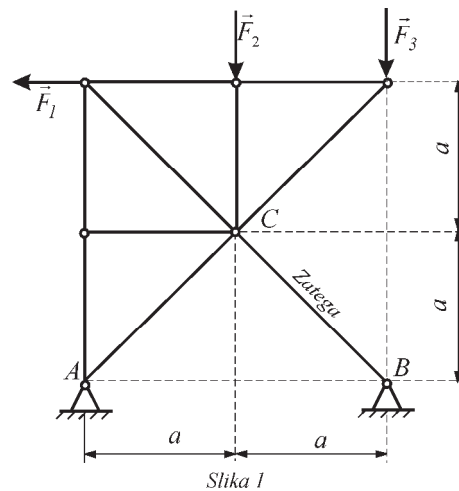
Slika 27.1 Dijagrami osnovnih statičkih veličina

6.2 RAVNI REŠETKASTI NOSAČI

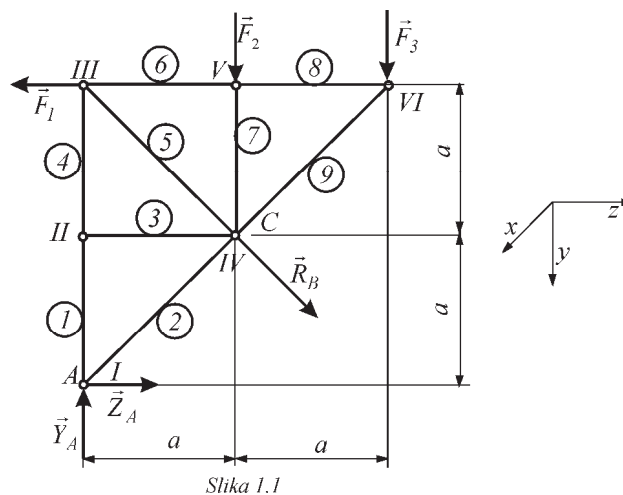
1. Rešetkasti nosač, prikazan na slici 1, vezan osloncima A i B i učvršćen zategom BC , opterećen je sistemom sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$. Intenziteti datih sila su: $F_1 = 2F$, $F_2 = F$, $F_3 = F$. Odrediti sile¹ u štapovima rešetke.

Rešenje:

Najpre treba proveriti **statičku određenost rešetke**, odnosno nepromenljivost, po obrascu $n = 2s - 3$, gde je $n = 9$ - broj štapova, a $s = 6$ - broj čvorova, pa je $9 = 2 \cdot 6 - 3$, što znači da je broj štapova i zglobova dovoljan da obezbedi nepromenljivost oblika rešetke.



Usvajanje koordinatnog sistema se vrši kao i kod drugih ravnih nosača (slika 1.1).



¹ Osnovni zadatak vezan za razmatranje rešetkastih nosača predstavlja određivanje unutrašnjih sila u štapovima rešetke.

Određivanje spoljašnjih reakcija veza. Na ravan rešetkasti nosač oslobođen veza dejstvuju aktivne sile: \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 , i reakcije spoljašnjih veza u tačkama A i B: \vec{R}_A i \vec{R}_B . Linija dejstva reakcije \vec{R}_B se poklapa s pravcem zatege BC, dok linija dejstva reakcije \vec{R}_A nije poznata pa se reakcija \vec{R}_A određuje preko svojih komponenta \vec{Z}_A i \vec{Y}_A , pri čemu je $\vec{R}_A = \vec{Z}_A + \vec{Y}_A$. Analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na nosač glase (slika 1.1):

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - 2F + R_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + F + F + R_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow 2F \cdot 2a - F \cdot a - R_B a \sqrt{2} = 0, \quad (3)$$

odakle sledi

$$Z_A = \frac{3}{2}F, \quad Y_A = -\frac{5}{2}, \quad R_B = \frac{\sqrt{2}}{2}F. \quad (4)$$

Za **određivanje sila u štapovima rešetke** (unutrašnjih reakcija) primenjuju se dve metode:

- *metod presecanja štapova vezanih za jedan čvor,*
- *metod preseka rešetke (Riterov metod),*

Metod presecanja štapova vezanih za jedan čvor (ili metod isecanja čvorova) sastoji se u ispitivanju ravnoteže svakog čvora posebno. Neka su čvorovi obeleženi rimskim brojevima I, II, ..., VI, a štapovi arapskim brojevima 1, 2, ..., 9. Postupak počinje od čvora u kome se sučeljavaju samo dva štapa, na primer čvor I (A). Isečen zglobov se izdvaja iz konstrukcije (slika 1.2) i posmatra se njegova ravnoteža. U tom čvoru se sučeljavaju sile: reakcija spoljašnje veze \vec{R}_A , i reakcije presečenih štapova: \vec{S}_1 i \vec{S}_2 . Geometrijski uslov ravnoteže pomenutog sistema sučeljnih sila glasi

$$(\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{S}_1, \vec{S}_2) \sim 0. \quad (5)$$

Smerovi sila \vec{S}_1 i \vec{S}_2 nisu poznati i mogu se pretpostaviti. Na slici 1.2 smerovi sila \vec{S}_1 i \vec{S}_2 su pretpostavljeni ka čvoru I. Analitički uslovi ravnoteže mogu se pisati kada su ucrtane sve poznate i pretpostavljene sile u posmatrani čvor:

$$\sum Z_i = Z_A - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (6)$$

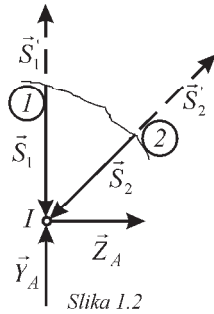
$$\sum Y_i = -Y_A + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_1 = 0. \quad (7)$$

Iz uslova (6) i (7) slede intenziteti sila u štapovima 1 i 2 respektivno:

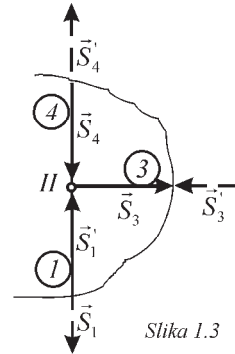
$$S_1 = F, \quad S_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}F. \quad (8)$$

Karakter sila u štapovima 1 i 2 zavisi od pretpostavljenih smerova i dobijenih brojnih vrednosti odgovarajućih sila. Iz rezultata (8) sledi da su smerovi sila \vec{S}_1 i \vec{S}_2 dobro

pretpostavljeni jer su dobijene pozitivne brojne vrednosti. Štapovi 1 i 2 opterećeni su na pritisak².



Slika 1.2



Slika 1.3

Pošto se štapovi 1 i 2 nalaze u ravnoteži to znači da na zglob II djeluje sila $\vec{S}_1' = -\vec{S}_1$, i na zglob IV djeluje sila $\vec{S}_2' = -\vec{S}_2$ (prva aksioma statike). Posmatra se zatim čvor II (slika 1.3) na koji djeluje poznata sila \vec{S}_1' i nepoznate sile reakcije štapova 4 i 3 (\vec{S}_4 i \vec{S}_3). Sistem sučelnih sila $\vec{S}_1', \vec{S}_3, \vec{S}_4$ treba da bude u ravnoteži, tj.

$$(\vec{S}_1', \vec{S}_3, \vec{S}_4) \sim 0. \quad (9)$$

Analitički uslovi ravnoteže ovog sistema sila su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_3 = 0, \quad (10)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_4 - S_1' = 0, \quad (11)$$

odakle sledi:

$$S_3 = 0, \quad S_4 = F. \quad (12)$$

Štap 3 naziva se *nula štap* po tome što je intenzitet sile u njemu jednak nuli, i može se ukloniti pod uslovom da rešetka ostaje geometrijski nepromenljiva. Sila u štapu 4 je po intenzitetu jednaka sili \vec{S}_1' , suprotnog smera. Po prvoj aksiomi statike u zglobo III djeluje sila $\vec{S}_4' = -\vec{S}_4$. Štap 4 je opterećen na pritisak.

Zatim se posmatra ravnoteža čvora III (slika 1.4). Presecaju se štapovi koji se sučeljavaju u posmatranom čvoru (4, 5 i 6) i njihovo se dejstvo zamenjuje odgovarajućim silama. Tako u čvoru III djeluju poznate sile $2\vec{F}$ i \vec{S}_4' i nepoznate reakcije štapova \vec{S}_5 i \vec{S}_6 .

Analitički uslovi ravnoteže sistema sučelnih sila u čvoru III su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_6 + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - 2F = 0, \quad (13)$$

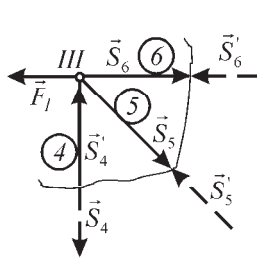
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S_4' + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (14)$$

odakle sledi:

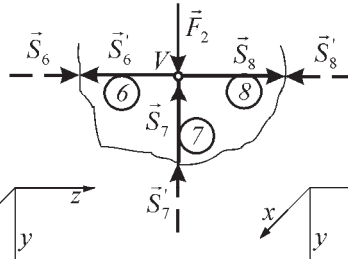
² Ako se unutrašnja sila odredi sa pozitivnim znakom, a orijentisana je prema preseku štapa, štap je opterećen na istezanje (istezao bi se ako bi se napustio model krutog tela). Ako je unutrašnja sila određena sa negativnim znakom, a orijentisana je prema preseku štapa, štap je opterećen na pritisak.

$$S_5 = F\sqrt{2}, \quad S_6 = F. \quad (15)$$

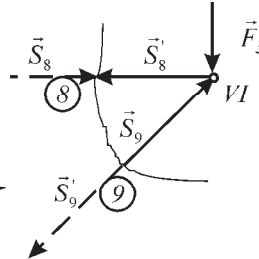
Smerovi sila \vec{S}_5 i \vec{S}_6 su ka presecima štapova 5 i 6, pa su oni opterećeni na istezanje.



Slika 1.4



Slika 1.5



Slika 1.6

Istim postupkom određuju se sile u čvoru V . Pored poznatih sila \vec{F}_2 i \vec{S}_6' , u čvoru V deluju i nepoznate sile u štapovima \vec{S}_7 i \vec{S}_8 (slika 1.5). Sistem sučeljnih sila $(\vec{F}_2, \vec{S}_6', \vec{S}_8, \vec{S}_7)$ treba da bude u ravnoteži, tj.

$$(\vec{F}_2, \vec{S}_6', \vec{S}_8, \vec{S}_7) \sim 0. \quad (15)$$

Analitički uslovi ravnoteže glase:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_8 - S_6' = 0, \quad (16)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -F_2 + S_7 = 0. \quad (17)$$

odakle je

$$S_8 = S_6', \quad S_7 = F_2. \quad (18)$$

Dakle, štap 7 opterećen je na pritisak, a štap 8 na istezanje.

Najzad treba odrediti silu u štapu 9. Posmatra se čvor VI (slika 1.6) u kome se sučeljavaju sile \vec{F}_3 , \vec{S}_8' , \vec{S}_9 koje moraju biti u ravnoteži. Zato je dovoljna samo jedna jednačina iz analitičkih uslova ravnoteže čvora VI (intenzitet sile u štapu 8 već je određen)

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_8' + S_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (19)$$

odakle sledi

$$S_9 = F\sqrt{2}. \quad (20)$$

Štap 9 je opterećen na pritisak.

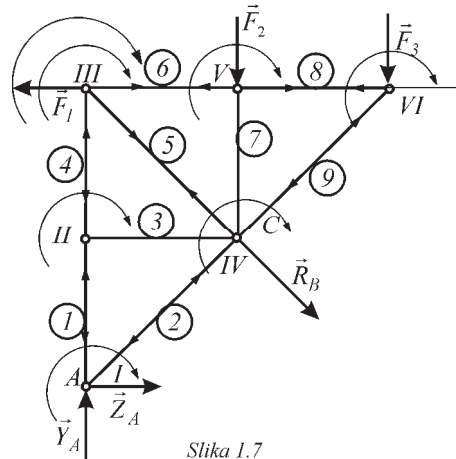
Čvor IV je sada potpuno određen, jer su određeni intenziteti sila u svim štapovima koji se u njemu sučeljavaju. Može se proveriti iz analitičkih uslova ravnoteže sučeljnog sistema sila $(\vec{S}_2', \vec{S}_3', \vec{S}_5', \vec{S}_7', \vec{S}_9')$ koji deluje u čvoru IV da je i ovaj sistem sila u ravnoteži.

Na slici 1.7 prikazani su pravi smerovi svih unutrašnjih i spoljašnjih sila koje opterećuju posmatranu rešetku.

Metod presecanja štapova vezanih za jedan čvor lako je primeniti kada rešetka nema veliki broj zglobova. Međutim, za bolji pregled sila u štapovima, ako rešetka ima veliki broj zglobova koristi se *Kremonin plan sila*.

Kremonina metoda započinje konstruisanjem poligona spoljašnjih sila i reakcija veza koje deluju na rešetku (reakcije veza su određene iz uslova ravnoteže), pošto je proverena statička određenost rešetke.

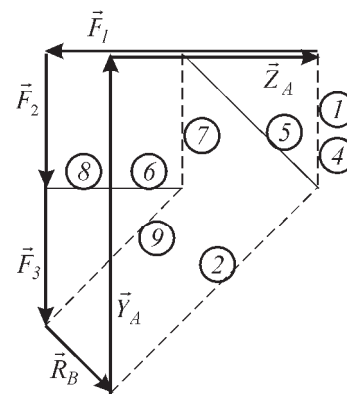
Poligon spoljašnjih sila i reakcija veza mora biti nacrtan u izabranoj razmeri crtanja (u_F), obilaženjem oko rešetke ili u smeru kazaljke na satu ili u suprotnom smeru, na primer: $\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{R}_B$. Tako dobijen poligon (slika 1.8) mora biti zatvoren i služi za konstruisanje poligona sila u svim čvorovima rešetke na sledeći način. Polazi se od čvora gde se sučeljavaju dva štapa (čvora *I* recimo), od poznate sile, obilazeći čvor *I* u jednom smeru na primer $\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{S}_1, \vec{S}_2$. Ovaj poligon sila mora



Slika 1.7

biti zatvoren. Zatim, posmatra se čvor *II*. Sistem sila $(\vec{S}_1, \vec{S}_4, \vec{S}_3)$ čini zatvoren poligon sila (sila $S_3 = 0$). Na redu je čvor *III*. Sistem sila $(\vec{S}_4, 2\vec{F}, \vec{S}_6, \vec{S}_5)$ čini zatvoren poligon sila. Na slici 1.7 ucrtavaju se smerovi tih sila polazeći od sile \vec{S}_4 . Čvor *VI* je u ravnoteži pa je poligon sila $\vec{F}_3, \vec{S}_9, \vec{S}_8$ zatvoren. Polazi se od sile \vec{F}_3 , nanosi pravac sile \vec{S}_9 i zatim pravac sile \vec{S}_8 . U čvoru *V* dejstvuju poznate sile $\vec{S}_6, \vec{F}_2, \vec{S}_8$ i nepoznata sila \vec{S}_7 . Polazeći od sile \vec{S}_6 zatvara se poligon sila silom \vec{S}_7 . Pri konstruisanju Kremoninog plana sila treba voditi računa o usvojenom smeru obilaženja oko rešetke pri crtanju plana spoljašnjih sila kao i oko svakog čvora posebno.

Intenziteti sila u štapovima rešetke određeni su kao proizvod razmere za silu i dužine izmerene na Kremoninom planu sila. Znakom plus označene su sile istezanja, a znakom minus sile pritiska u tabeli:

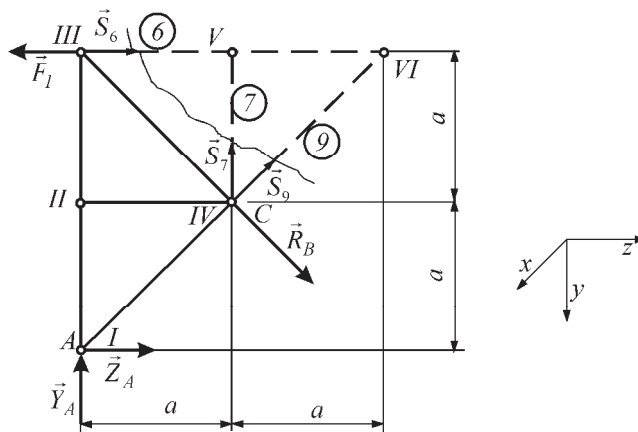


Slika 1.8 Kremonin plan sila

štap	1	2	3	4	5	6	7	8	9
pritis. (-)	F	$\frac{3\sqrt{2}}{2}F$	-	F			F		$F\sqrt{2}$
istez. (+)			-		$F\sqrt{2}$	$F\sqrt{2}$		F	

Pritisnuti štapovi prikazani su isprekidanim linijama na Kremoninom planu sila (slika 1.8), dok su zategnuti štapovi obeleženi punim linijama.

Metodom preseka rešetke (Riterovom metodom) određuju se sile u štapovima u pojedinim preseccima rešetke.



Slika 1.9

Posle određivanja reakcija veza i provere uslova $n = 2s - 3$, rešetka se "preseca" na mestu gde je potrebno odrediti unutrašnje sile u štapovima, (pri čemu broj presečenih štapova ne sme biti veći od tri) na primer: 6, 7 i 9. Posmatra se zatim ravnoteža samo jednog dela rešetke (slika 1.9) recimo levog dela rešetke. Ovaj deo rešetke izložen je dejstvu ravnog sistema sila $(\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{F}_1, \vec{S}_6, \vec{S}_7, \vec{S}_9)$ koji treba da bude uravnotežen. Nepoznate sile \vec{S}_6, \vec{S}_7 i \vec{S}_9 određuju se iz analitičkih uslova ravnoteže (najčešće se koristi treći oblik uslova ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila levog dela rešetke, tj. tri momentne jednačine):

$$\sum M_{VI} = 0 \Rightarrow -S_7 \cdot a - Y_A \cdot 2a + Z_A \cdot 2a = 0, \quad (20)$$

$$\sum M_{IV} = 0 \Rightarrow -S_6 \cdot a + 2F \cdot a - Y_A \cdot a + Z_A \cdot a = 0, \quad (21)$$

$$\sum M_V = 0 \Rightarrow Z_A \cdot 2a - Y_A \cdot a + S_9 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (22)$$

Rešavanjem ovog sistema algebarskih jednačina sledi:

$$S_7 = -3F, \quad S_6 = F, \quad S_9 = -F\sqrt{2}. \quad (23)$$

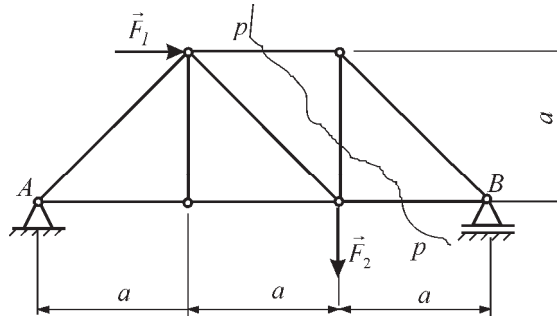
Kako su znaci ispred brojnih vrednosti sila \vec{S}_7 i \vec{S}_9 negativni, znači da smerovi ovih sila u naznačenom preseku nisu dobro pretpostavljeni.

Prednost metode preseka rešetke je u tome što se mogu odrediti sile u pojedinim štapovima, a da se pri tom ne određuju sile u ostalim štapovima. Međutim ako je potrebno odrediti sile u svim štapovima Riterov metod postaje složen.

Često se navedene metode kombinuju, što zavisi od oblika rešetke i njene složenosti.

2. Ravanski rešetkasti nosač vezan osloncima A i B i opterećen silama $F_1 = 2kN$ i $F_2 = 5kN$ kao na slici 2. Kremoninim metodom odrediti unutrašnje sile u

štapovima. U preseku $p - p$, Riterovom metodom odrediti unutrašnje sile u štapovima.

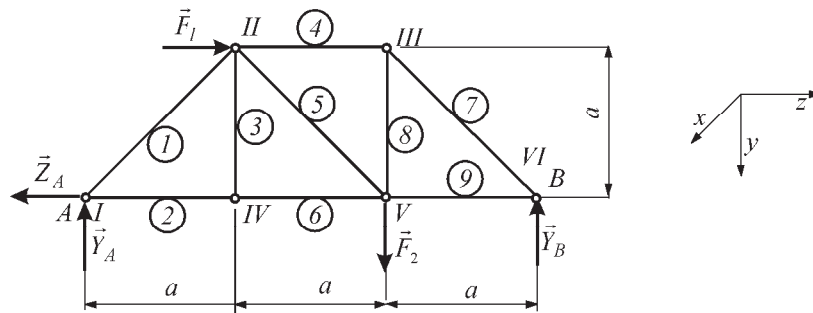


Slika 2

Rešenje:

Provera statičke određenosti rešetke (slika 2.1)

$$n = 2s - 3; \quad n = 9, s = 6 \Rightarrow 9 = 2 \cdot 6 - 3$$



Slika 2.1

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na rešetku oslobođenu veza su:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow F_1 - Z_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_A + F_2 - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F_1 \cdot a - F_2 \cdot a + Y_B \cdot 3a = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem prethodnih jednačina, slede projekcije reakcija veza:

$$Z_A = 2kN, \quad Y_A = 1kN, \quad Y_B = 4kN.$$

Konstrukcija *Kremoninog plana* sila počinje crtanjem poligona spoljašnjih sila (slika 2.2), polazeći od čvora I. Sila u štapu 3 jednaka je nuli. Smerovi ostalih sila označeni su na slici 2.1. U preseku $p - p$ treba odrediti nepoznate sile $\vec{S}_4, \vec{S}_8, \vec{S}_9$. "Odbaci" se levi deo rešetke (slika 2.3). Tada sistem sila $(\vec{S}_4, \vec{S}_8, \vec{S}_9, \vec{Y}_B)$ koji dejstvuje na desni deo rešetke treba da bude uravnotežen

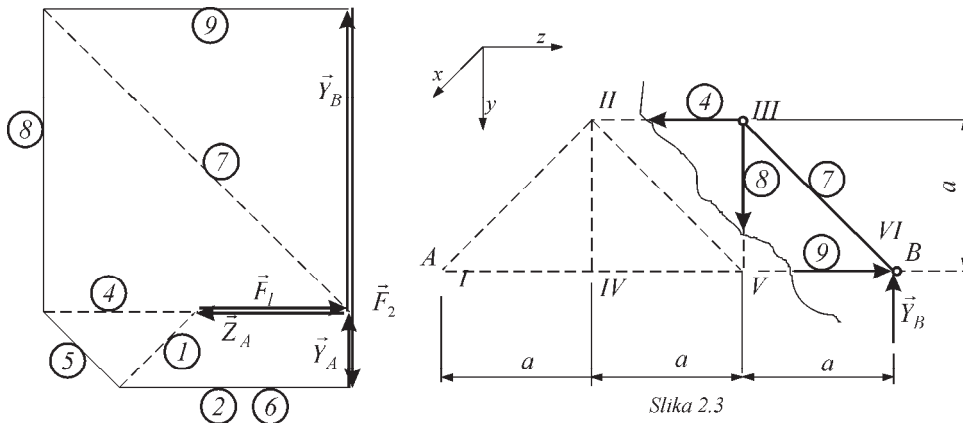
$$(\vec{S}_4, \vec{S}_8, \vec{S}_9, \vec{Y}_B) \sim 0. \quad (4)$$

Analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na desni deo rešetke su:

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_8 - Y_B = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_4 + S_9 = 0, \quad (6)$$

$$\sum M_{III} = 0 \Rightarrow S_9 \cdot a + Y_B \cdot a = 0. \quad (7)$$



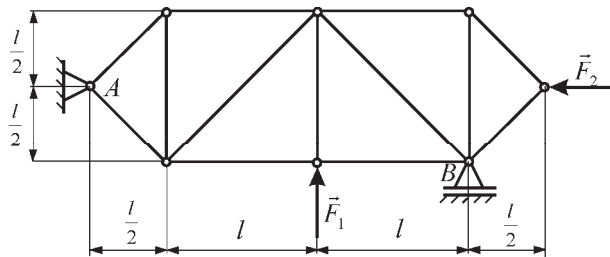
Slika 2.2 Kremonin plan sila

Iz (5), (6) i (7) sledi

$$S_4 = 4kN, S_8 = 4kN \text{ i } S_9 = -4kN.$$

Iz dobijenih rezultata sledi da smer sile u štapu 9 nije dobro pretpostavljen.

3. Za rešetkastu konstrukciju opterećenu kao na slici analitičkim metodom ravnoteže čvorova odrediti sile u svim štapovima. Poznato je $F_1 = 5$ i $F_2 = 4$



Slika 3

Rešenje:

Posmatrana rešetka ima $s=13$ štapa i $n=8$ čvorova. Uslov **statičke određenosti** rešetke glasi $s=2n-3$, odnosno $13=2 \cdot 8-3$, što znači da je posmatrana rešetka statički određena, odnosno geometrijski nepromenljiva.

Rešetka oslobođena spoljašnjih veza prikazana je na slici 3.1. Rešetka će biti u ravnoteži ako je ispunjen uslov

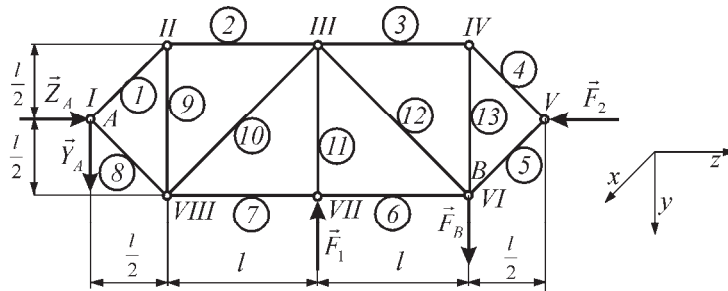
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{F}_B) \sim 0 \quad (1)$$

Analitički uslovi ravnoteže prethodnog sistema sila glase:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A - F_2 = 0, \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - F_1 + F_B = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Ax}(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow F_1 \cdot \left(l + \frac{l}{2}\right) - F_B \left(2l + \frac{l}{2}\right) = 0. \quad (4)$$



Slika 3.1

Projekcije reakcija oslonaca su:

$$F_B = 3, \quad Y_A = 2, \quad Z_A = 4. \quad (5)$$

Određivanje sila u štapovima postavljanjem analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji djeluju u čvorovima

Ravnoteža čvora I (slika 3.2)

Čvor I će biti u ravnoteži ako je ispunjen uslov

$$(\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{S}_1, \vec{S}_8) \sim 0, \quad (6)$$

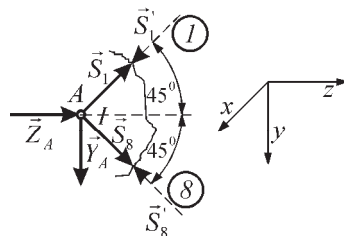
odnosno

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A + S_1 \cos 45^\circ + S_8 \cos 45^\circ = 0, \quad (7)$$

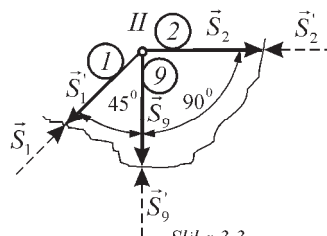
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - S_1 \sin 45^\circ + S_8 \sin 45^\circ = 0, \quad (8)$$

odakle se dobija

$$S_1 = -\sqrt{2}, \quad S_8 = -3\sqrt{2}.$$



Slika 3.2



Slika 3.3

Ravnoteža čvora II (slika 3.3)

Čvor II će biti u ravnoteži ako je ispunjen uslov

$$(\vec{S}'_1, \vec{S}_2, \vec{S}_9) \sim 0, \quad (9)$$

odnosno

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S'_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 = 0, \quad (10)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S'_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_9 = 0. \quad (11)$$

Znajući da je $S_1 = S'_1 = -\sqrt{2}$ iz predhodnog sistema algebarskih jednačina sledi:

$$S_2 = -1, \quad S_9 = 1$$

Ravnoteža čvora VIII (slika 3.4)

Čvor VIII će biti u ravnoteži ako je ispunjen uslov

$$(\vec{S}_7, \vec{S}'_8, \vec{S}'_9, \vec{S}_{10}) \sim 0, \quad (12)$$

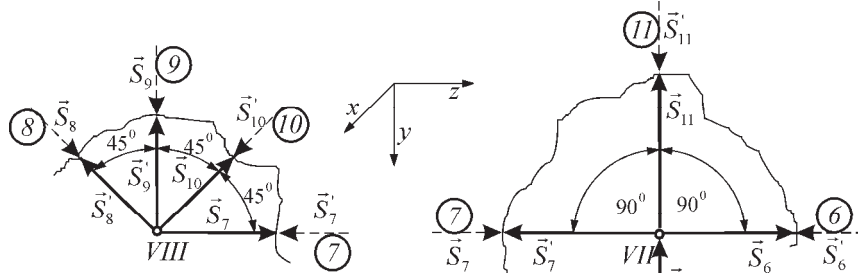
odnosno

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow S_7 + S_{10} \frac{\sqrt{2}}{2} - S'_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (13)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S'_8 \frac{\sqrt{2}}{2} - S'_9 - S_{10} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (14)$$

Obzirom da je $S'_8 = S_8$ i $S_9 = S'_9$ sledi:

$$S_{10} = 2\sqrt{2}, \quad S_7 = -5.$$



Slika 3.4

Slika 3.5

Ravnoteža čvora VII (slika 3.5)

Za ravnotežu čvora VII mora biti ispunjen uslov

$$(\vec{F}_1, \vec{S}_6, \vec{S}'_7, \vec{S}'_{11}) \sim 0, \quad (15)$$

odnosno

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S'_7 + S_6 = 0, \quad (16)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_1 - S_{11} = 0. \quad (17)$$

Obzirom da je $S_7 = S'_7$ sledi

$$S_6 = -5, \quad S_{11} = -5.$$

Ravnoteža čvora III (slika 3.6)

Čvor III će biti u ravnoteži ako je ispunjen uslov

$$(\vec{S}'_2, \vec{S}_3, \vec{S}'_{11}, \vec{S}'_{12}, \vec{S}'_{10}) \sim 0, \quad (18)$$

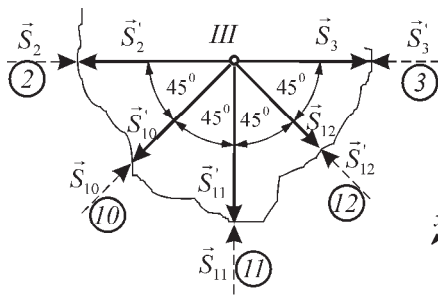
odnosno

$$\sum Z_i = 0 \quad \Rightarrow \quad -S'_2 - S'_{10} \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} + S_3 = 0, \quad (19)$$

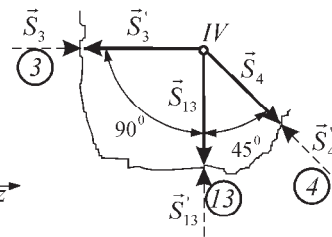
$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad S'_{10} \frac{\sqrt{2}}{2} + S'_{11} + S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (20)$$

Važi da je $S'_2 = S_2$, $S'_{10} = S_{10}$ i $S'_{11} = S_{11}$, pa iz (19) i (20) sledi:

$$S_3 = -2, \quad S_{12} = 3\sqrt{2}.$$



Slika 3.6



Slika 3.7

Ravnoteža čvora IV (slika 3.7)

Za ravnotežu čvora IV potreban je uslov

$$(\vec{S}'_3, \vec{S}_4, \vec{S}_{13}) \sim 0, \quad (21)$$

odnosno:

$$\sum Z_i = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_3 + S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (21)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{13} + S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (22)$$

Imajući u vidu da je $S_3 = S'_3$ sledi

$$S_4 = -2\sqrt{2}, \quad S_{13} = 2.$$

Ravnoteža čvora V (slika 3.8)

Čvor V će biti u ravnoteži ako je ispunjen uslov

$$(\vec{F}_2, \vec{S}_4', \vec{S}_5) \sim 0, \quad (23)$$

odnosno

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_4' \frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 = 0, \quad (24)$$

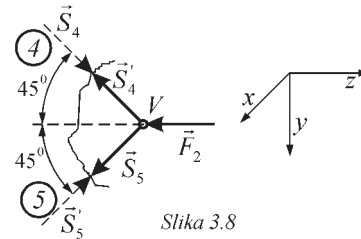
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_4' \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (25)$$

Obzirom da je $S_4 = S_4'$ iz druge jednačine ravnoteže sledi

$$S_5 = -2\sqrt{2}.$$

Prva jednačina nije bila potrebna za određivanje nepoznatih, već samo za proveru dobijenih rezultata jer je $S_4 = S_4'$ izračunato ranije.

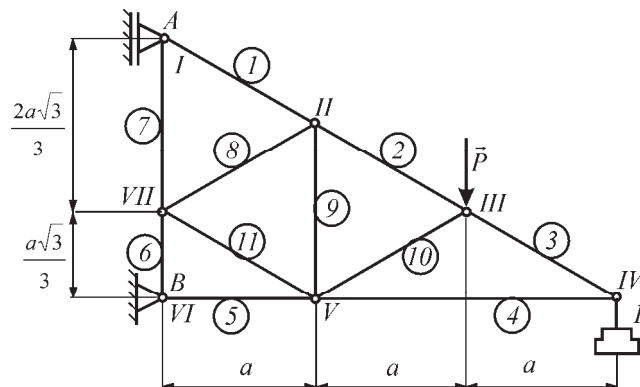
Obzirom da su u dosadašnjoj analizi smerovi svih sila u štapovima uzeti s pretpostavkom da su svi štapovi zategnuti, posle izračunatih vrednosti može se utvrditi pravi karakter opterećenosti štapova što je dato u tabeli.



Slika 3.8

štap	1	2	3	4	5	6
sila S_i	$-\sqrt{2}$	-1	-2	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	-5
	<i>prit.</i>	<i>prit.</i>	<i>prit.</i>	<i>prit.</i>	<i>prit.</i>	<i>prit.</i>
7	8	9	10	11	12	13
-5	$-3\sqrt{2}$	1	$2\sqrt{2}$	-5	$3\sqrt{2}$	2
<i>prit.</i>	<i>prit.</i>	<i>zat.</i>	<i>zat.</i>	<i>zat.</i>	<i>zat.</i>	<i>zat.</i>

4. Za rešetkastu konstrukciju kao na slici 4 geometrijskim postupkom ravnoteže čvorova odrediti sile u svim štapovima. Dato je $P = \sqrt{3}$ i $a = 1$.

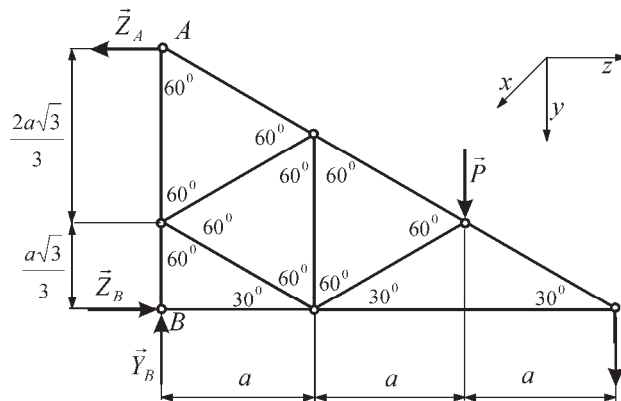


Slika 4

Rešenje:

Broj čvorova date rešetke je $n=7$, a broj štapova je $s=11$. Dakle relacija $s=2n-3$ je zadovoljena, tj. rešetkasti nosač je statički određen.

Geometrijski postupak određivanja sila u štapovima sastoji se u tome da se za svaki čvor nacrtaju odgovarajući poligon sila, i pri tome se treba držati jednog smera obilaženja oko čvorova. Počinje se od čvora za koji je moguće, iz poznatih opterećenja, prvo nacrtati poligon sila. Pre toga je potrebno kao i za ostale pomenute metode osloboditi rešetkasti nosač veza i odrediti njihove reakcije veza.



Slika 4.1

I – Određivanje reakcija veza (slika 4.1).

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na rešetkasti nosač su.

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -Z_A + Z_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow 2P - Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Bx} = 0 \Rightarrow Z_A \cdot a\sqrt{3} - 2a \cdot P - 3aP = 0, \quad (3)$$

odakle sledi:

$$Z_A = Z_B = 5, \quad Y_B = 2\sqrt{3}. \quad (4)$$

II – Određivanje sila u štapovima geometrijskim postupkom

S obzirom da su svi sistemi sila koji dejstvuju u pojedinim čvorovima rešetke sučeljni, geometrijski postupak određivanja sila u štapovima se svodi na konstrukciju poligona sila za svaki sistem sila posebno.

Ravnoteža čvora I

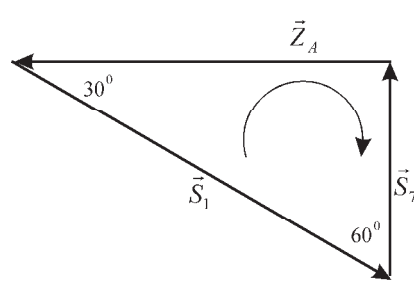
Geometrijski uslov ravnoteže čvora I glasi (slika 4.2):

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_7 + \vec{Z}_A = 0. \quad (5)$$

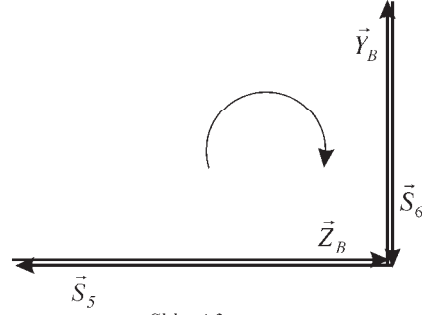
Poligon sila (slika 4.2) konstruiše se tako što se nanose sile od prve poznate (\vec{Z}_A u ovom slučaju) pa u smeru kazaljke na satu redom ucrtavaju se pravci ostalih sila. Pravci sila

su određeni pravcima odgovarajućih štapova (ovaj postupak je detaljno objašnjen u poglavlju o sučelnim silama). Iz trougla sila sa slike 4.2 slede relacije:

$$S_1 = \frac{Z_A}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}}, \quad S_7 = \frac{Z_A}{\tan 60^\circ} = \frac{5}{\sqrt{3}}. \quad (6)$$



Slika 4.2



Slika 4.3

Ravnoteža čvora VI

Geometrijski uslov ravnoteže čvora VI glasi (slika 4.3):

$$\vec{S}_5 + \vec{S}_6 + \vec{Z}_B + \vec{Y}_B = 0, \quad (7)$$

odakle sledi:

$$S_5 = Z_B = 5, \quad S_6 = Y_B = 2\sqrt{3}. \quad (8)$$

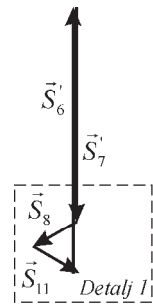
Ravnoteža čvora VII

Geometrijski uslov ravnoteže čvora VII glasi (slika 4.4):

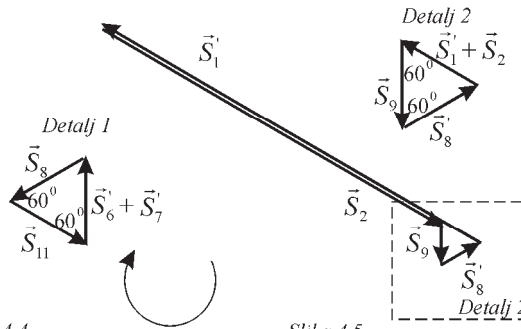
$$\vec{S}_{11} + \vec{S}_6' + \vec{S}_7' + \vec{S}_8 = 0, \quad (9)$$

odnosno:

$$S_8 = S_{11} = 2\sqrt{3} - \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad S_8 = S_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (10)$$



Slika 4.4



Slika 4.5

Ravnoteža čvora II

Geometrijski uslov ravnoteže čvora II glasi (slika 4.5):

$$\vec{S}_2 + \vec{S}_1' + \vec{S}_8' + \vec{S}_9 = 0, \quad (11)$$

tj

$$S_9 = S'_8 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad S_2 = S'_1 - S_9 = 3\sqrt{3}. \quad (12)$$

Ravnoteža čvora III

Geometrijski uslov ravnoteže čvora III glasi (slika 4.6):

$$\vec{S}'_2 + \vec{S}_{10} + \vec{S}_3 + \vec{P} = 0, \quad (13)$$

odakle sledi:

$$P \sin 60^\circ = S_{10} \sin 60^\circ, \quad P = S_{10} = \sqrt{3}, \quad (14)$$

$$S_3 = S'_2 - 2P \cos 60^\circ = 2\sqrt{3}. \quad (15)$$

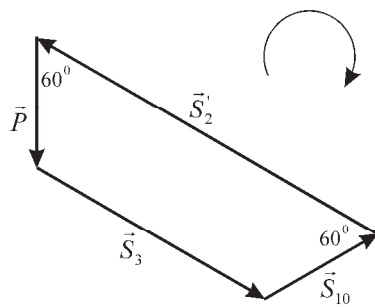
Ravnoteža čvora V

Geometrijski uslov ravnoteže čvora V glasi (slika 4.7):

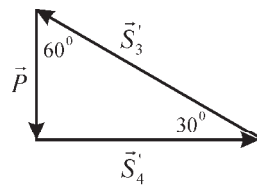
$$\vec{S}'_5 + \vec{S}'_{11} + \vec{S}_4 + \vec{S}'_9 + \vec{S}'_{10} = 0, \quad (16)$$

odakle se dobija:

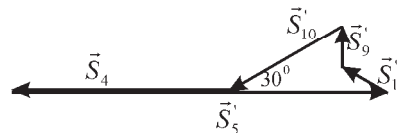
$$S_4 = S'_5 - S'_{11} \cos 30^\circ - S'_{10} \sin 60^\circ, \quad S_4 = 3. \quad (17)$$



Slika 4.6



Slika 4.8



Slika 4.7

Ravnoteža čvora IV (provera)

Geometrijski uslov ravnoteže čvora IV glasi (slika 4.8):

$$\vec{P} + \vec{S}'_4 + \vec{S}'_3 = 0, \quad (18)$$

odakle se mogu proveriti već izračunati rezultati:

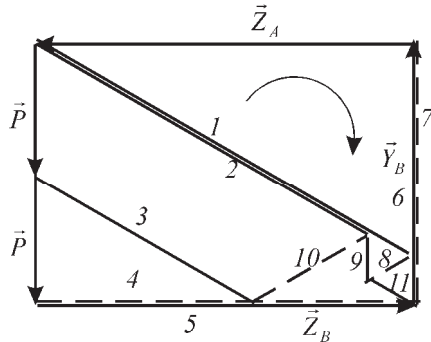
$$S'_4 = S'_3 \cos 30^\circ, \quad 3 = 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (19)$$

$$P = S'_3 \sin 30^\circ, \quad \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}. \quad (20)$$

III – Kremonin plan sila

Za rešetkastu konstrukciju na slici 4 Kremonin plan sila je prikazan na slici 4.9. Postupak crtanja Kremoninog plana je detaljno opisan u zadatku 1. Smer obilaženja oko

čvorova je negativan matematički (smer kazaljke na satu). Pažljivim posmatranjem unutar Kremoninog plana mogu se uočiti svi poligoni sila (slike 4.2,...,4.9).

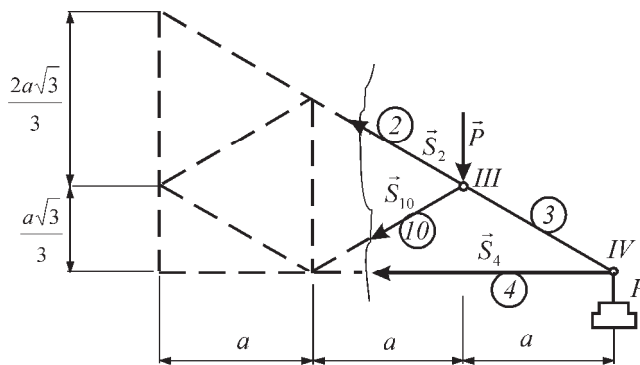


Slika 4.9

5. Za rešetkastu konstrukciju kao u zadatku 4 Riterovim postupkom odrediti intenzitete sila u štapovima 2, 10 i 4.

Rešenje:

Za određivanje intenziteta sila u štapovima 2, 10 i 4 preseca se rešetka na dva dela, tako što se preseku upravo štapovi 2, 10 i 4. Razmatra se ravnoteža onog dela rešetke na koji deluje manji broj sila zbog praktičnosti, u ovom slučaju desnog dela rešetke. Uticaj odbačenog (levog) dela rešetke se uzet je u obzir preko unutrašnjih sila u presečenim štapovima. Nepoznate unutrašnje sile u presečenim štapovima izračunavaju se iz analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na onaj deo rešetke koji se nalazi desno od preseka (slika 5).



Slika 5

Ovaj deo rešetke nalazi se pod dejstvom ravnog sistema sila koji mora biti uravnotežen

$$(\vec{P}, \vec{P}, \vec{S}_2, \vec{S}_{10}, \vec{S}_4) \sim 0. \quad (1)$$

Smerovi sila u štapovima \vec{S}_2 , \vec{S}_{10} i \vec{S}_4 pretpostavljaju se proizvoljno. Tražene veličine mogu se odrediti iz prvog oblika uslova ravnoteže posmatranog proizvoljnog ravnog sistema sila:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -S_4 - S_{10} \cos 30^\circ - S_2 \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow 2P - S_2 \sin 30^\circ + S_{10} \sin 30^\circ = 0, \quad (3)$$

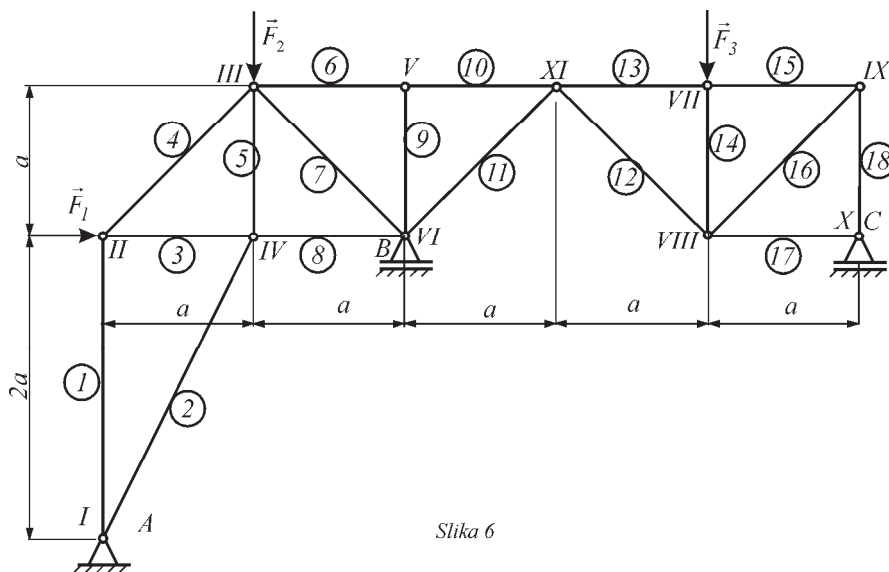
$$\sum M_{3x} = 0 \Rightarrow -Pa - S_4 \frac{a\sqrt{3}}{3} = 0, \quad (4)$$

odakle sledi

$$S_4 = -P\sqrt{3} = -3, \quad S_2 = 3\sqrt{3}, \quad S_{10} = -\sqrt{3}.$$

Smer sila u štapovima 4 i 10 je pogrešno pretpostavljen. Štap 2 je zategnut, a štapovi 4 i 10 su pritisnuti.

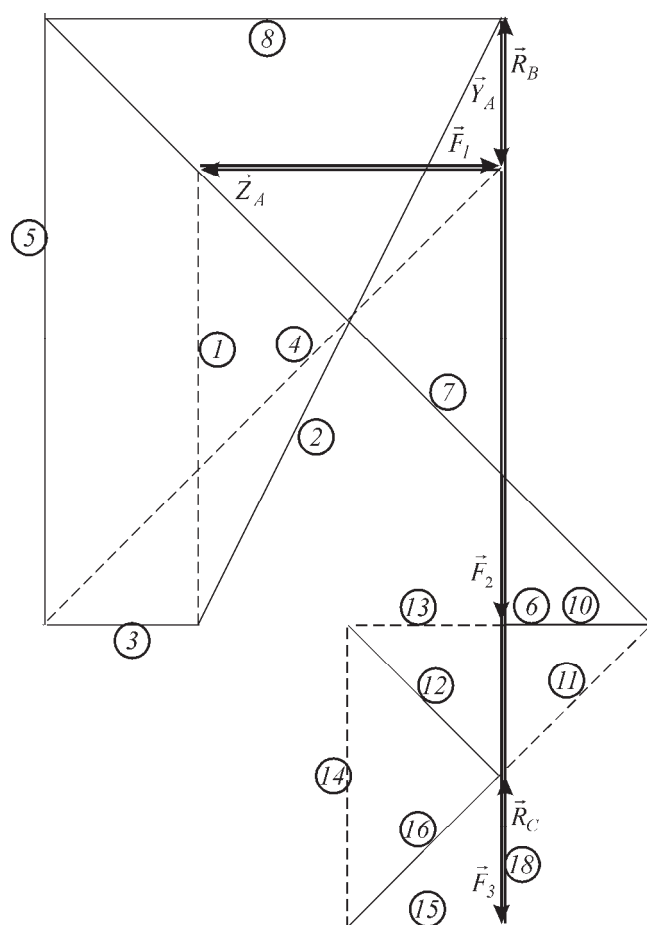
6. Gerberov rešetkasti nosač prikazan na slici 6 opterećen je silama intenziteta $F_1=2\text{kN}$, $F_2=3\text{kN}$, $F_3=2\text{kN}$. Odrediti reakcije spoljašnjih veza kao i sile u štapovima Kremoninim planom sila.



Slika 6

Rešenje:

Rešetkasti, kao i ostali nosači, mogu biti složeni tzv Gerberovi nosači. . Može se uočiti da su zglobov XI (Gerberovim zglobov) vezane dve nezavisne proste rešetkaste konstrukcije, pa se imajući to na umu može proveriti statička određenost rešetkaste konstrukcije. Naime ako je svaka prosta rešetka (levo i desno od Gerberovog zgloba) statički određena biće određena cela konstrukcija. Prepušta čitaocima da ispitaju statičku



Slika 6.2 Cremonin plan sila