

---

***RAVNOTEŽA KRUTIH TELA  
POD DEJSTVOM  
PROIZVOLJNOG RAVNOG SISTEMA  
SILA SA TRENJEM***

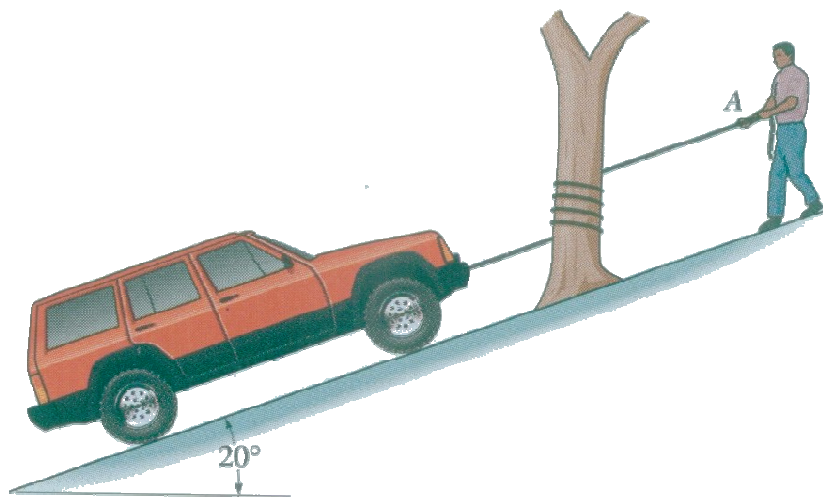


*Uvodna razmatranja*



*Zadaci*

*Korisnicima ove knjige poznat je mehanizam kočenja kod bicikla, gde se kao uzrok kočenja pojavljuje sila trenja klizanja. O slučajevima gde postoji statičko trenje klizanja i trenje kotrljanja biće reči u ovom poglavlju*



## UVODNA RAZMATRANJA

Otpor koji se javlja pri pomeranju jednog tela po površini drugog tela naziva se *trenje* (najrasprostranjenija pojava u prirodi). Ono se javlja i u slučaju relativnog mirovanja jednog tela u odnosu na drugo. Osnovne *postavke teorije trenja klizanja* date su, na osnovu eksperimentalnih rezultata, *Kulonovim zakonima*, koji u sažetom obliku glase:

1. Intenzitet sile trenja klizanja određen je u granicama od nule do neke maksimalne (granične) vrednosti. Pravac sile trenja klizanja kolinearan je mogućem relativnom pomeranju dodirne tačke jednog tela u odnosu na dodirnu tačku drugog tela, pri čemu je njen smer suprotan od smera ovog pomeranja. U slučaju mirovanja reč je o onoj relativnoj brzini koja bi se javila kao posledica uklanjanja ovog otpora.

2. Intenzitet maksimalne (granične) sile trenja klizanja pri ravnoteži dat je izrazom

$$F_{\mu gr} = F_{\max} = \mu_o N, \quad (1)$$

gde je  $\mu_o$  - *statički koeficijent trenja klizanja* (neimenovani broj koji se određuje eksperimentalno i zavisi od prirode materijala i stanja dodirnih površina),  $N$  - intenzitet normalne reakcije veze.

Iz prvog i drugog Kulonovog zakona sledi da je sila trenja klizanja pri mirovanju

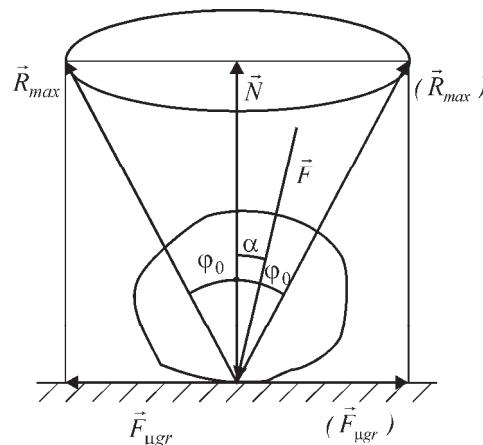
$$F_{\mu} = F_{\mu gr} = \mu_o N. \quad (2)$$

3. Intenzitet maksimalne sile trenja klizanja pri mirovanju, u dovoljno širokoj oblasti, ne zavisi od veličine dodirnih površina.

Na osnovu navedenih zakona sledi da je reakcija *realne veze* sastavljena od dve komponente: normalne komponente (njen pravac se poklapa sa pravcem reakcije idealne veze) i sile trenja klizanja.

Pretpostavi se da na telo koje miruje na hrapavoj ravni deluje sila  $\vec{F}$  čija linija dejstva gradi ugao  $\alpha$  sa normalom na toj ravni (slika 1). Normalna komponenta sile  $\vec{F}$  se uravnotežava sa normalnom reakcijom veze, tj.

$$F \cos \alpha = N, \quad (3)$$



Slika 1

a komponenta sile  $\vec{F}$  u hrapavoj ravni teži da pomeri telo. Da bi telo ostalo u ravnoteži potrebno je da ova komponenta sile  $\vec{F}$  bude po intenzitetu manja ili jednaka sili trenja klizanja, a po smeru suprotna od nje:

$$F \sin \alpha = F_{\mu} \leq F_{\mu gr} = \mu_o N = \mu_o \cos \alpha. \quad (4)$$

Iz (4) sledi

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu_o = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad (5)$$

odnosno, mora biti

$$\varphi_0 \geq \alpha \quad (6)$$

da bi telo ostalo u ravnoteži, bez obzira na veličinu intenziteta sile  $\vec{F}$ . Ugao  $\varphi_0$  naziva se *ugao trenja klizanja*. Ako je statički koeficijent trenja klizanja  $\mu_o$  u svim pravcima isti može se konstruisati kružni konus čiji je ugao pri vrhu  $2\varphi_0$  (konus trenja klizanja). U slučaju da se napadna linija sile  $\vec{F}$  nalazi unutar konusa trenja klizanja ili na njegovoj izvodnici, neće doći do pomeranja tela bez obzira na veličinu intenziteta sile  $\vec{F}$ . Ako se napadna linija sile  $\vec{F}$  nalazi van konusa trenja klizanja dolazi do pomeranja tela što predstavlja predmet proučavanja dinamike krutog tela.

Razmatranje uslova ravnoteže, pri postojanju trenja klizanja obično se svodi na razmatranje graničnog položaja ravnoteže, kada intenzitet sile trenja klizanja  $\vec{F}_{\mu gr}$  zadovoljava uslov

$$F_{\mu} = F_{\mu gr} = \mu_o N. \quad (7)$$

U slučaju da se ne ispituje granični položaj ravnoteže sila trenja nema maksimalnu vrednost, već između nula i  $\vec{F}_{\mu gr}$ , tako da se iz uslova ravnoteže određuje oblast ravnoteže za telo.

Da bi se hrapavi kružni cilindar počeo kotrljati po hrapavoj podlozi eksperiment pokazuje da je na njega potrebno delovati nekom silom  $\vec{F}$ . Sila  $\vec{F}$  je potrebna radi savlađivanja otpora koji se javlja pri kotrljanju cilindra i koji se naziva *trenje kotrljanja* (da nema ovoga otpora, na osnovu Njutnovih aksioma, i sila beskonačno malog intenziteta pokrenula bi cilindar iz stanja mirovanja), (slika 2).

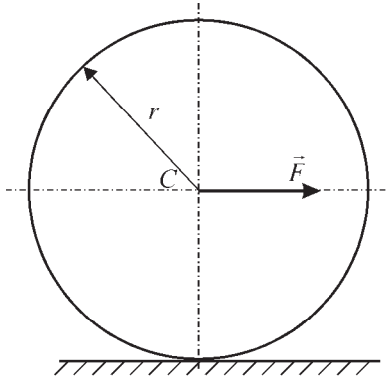
S obzirom da su realna tela deformabilna dolazi do deformacije i podloge i cilindra, što je približno prikazano na slici 2.1. Napadna linija normalne reakcije podloge je pomerena u smeru dejstva sile  $\vec{F}$  za rastojanje  $k$ . Veličina  $k$  se naziva *koeficijent (krak) trenja kotrljanja* koji se određuje eksperimentalno. Spreg koji čine sile  $\vec{G}$  i  $\vec{N}$  predstavlja otpor kotrljanju, a moment tog sprega se naziva *moment trenja kotrljanja*. Jednačine ravnoteže cilindra glase:

$$F - F_{\mu gr} = 0, \quad N - G = 0, \quad F \cdot r - k \cdot N = 0. \quad (8)$$

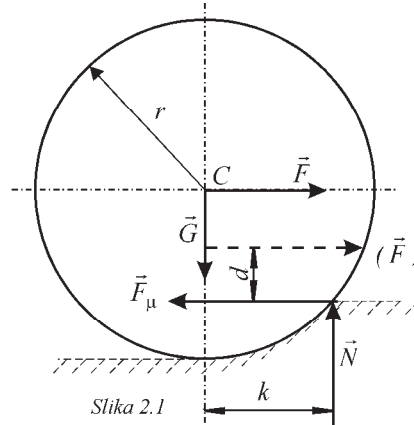
U slučaju ravnoteže cilindra sila  $\vec{F}$  ima graničnu (maksimalnu vrednost) određenu relacijama:

$$F'_{gr} = \mu_0 G, \quad F''_{gr} = \frac{k}{r} G. \quad (9)$$

Iz (9) sledi da je granična vrednost intenziteta sile  $\vec{F}$  određena izrazom u kome figuriše manja vrednost od  $\mu_0$  i  $\frac{k}{r}$ . Kada je u pitanju cilindar obično je  $\mu_0 > \frac{k}{r}$ .



Slika 2



Slika 2.1

U opštem slučaju sila  $\vec{F}$  ne mora delovati u tački C cilindra već na proizvoljnom mestu. Ako sila  $\vec{F}$  deluje paralelno horizontalnoj podlozi na rastojanju  $d$  postoje sledeći slučajevi:

a) cilindar se nalazi u stanju mirovanja ako je

$$F \leq \min \left\{ \mu_0 G, \frac{k}{r} G \right\}, \quad (10)$$

b) cilindar će iz stanja mirovanja započeti da se kotrlja bez klizanja ako je

$$\mu_0 > \frac{k}{d}, \quad \frac{k}{d} G < F \leq \mu_0 G, \quad (11)$$

c) cilindar će iz stanja mirovanja započeti da kliza bez kotrljanja ako je

$$\mu_0 < \frac{k}{d}, \quad \mu_0 G < F \leq \frac{k}{d} G, \quad (12)$$

d) cilindar će iz stanja mirovanja započeti da se kotrlja sa klizanjem ako je

$$F > \max \left\{ \mu_0 G, \frac{k}{d} G \right\}. \quad (13)$$

Pri razmatranju trenja klizanja užeta (kaiša) o površ cilindra treba odrediti najmanju silu  $\vec{Q}$ , kojom treba dejstvovati u tački A cilindra pri dejstvu poznate sile  $\vec{P}$  u tački B, za slučaj ravnoteže (slika 3). Poznati su ugao  $\alpha$  i statički koeficijenti trenja klizanja između cilindra i užeta  $\mu_0$ .

Razmatra se ravnoteža elementarnog dela  $ED$  užeta, dužine  $ED = ds = R d\varphi$ . U graničnom slučaju ravnoteže, na deo  $ED$  užeta dejstvuje sistem sila  $(\vec{T}, \vec{T}_l, d\vec{F}_{\mu gr}, d\vec{N})$  koji se može približno tretirati kao sistem sučeljnih sila.

$$\vec{T} + \vec{T}_l + d\vec{F}_{\mu gr} + d\vec{N} = 0. \quad (14)$$
$$dT = \mu_0 dN, \quad dN = Td\varphi, \quad (15)$$
$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}, \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1 \quad (16)$$

The diagram shows a circle of radius  $R$  centered at  $O$ . A horizontal dashed line passes through  $O$ . Points  $A$  and  $B$  are on this line. Point  $C$  is at the top. Points  $D$  and  $E$  are on the right side. Point  $K$  is on the arc between  $C$  and  $D$ . Vectors  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{T}_l$ ,  $\vec{N}$ , and  $d\vec{F}_{\mu gr}$  are shown. Angles  $\alpha$ ,  $\phi$ , and  $\frac{d\phi}{2}$  are indicated. A dashed line represents the initial position.

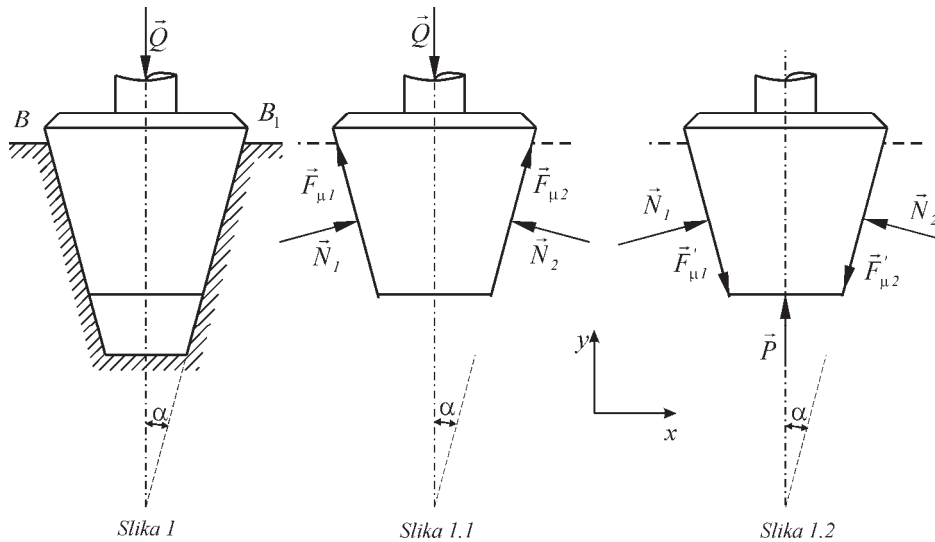
*Slika 3*

$$\frac{dT}{T} = \mu_0 d\varphi \quad \rightarrow \quad \int_0^P \frac{dT}{T} = \mu_0 \int_0^\alpha d\varphi, \quad (17)$$
$$Q = Pe^{-\mu_0 \alpha} . \quad (18)$$

Prema tome, intenzitet sile  $\vec{Q}$  ne zavisi od poluprečnika  $R$  cilindra i može se smanjiti povećanjem ugla  $\alpha$  (pri poznatom  $\mu_\eta$ ).

### ZADACI

**1.** Klin  $A$  čiji je nagib  $\alpha$ , utiskuje se silom intenziteta  $Q$  u udubljenje  $BB_1$ . Odrediti intenzitet  $N$  normalnog pritiska na bokove klina, kao i silu  $\vec{P}$  potrebnu za izvlačenje klina, ako je statički koeficijent trenja klizanja između bokova klina i udubljenja  $\mu_0 = 0,1$  (slika 1).



### Rešenje:

Na posmatrani klin pored date sile  $\vec{Q}$  deluju i reakcije dve hrapave površi koje su u kontaktu sa njim. Svaka od tih reakcija sastoji se iz dve komponente: jedne normalne na dodirnu površinu  $\vec{N}_1$ , odnosno  $\vec{N}_2$ , i druge upravne na nju, usmerenu u stranu suprotnu mogućem kretanju, a poznatu kao sila trenja klizanja,  $\vec{F}_{\mu 1}$  odnosno  $\vec{F}_{\mu 2}$ . Maksimalni intenzitet sile trenja klizanja (ili u literaturi poznata još pod nazivom *granična vrednost*), u opštem slučaju prema Kulonovom zakonu iznosi

$$F_{\mu, gr} = \mu_0 \cdot N, \quad (1)$$

gde je  $\mu_0$  statički koeficijent trenja klizanja koji uzima vrednosti  $0 < \mu_0$ .

Prema tome, jedan od analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na klin oslobođen veza, pri njegovom utiskivanju u udubljenje, (slika 1.1) glasi

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow (F_{\mu 1} + F_{\mu 2}) \cos \alpha + (N_1 + N_2) \sin \alpha - Q = 0, \quad (2)$$

pri čemu je  $N_1 = N_2 = N$  i  $F_{\mu 1} = F_{\mu 2} = F_{\mu}$  zbog simetričnosti problema (što sledi iz uslova  $\sum X_i = 0$ ).

Iz jednačine (2), a s obzirom na Kulonov zakon dat u obliku (1), dobijaju se intenziteti sile  $\vec{N}$  i sile trenja klizanja  $\vec{F}_{\mu, gr}$ :

$$N = \frac{Q}{2(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)}, \quad (3)$$

$$F_{\mu, gr} = \mu_0 \frac{Q}{2(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)}. \quad (4)$$

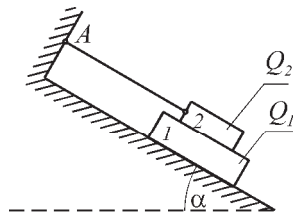
Pri izvlačenju klina iz udubljenja menja se smer njegovog mogućeg kretanja, pa se menja i smer sile trenja. U tom sličaju jednačina (2) dobija oblik (slika 1.2)

$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad P + 2N \sin \alpha - 2F_{\mu, gr} \cos \alpha = 0, \quad (5)$$

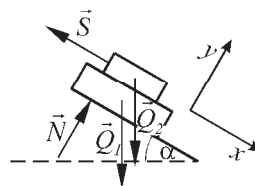
pa je intenzitet sile  $\vec{P}$  potrebne za izvlačenje klina, s obzirom na (1), (3) i (4)

$$P = Q \frac{\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha}. \quad (6)$$

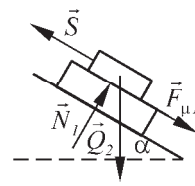
**2.** Na glatkoj strmoj ravni nalazi se teret težine  $\vec{Q}_1$ , a na njemu drugi teret težine  $\vec{Q}_2$  vezan pomoću užeta koje je paralelno sa strmom ravni, za nepomičnu tačku A zida. Statički koeficijent trenja klizanja između dodirnih površina tela 1 i 2 je  $\mu_0$ . Odrediti ugao  $\alpha$  tako da sistem tela u prikazanom položaju bude u ravnoteži (slika 2). Dato je:  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = \frac{1}{2}Q$ .



Slika 2



slika 2.1



slika 2.2

### Rešenje:

Na posmatrani sistem tela 1 i 2 oslobođen od veza pored sila težina  $\vec{Q}_1$  i  $\vec{Q}_2$ , deluju sledeće reakcije veza: sila u užetu  $\vec{S}$  i reakcija idealno glatke strme ravni  $\vec{N}$ .

Analitički uslovi ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila koji deluje na sistem tela 1 i 2 u odnosu na koordinatni sistem  $Oxy$  koji je postavljen tako da osa  $Ox$  bude paralelna strmoj ravni, glase:

$$\sum X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (Q_1 + Q_2) \sin \alpha - S = 0, \quad (1)$$



$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - (Q_1 + Q_2) \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Iz uslova (1) i (2) sledi:

$$N = (Q_1 + Q_2) \cos \alpha, \quad (3)$$

$$S = \frac{3}{2} Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (4)$$

Na telo 2, po uklanjanju svih veza, deluju sledeće sile: težina  $\vec{Q}_2$ , sila u užetu  $\vec{S}$  i reakcija hrapave površi kojom telo 2 dodiruje telo 1 i koja se sastoji od normalne komponente  $\vec{N}_1$  i sile trenja klizanja  $\vec{F}_{\mu 1}$ , (slika 2.2). Iz analitičkih uslova ravnoteže ovog sistema sila:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_{\mu 1} - S + Q_2 \sin \alpha = 0, \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_1 - Q_2 \cos \alpha = 0, \quad (6)$$

i uslova da je u graničnom slučaju

$$F_{\mu 1} = \mu_0 N_1, \quad (7)$$

sledi da je intenzitet sile u užetu

$$S = \frac{1}{2} Q (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha). \quad (8)$$

S obzirom na izraze (4) i (8), može se napisati relacija

$$\frac{3}{2} Q \sin \alpha = \frac{1}{2} Q (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha), \quad (9)$$

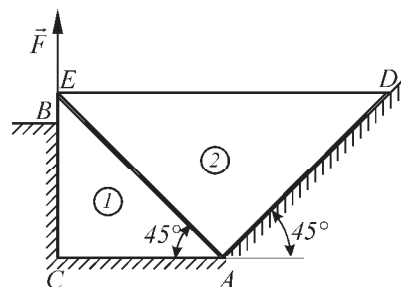
iz koje se određuje ugao  $\alpha$  u graničnom slučaju

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \mu_0. \quad (10)$$

**3.** Homogena ploča 1 težine  $\vec{G}$ , na koju deluje sila  $\vec{F}$ , stranicom BC oslonjena je o vertikalni glatki zid, a stranicom AC o glatku horizontalnu ravan. Homogena ploča 2 težine  $2\vec{G}$  jednom svojom stranicom oslonjena je o ploču 1, a stranicom AD o glatku strmu ravan koja je u odnosu na horizontalnu nagnuta pod uglom od  $45^\circ$ . Ako statički koeficijent trenja klizanja na dodirnoj površini, između ploča iznosi  $\mu_0$ , odrediti reakciju horizontalne ravni AC, kao i graničnu vrednost intenziteta sile  $\vec{F}$  pod čijim dejstvom će ploče biti u ravnoteži. Teme A tela 2 je na zanemarljivo malom rastojanju od horizontalne podloge. Obe ploče su oblika pravouglog jednakokrakog trougla (slika 3).

**Rešenje:**

Sile koje deluju na ploču 1, po uklanjanju svih veza, prikazane su na slici 3.1, pa

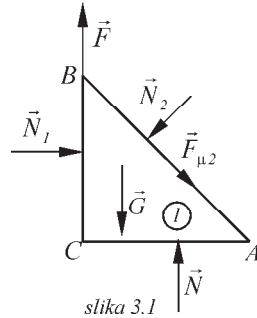


Slika 3

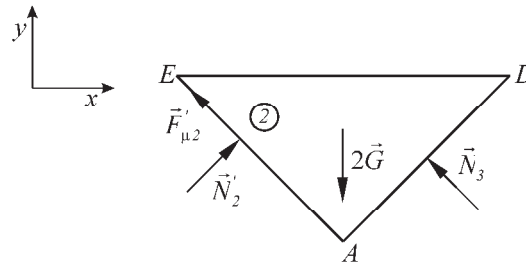
jednačine ravnoteže tog sistema sila glase.

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow N_1 - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{\mu 2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F - G - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{\mu 2} \frac{\sqrt{2}}{2} + N = 0. \quad (2)$$



slika 3.1



slika 3.2

Na ploču 2, oslobođenu veza deluju sile:  $\vec{N}_3$  - reakcija glatke strme ravni; težina ploče  $\vec{G}$ ; sile  $\vec{N}_2'$  i  $\vec{F}_{\mu 2}'$  za koje važi (slika 3.2):

$$\vec{N}_2' = -\vec{N}_2, \quad (3)$$

$$\vec{F}_{\mu 2}' = -\vec{F}_{\mu 2}. \quad (4)$$

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji djeluje na ploču 2 su:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2' \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{\mu 2}' \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2' \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{\mu 2}' \frac{\sqrt{2}}{2} - 2G = 0. \quad (6)$$

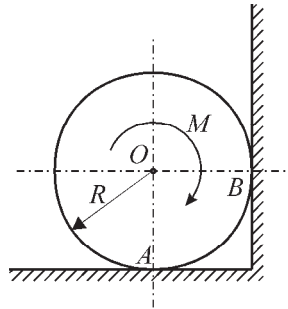
Iz sistema jednačina (1), (2), (3), (4), (5) i (6), imajući u vidu činjenicu da je sistem tela u graničnom položaju ravnoteže, kada važi

$$F_{\mu 2} = \mu_0 N_2, \quad (7)$$

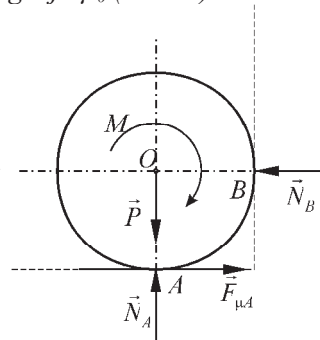
kao i da je intenzitet reakcije horizontalne ravni na ploču 1,  $N = 0$ , dobijaju se intenziteti traženih reakcija veza i sile  $\vec{F}$  u graničnom slučaju:

$$\begin{aligned} N_1 &= G(1 - \mu_0), & N_2 &= G\sqrt{2}, \\ N_3 &= G(1 - \mu_0)\sqrt{2}, & F_{gr} &= G(2 + \mu_0). \end{aligned} \quad (8)$$

4. Cilindar težine  $\vec{P}$  i poluprečnika  $R$  nalazi se na hrapavoj horizontalnoj podlozi i oslanja se na glatku vertikalnu ravan. Za koji će se intenzitet momenta sprega  $M$  cilindar nalaziti u graničnom položaju ravnoteže? Statički koeficijent trenja klizanja između cilindra i horizontalne podloge je  $\mu_0$  (slika 4).



Slika 4



Slika 4.1

**Rešenje:**

Na cilindar oslobođen veza deluju u tačkama A i B normalne komponente reakcije veza  $\vec{N}_A$  i  $\vec{N}_B$ , sila trenja  $\vec{F}_{\mu A}$ , težina  $\vec{P}$  i spreg sila momenta intenziteta  $M$  (slika 4.1).

Analitički uslovi ravnoteže ovog sistema sila su:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_{\mu A} - N_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_A - P = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{O_z}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow F_{\mu A} R - M = 0. \quad (3)$$

Iz uslova da se cilindar nalazi u graničnom položaju ravnoteže, tj. kada važi:

$$F_{\mu A} = \mu_0 N_A \text{ i } M = M_{\max}. \quad (4)$$

i jednačina (1), (2) i (3) određuje se

$$N_A = P, \quad N_B = \mu_0 P, \quad M_{\max} = \mu_0 \cdot P \cdot R. \quad (5)$$

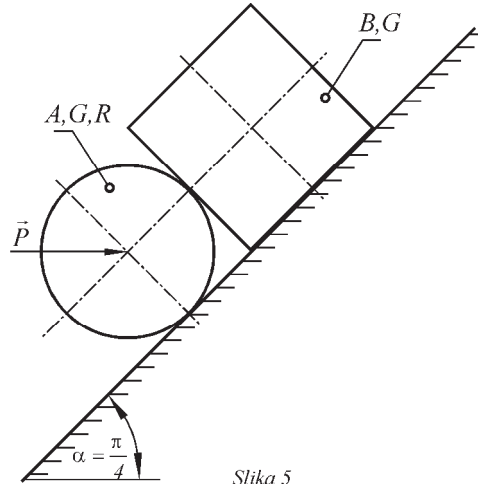
5. Na disk A poluprečnika  $R$  i težine  $\vec{G}$  oslanja se ploča B težine  $\vec{G}$ . Disk i ploča nalaze se na strmoj ravni ugla nagiba  $\alpha = \pi/4$ . Statički koeficijent trenja klizanja između ploče B i podloge je  $\mu$ . Odrediti intenzitet horizontalne sile  $\vec{P}$  kojom treba djelovati na disk da bi sistem krutih tela bio u položaju ravnoteže. Sva trenja na ostalim dodirnim površinama zanemariti.

**Rešenje:**

Analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji djeluje na ploču B oslobođenu veza su (slika 5.1):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_\mu + G \frac{\sqrt{2}}{2} - S = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - G \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (2)$$



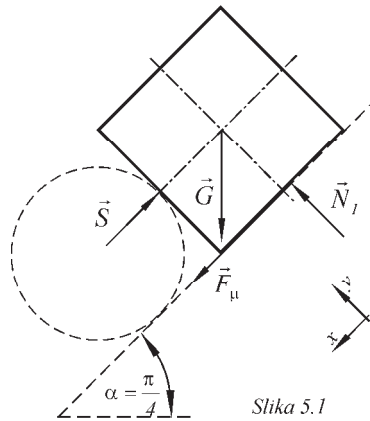
Slika 5

Intenzitet sile trenja između ploče B i podloge mora da zadovolji uslov

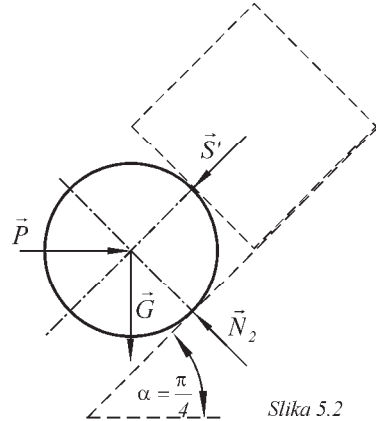
$$-\mu N_I \leq F_\mu \leq \mu N_I. \quad (3)$$

Jedan od analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na disk A je (slika 5.2)

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow G \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{\sqrt{2}}{2} + S' = 0. \quad (4)$$



Slika 5.1



Slika 5.2

Iz (4), imajući u vidu da je  $S=S'$ , sledi intenzitet sile  $\vec{S}$

$$S = (P - G) \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (5)$$

pa iz (1) i (2) sledi

$$N_I = G \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad F_\mu = P - G\sqrt{2}. \quad (6)$$

Nejednačina (3) s obzirom na (6) dobija oblik

$$-\mu_0 G \frac{\sqrt{2}}{2} \leq (P - G\sqrt{2}) \leq \mu_0 G \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (7)$$

Iz (7) se dobija uslov koji mora da zadovolji intenzitet sile  $\vec{P}$

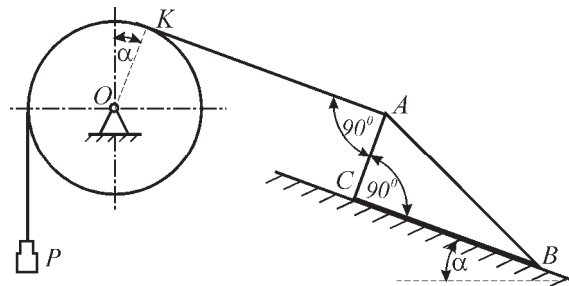
$$G\sqrt{2}(1 - \frac{1}{2}\mu_0) \leq P \leq G\sqrt{2}(1 + \frac{1}{2}\mu_0).$$

**6.** Homogenu ploču  $ABC$  oblika pravouglog trougla, težine intenziteta  $Q$  u ravnotežnom položaju održavaju: lako, glatko i neistegljivo uže prebačeno preko glatkog kotura  $O$  na čijem drugom kraju visi teret težine  $\vec{P}$ , i hrapava strma ravan nagnuta pod uglom  $\alpha$  u odnosu na horizontalu. Statički koeficijent trenja klizanja između ploče i strme ravni iznosi  $\mu_0$ . Odrediti odnos težina  $\vec{P}$  i  $\vec{Q}$  tako da sistem bude u ravnoteži. Dužine kateta ploče su  $a$  i  $b$  (slika 6).

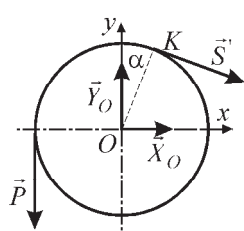
**Rešenje:**

Uže je lako, glatko i neistegljivo pa intenzitet sile u njemu

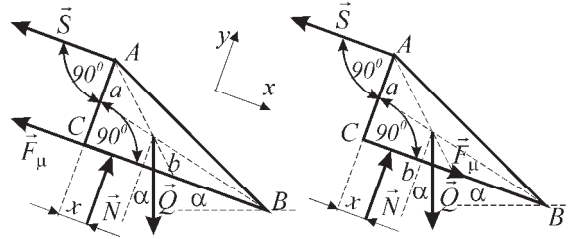
u bilo kom preseku iznosi  $S' = S = P$ . Čitaocu se prepušta da to pokaže postavljanjem analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na laki kotur oslobođen veza (slika 6.1).



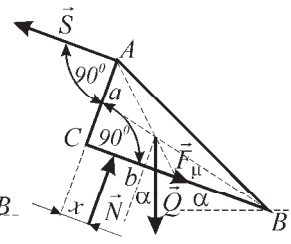
Slika 6



Slika 6.1



Slika 6.2



Slika 6.3

Homogena trougaona ploča oslobođena svih veza prikazana je na slikama 6.2 i 6.3 za dva moguća smera sile trenja klizanja.

Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na ploču mogu se napisati za dva slučaja opterećenja. Obzirom da smer mogućeg kretanja ploče u odnosu na strmu ravan na osnovu koga se određuje smer sile trenja klizanja nije u ovom slučaju poznat izvršiće se analiza za oba moguća smera.

Prvi slučaj

Ako je smer mogućeg kretanja ploče niz strmu ravan (kada je  $P=P_{min}$ ), smer sile trenja klizanja je suprotan i uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na ploču u tom slučaju su (slika 6.2):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -F_\mu - S + Q \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - Q \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Cz} = 0 \Rightarrow Sa + Nx - \frac{b}{3} Q \cos \alpha - \frac{a}{3} Q \sin \alpha = 0, \quad (3)$$

odakle sledi

$$F_\mu = Q \sin \alpha - P, \quad N = Q \cos \alpha, \quad (4)$$

$$x = \frac{Qa}{3N} \left( \sin \alpha + \frac{b}{a} \cos \alpha \right) - \frac{Pa}{N}. \quad (5)$$

(a) Uslov da ne dođe do proklizavanja ploče dat je relacijom

$$F_\mu \leq \mu_0 N. \quad (6)$$

Nejednakost (6) imajući u vidu izraze (4) dobija oblik

$$Q \sin \alpha - P \leq \mu_0 Q \cos \alpha \quad (7)$$

odnosno

$$\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha \leq \frac{P}{Q}. \quad (8)$$

(b) Uslov da ne dođe do prevrtanja ploče oko temena C određuje se tako što u graničnom položaju ploče pre prevrtanja, linija dejstva normalne reakcije podloge prolazi kroz teme C ploče

$$0 \leq x \leq b. \quad (9)$$

Kako deo nejednakosti (9) na desnoj strani nema fizičkog smisla (linija dejstva normalne reakcije podloge s obzirom na oblik ploče i opterećenja nikada ne može prolaziti kroz teme B ploče), analizira se samo deo nejednakosti na levoj strani

$$0 \leq x. \quad (10)$$

Iz jednačine (5) i nejednačine (10) sledi uslov da ne dođe do prevrtanja ploče, tj.

$$0 \leq \frac{Q}{3} (a \sin \alpha + b \cos \alpha) - Pa, \quad (11)$$

odnosno

$$\frac{P}{Q} \leq \frac{1}{3} \left( \sin \alpha + \frac{b}{a} \cos \alpha \right). \quad (12)$$

Drugi slučaj

Ako je smer mogućeg kretanja ploče uz strmu ravan ( $P=P_{max}$ ), smer sile trenja klizanja je suprotan i analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na ploču u tom slučaju su (slika 6.3):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_\mu - S + Q \sin \alpha = 0, \quad (13)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - Q \cos \alpha = 0, \quad (14)$$

$$\sum M_{Cz} = 0 \Rightarrow Sa + Nx - \frac{b}{3}Q \cos \alpha - \frac{a}{3}Q \sin \alpha = 0, \quad (15)$$

odakle se može uočiti da samo prva jednačina ravnoteže ima drugi oblik u odnosu na uslove ravnoteže (1) do (3).

Iz uslova (13) sledi

$$F_{\mu} = S - Q \sin \alpha. \quad (16)$$

Uslov da ne dođe do proklizavanja ploče dat relacijom (6) sada ima oblik

$$\frac{P}{Q} \leq \sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha. \quad (17)$$

Dakle, posmatrajući relacije iz oba slučaja mogu se postaviti traženi odnosi:

- Iz nejednakosti (8) i (17) sledi uslov da ne dođe do proklizavanja

$$\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha \leq \frac{P}{Q} \leq \sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha \quad (18)$$

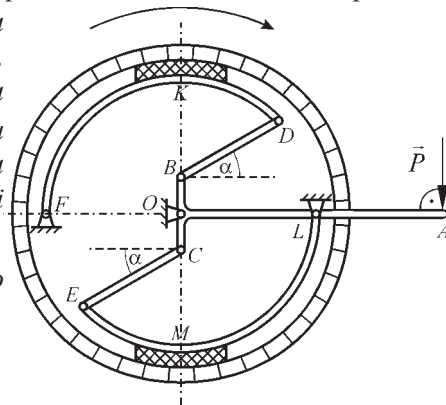
*Napomena:* Uslov (18) se često piše u obliku nejednakosti<sup>1</sup>  $|F_{\mu}| \leq \mu N$ .

- Iz nejednakosti (12) sledi uslov da ne dodje do prevrtanja ploče

$$\frac{P}{Q} \leq \frac{1}{3} \left( \sin \alpha + \frac{b}{a} \cos \alpha \right). \quad (19)$$

Da bi ploča bila u ravnoteži moraju biti zadovoljeni uslovi (18) i (19).

7. Kod kočnice sa unutrašnjim papučama pritisnutim uz obod doboša pomoću poluge OA, odrediti intenzitet momenta sprega sila kojim treba dejstvovati na doboš, pri pokazanom smeru obrtanja doboša (slika 7), ako je dužina ručice  $\overline{OA} = a$ , ako su štapovi BD i CE paralelni i ako obrazuju sa ručicom OA uglove od  $30^\circ$ . Takođe važi  $\overline{OK} = \overline{OF} = \overline{OL} = \overline{OM} = r$ ,  $\overline{OB} = \overline{OC} = b$ , statički koeficijent trenja klizanja papuča o doboš je  $\mu_0$ .



Slika 7

### Rešenje:

Jedan od analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na polugu AOB oslobodenu svih veza glasi (slika 7.1)

$$\sum M_{Oz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow (S_B + S_C)b \cos \alpha - Pa = 0, \quad (1)$$

gde su sile  $\vec{S}_B$  i  $\vec{S}_C$  reakcije poluga BD i CE, pa je

<sup>1</sup> Čitalac može zapaziti da je zadatak broj 5 rešen na ovaj način.

$$S_B + S_C = \frac{2Pa}{b\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Na polukružno savijeni štap  $FD$  (slika 7.2), deluju reakcija zgloba  $F$ ,  $(\vec{X}_F, \vec{Y}_F)$ , sila  $\vec{S}_D$  reakcija štapa  $BD$  i u tački  $K$  reakcija papuče data preko sile normalnog pritiska  $\vec{N}_1$  i sile trenja klizanja  $\vec{F}_{\mu 1}$ . Jedan od analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji deluje na polukružno savijeni štap  $FD$  oslobođen svih veza glasi

$$\sum M_{F_z}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -N_1 r - F_{\mu 1} r + S_D \sin \alpha \cdot r - S_D \cos \alpha \cdot b = 0, \quad (3)$$

pa se iz uslova da je u graničnom slučaju

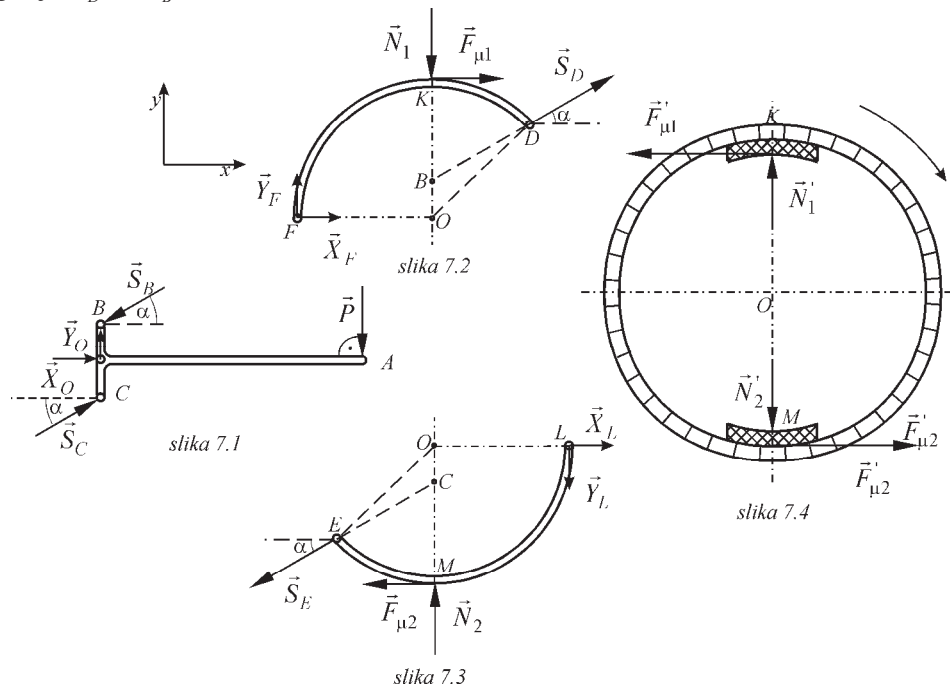
$$F_{\mu 1} = \mu_0 N_1 \quad (4)$$

dobija

$$N_1 = \frac{S_D}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r} = \frac{S_B}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r}, \quad (5)$$

$$F_{\mu 1} = \frac{S_D \mu_0}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r} = \frac{S_B \mu_0}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r}, \quad (6)$$

gde je  $\vec{S}_D = -\vec{S}_B$ .



Na sličan način se obzirom da je  $\vec{S}_E = -\vec{S}_C$  i  $F_{\mu 2} = \mu_0 N_2$ , formira jednačina ravnoteže za krivi štap  $EL$  (slika 7.3)

$$\sum M_{L_z}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -N_2 r - F_{\mu 2} r + S_E \sin \alpha \cdot r - S_E \cos \alpha \cdot b = 0, \quad (7)$$



iz koje se izračunavaju intenziteti normalne komponente pritiska papuče  $M$ ,  $N_2$  i odgovarajuće sile trenja  $F_{\mu 2}$ :

$$N_2 = \frac{S_E}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r} = \frac{S_C}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r}, \quad (8)$$

$$F_{\mu 2} = \frac{S_E \mu_0}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r} = \frac{S_C \mu_0}{2(1 + \mu_0)} \frac{r - b\sqrt{3}}{r}, \quad (9)$$

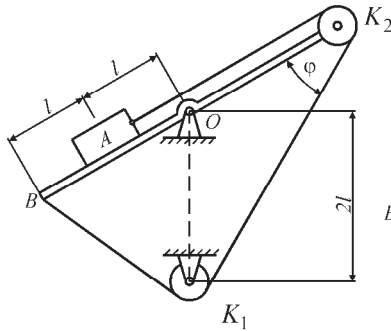
Prema tome, intenzitet momenta sprega sila koji djeluje na doboš je (slika 7.4)

$$M_{tr} = \sum M_O^{\vec{F}_i} = r(F_{\mu 1}' + F_{\mu 2}'), \quad (10)$$

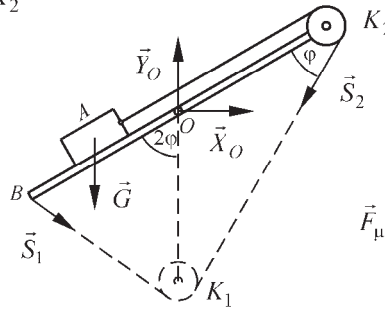
i s obzirom na (2), (6), (9) i (10) iznosi:

$$M_{tr} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (r - b\sqrt{3}) \frac{S_C + S_B}{2} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \frac{(r - b\sqrt{3})a}{b\sqrt{3}} P. \quad (10)$$

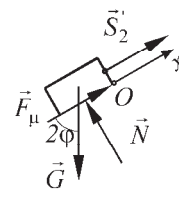
**8.** Na lakom hrapavom štapu dužine  $4l$ , koji je svojim središtem vezan za oslonac  $O$ , nalazi se telo  $A$  težine intenziteta  $G$  na rastojanju  $l$  od tačke  $O$ . Za donju ivicu tela vezano je nerastegljivo uže koje je prebačeno preko lakih koturova  $K_1$  i  $K_2$ , zanemarljivih dimenzija. Kotur  $K_2$  vezan je svojim centrom zgloбно za kraj štapa, a kotur  $K_1$  je svojim centrom zgloбно vezan za nepokretan oslonac koji se nalazi na rastojanju  $2l$  ispod tačke  $O$ . Odrediti intenzitet sile  $\vec{S}$  u užetu u funkciji ugla  $\varphi$ , vrednosti ugla  $\varphi$  za koje se sistem nalazi u ravnoteži i intenzitet i smer sile trenja klizanja između štapa i tela  $A$  za ugao  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .



Slika 8



Slika 8.1



Slika 8.2

### Rešenje:

Sistem krutih tela oslobođen veza prikazan je na slici 8.1. Jedan od analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji djeluje na sistem krutih tela, pri čemu važi

$$|\vec{S}_1| = |\vec{S}_2| = S, \quad (1)$$

glasi

$$\sum M_{O_z}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow Gl \sin 2\varphi + 2S_1 l \cos \varphi - 2S_2 l \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

a s obzirom na (1) iz nje se dobija intenzitet sile u užetu u funkciji ugla  $\varphi$ , tj.

$$S_1 = S_2 = S = G \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - 1}, \quad (3)$$

pri čemu moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$\operatorname{tg} \varphi - 1 \neq 0, \quad \varphi \neq \frac{\pi}{4}, \quad (4)$$

$$\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - 1} > 0. \quad (5)$$

Nejednačina (5) će važiti samo ako je:

$$\sin \varphi > 0, \quad 0 < \varphi < \pi \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi - 1 > 0, \quad \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

tj. ako ugao  $\varphi$  pripada intervalu  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Sile koje deluju na telo  $A$  oslobođeno veza su: reakcija štapa koja se sastoji od normalne komponente  $\vec{N}$  i sile trenja klizanja  $\vec{F}_\mu$ , sila  $\vec{S}_2'$  za koju važi

$$|\vec{S}_2'| = S = G \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - 1}, \quad (8)$$

i težina tela  $\vec{G}$  (slika 8.2). Jedan od analitičkih uslova ravnoteže ovog sistema sila je

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow S_2' + F_\mu - G \cos 2\varphi = 0, \quad (9)$$

odakle, s obzirom na (8), sledi intenzitet sile trenja klizanja

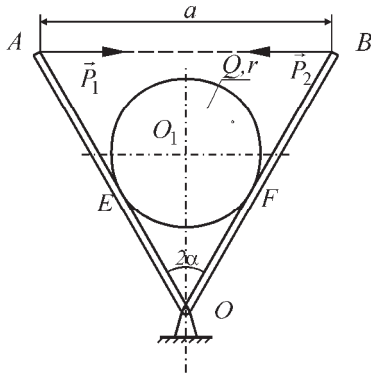
$$F_\mu = G \frac{\cos 2\varphi (\operatorname{tg} \varphi - 1) - \sin \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - 1}. \quad (10)$$

Za ugao  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  intenzitet sile trenja klizanja je

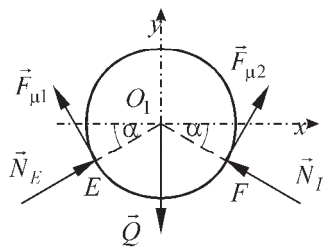
$$F_\mu \left( \varphi = \frac{\pi}{3} \right) = -G \frac{2\sqrt{3} - 1}{2(\sqrt{3} - 1)}, \quad (11)$$

gde znak “minus” ukazuje da je smer sile trenja suprotan od pretpostavljenog (slika 8.2).

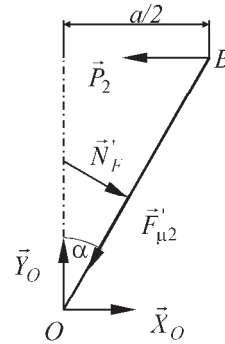
9. Između dve lake grede  $OA$  i  $OB$  koje su spojene zgloboj u tački  $O$  nalazi se disk. Na grede u tačkama  $A$  i  $B$  dejstvuju dve horizontalne sile  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$ , jednakih intenziteta, a suprotnih smerova. Težina diska je  $\vec{Q}$ , a poluprečnik  $r$ . Ugao  $AOB$  je  $2\alpha$ , a rastojanje  $\overline{AB} = a$ . Statički koeficijent trenja klizanja između diska i ploča je  $\mu_0$ , ( $\tan \alpha > \mu_0$ ). Koji uslov treba da zadovolje intenziteti sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$  da bi disk bio u ravnoteži?



Slika 9



slika 9.1



slika 9.2

### Rešenje:

Na disk, po uklanjanju grede  $OA$  i  $OB$ , deluju: težina diska  $\vec{Q}$  i reakcije u tačkama dodira diska i grede,  $\vec{R}_E$  i  $\vec{R}_F$ . Svaka od sila  $\vec{R}_E$  i  $\vec{R}_F$  sastoji se od normalne komponente  $\vec{N}_E$ , odnosno  $\vec{N}_F$  i sile trenja  $\vec{F}_{\mu 1}$ , odnosno  $\vec{F}_{\mu 2}$ . Smerovi sila  $\vec{F}_{\mu 1}$ , odnosno  $\vec{F}_{\mu 2}$  su, kao što je već rečeno, suprotni od smera mogućeg kretanja diska, koji može da se pomera naviše ili naniže, što zavisi od intenziteta sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$ . Ako su smerovi sila  $\vec{F}_{\mu 1}$  i  $\vec{F}_{\mu 2}$  dati kao na slici 9.1, tada iz uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na disk:

$$\sum M_{O_1}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -F_{\mu 1}r + F_{\mu 2}r = 0, \quad (1)$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow N_E \cos \alpha - N_F \cos \alpha - F_{\mu 1} \sin \alpha + F_{\mu 2} \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow (F_{\mu 1} + F_{\mu 2}) \cos \alpha + (N_E + N_F) \sin \alpha - Q = 0, \quad (3)$$

sledi da je:

$$F_{\mu 1} = F_{\mu 2} = F_{\mu}, \quad F_{\mu} = \frac{Q}{2 \cos \alpha} - N \tan \alpha, \quad N_E = N_F = N. \quad (4)$$

Iz analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji deluju bilo na gredu  $OA$ , bilo na gredu  $OB$ , (zbog simetrije, slika 9.2) dobija se:

$$\sum M_{O_2}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow \frac{Pa}{2 \tan \alpha} - N_F' \frac{r}{\tan \alpha} = 0. \quad (5)$$

Iz relacije (5) sledi

$$N'_F = N = \frac{Pa}{2r}, \quad F'_{\mu 2} = F_{\mu} = \frac{Q}{2 \cos \alpha} - \frac{Pa}{2r} \operatorname{tg} \alpha. \quad (6)$$

Da bi disk bio u ravnoteži, tj. da ne bi došlo do proklizavanja, sila trenja klizanja mora biti manja od granične vrednosti, odnosno, mora biti zadovoljen uslov

$$|F_{\mu}| \leq \mu_0 N. \quad (7)$$

Imajući u vidu izraze (6) nejednačina (7) se dalje transformiše u nejednačinu:

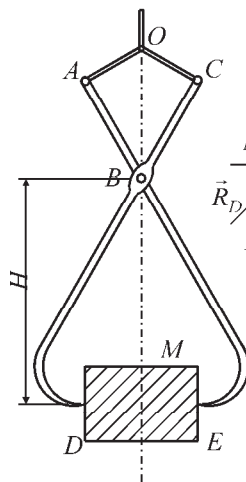
$$-\mu \frac{Pa}{2r} \leq \frac{Q}{2 \cos \alpha} - \frac{Pa}{2r} \operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{Pa}{2r}, \quad (8)$$

iz koje se određuje interval za intenzitete sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$  koji pri uslovu  $\operatorname{tg} \alpha > \mu_0$  glasi

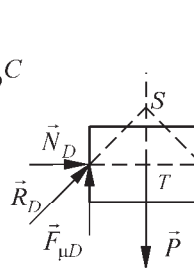
$$\frac{Qr}{a(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)} \leq P \leq \frac{Qr}{a(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)}, \quad (9)$$

gde je  $P=P_1=P_2$  zbog simetrije.

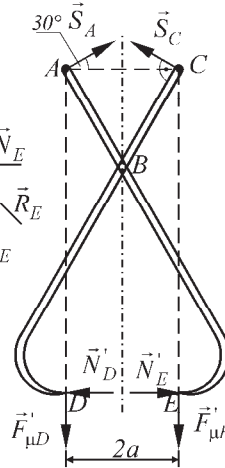
**10.** Sanduk  $M$ , težine intenziteta  $P$ , pridržava se u položaju ravnoteže pomoću držača u obliku klešta. Odrediti pritiske koji vrše krajevi  $D$  i  $E$  držača na sanduk, ako je širina sanduka  $\overline{DE} = 2a$ ;  $\overline{AB} = \overline{BC} = 2a$ ;  $H = 4a$ ;  $\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ$ ;  $\angle AOC = 120^\circ$ . Odrediti najmanji koeficijent trenja klizanja između držača i sanduka? Težine delova držača zanemariti.



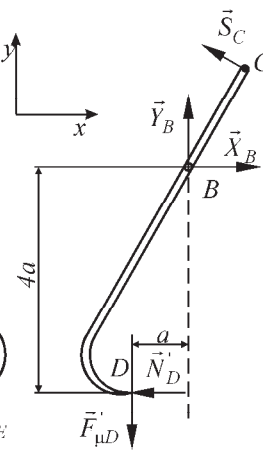
Slika 10



slika 10.1



slika 10.2



slika 10.3

### Rešenje:

Kako na sanduk, po oslobađanju od veza, u tačkama  $D$  i  $E$  deluju reakcije  $\vec{R}_D$  i  $\vec{R}_E$  čije su normalne komponente  $\vec{N}_D$  i  $\vec{N}_E$ , a odgovarajuće sile trenja  $\vec{F}_{\mu D}$  i  $\vec{F}_{\mu E}$

respektivno, (slika 10.1) to se iz uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji djeluje na sanduk dobija

$$N_D = N_E = N \quad \text{i} \quad F_{\mu D} = F_{\mu E} = \frac{P}{2}. \quad (1)$$

Deo analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji djeluje na klešta (sl. 10.2) glasi:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow N_E' - N_D' + (S_A - S_C) \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Az}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -F_{\mu E}' \cdot 2a + S_C \cdot 2a \sin 30^\circ = 0, \quad (3)$$

gde su  $\vec{S}_A$  i  $\vec{S}_C$  sile i štapovima  $OA$  i  $OC$  i  $\vec{N}_D' = -\vec{N}_D$ ,  $\vec{N}_E' = -\vec{N}_E$ ,  $\vec{F}_{\mu D}' = -\vec{F}_{\mu D}$ , i  $\vec{F}_{\mu E}' = -\vec{F}_{\mu E}$ , pa je

$$S_A = S_C = P. \quad (4)$$

Iz jednog od analitičkih uslova ravnoteže kraka klešta  $CD$  (sl. 10.3)

$$\sum M_{Bz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -N_D' \cdot 4a + F_{\mu D}' \cdot a + S_C \cdot 2a = 0, \quad (5)$$

dobija se

$$N_D = \frac{5}{8} P, \quad (6)$$

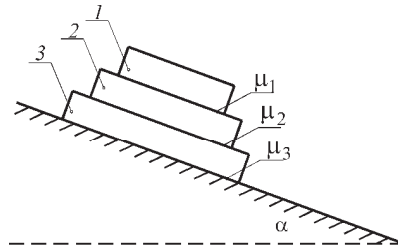
pri čemu u položaju ravnoteže važi uslov

$$F_{\mu D} \leq \mu_0 N_D. \quad (7)$$

S obzirom na (2), iz nejednačine (7) dobija se uslov koji zadovoljava koeficijent trenja

$$\mu_0 \geq \frac{4}{5}. \quad (8)$$

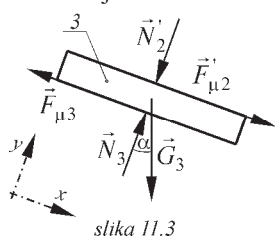
**11.** Homogene prizme 1, 2 i 3 težina intenziteta  $G_1, G_2$  i  $G_3$  respektivno, miruju u položaju kao što je na slici 11 prikazano. Statički koeficijenti trenja klizanja između ploče međusobno i između ploče 3 i podloge su  $\mu_1, \mu_2$  i  $\mu_3$ . Odrediti maksimalni ugao nagiba nepomične strme ravni  $\alpha$  da bi prikazani položaj bio ravnotežni?



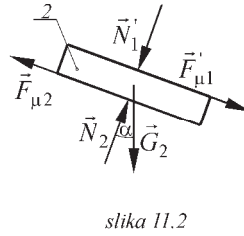
Slika 11

### Rešenje:

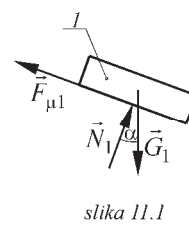
Na slikama 11.1, 11.2 i 11.3 prikazana su tela 1, 2 i 3 oslobođena veza i sile koje deluju na svako od njih.



slika 11.3



slika 11.2



slika 11.1

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuju na tela 1, 2 i 3, u odnosu na koordinatni sistem čija je osa  $Ox$  paralelna strmoj ravni, a osa  $Oy$  upravna na nju, su (slike 11.1, 11.2, 11.3):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -F_{\mu 1} + G_1 \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_1 - G_1 \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_{\mu 1}' - F_{\mu 2} + G_2 \sin \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -N_1' + N_2 - G_2 \cos \alpha = 0, \quad (4)$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_{\mu 2}' - F_{\mu 3} + G_3 \sin \alpha = 0, \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -N_2' + N_3 - G_3 \cos \alpha = 0, \quad (6)$$

gde su  $\vec{F}_{\mu 1}' = -\vec{F}_{\mu 1}$ ,  $\vec{F}_{\mu 2}' = -\vec{F}_{\mu 2}$  sile trenja klizanja i  $\vec{N}_1' = -\vec{N}_1$  i  $\vec{N}_2' = -\vec{N}_2$  normalne komponente odgovarajućih reakcija hrapavih površina.

Iz sistema jednačina (1), (2), (3), (4), (5) i (6) sledi:

$$N_1 = G_1 \cos \alpha, \quad F_{\mu 1} = G_1 \sin \alpha, \quad (7)$$

$$N_2 = (G_1 + G_2) \cos \alpha, \quad F_{\mu 2} = (G_1 + G_2) \sin \alpha, \quad (8)$$

$$N_3 = (G_1 + G_2 + G_3) \cos \alpha, \quad F_{\mu 3} = (G_1 + G_2 + G_3) \sin \alpha, \quad (9)$$

pri čemu u položaju ravnoteže moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$F_{\mu 1} \leq \mu_1 N_1, \quad F_{\mu 2} \leq \mu_2 N_2, \quad F_{\mu 3} \leq \mu_3 N_3. \quad (10)$$

S obzirom na (7), (8) i (9) iz (10) se dobija:

$$G_1 \sin \alpha \leq \mu_1 G_1 \cos \alpha, \quad (11)$$

$$(G_1 + G_2) \sin \alpha \leq \mu_2 (G_1 + G_2) \cos \alpha, \quad (12)$$

$$(G_1 + G_2 + G_3) \sin \alpha \leq \mu_3 (G_1 + G_2 + G_3) \cos \alpha, \quad (13)$$

odnosno

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu_1, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \mu_2, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \mu_3. \quad (14)$$

Prema tome, maksimalni ugao  $\alpha$  da bi sistem sa slike 11 bio u ravnoteži određen je izrazom

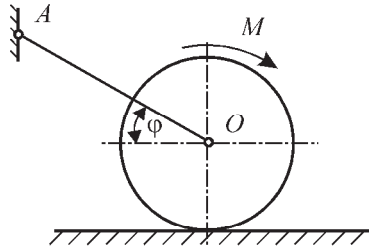
$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu_{\min} \quad (15)$$

gde je

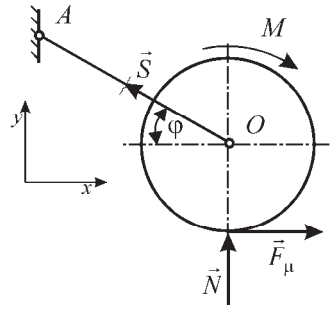
$$\mu_{\min} = \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3). \quad (16)$$

**12.** Disk poluprečnika  $R$  i težine intenziteta  $G$  vezan je za središte  $O$  neistegljivim koncem i oslonjen na hrapavu horizontalnu podlogu. Disk je opterećen spregom sila intenziteta momenta  $M$ . Konac je drugim krajem vezan za vertikalni zid i tački  $A$  tako da u ravnotežnom položaju sa horizontalom gradi ugao  $\varphi$ . Odrediti:

- reakcije svih veza,
- intenzitet momenta sprega sila  $M$  i silu  $\vec{S}$  u koncu za granični slučaj ravnoteže ako je statički koeficijent trenja između diska i hrapave podloge  $\mu_0$ .



Slika 12



Slika 12.1

**Rešenje:**

a) Pošto se ne razmatra granični slučaj ravnoteže to će skup intenziteta sile trenja klizanja ( $0 < F_\mu < F_{\mu gr}$ ) biti određen iz uslova ravnoteže:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_\mu - S \cos \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N + S \sin \varphi - G = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Oz} = 0 \Rightarrow -F_\mu R + M = 0. \quad (3)$$

Iz sistema algebarskih jednačina (1), (2), (3) dobija se:

$$F_\mu = \frac{M}{R}, \quad S = \frac{M}{R \cos \varphi}, \quad N = G - \frac{M \tan \varphi}{R}.$$

b) Za granični slučaj ravnoteže sledi analiza.

Veza između graničnog intenziteta sile trenja i normalne reakcije u toj tački data je u obliku:

$$F_{\mu gr} = \mu_0 N. \quad (4)$$

Koristeći relaciju (4) i rezultate dobijene iz sistema jednačina (1), (2) i (3) dobija se

$$\frac{M}{R} = \mu \left( G - \frac{M}{R} \tan \varphi \right) \Rightarrow M = \frac{\mu_0 GR}{1 + \mu_0 \tan \varphi}. \quad (5)$$

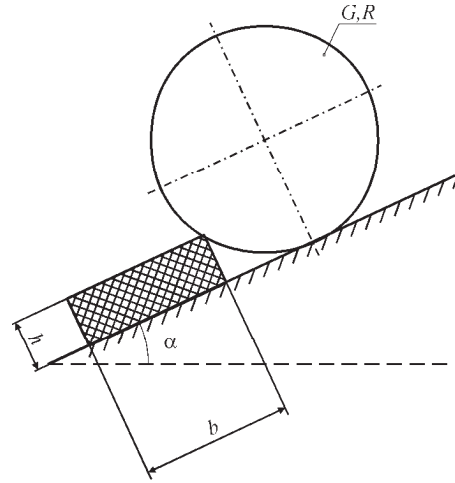
U tom slučaju intenzitet sile u koncu je

$$S = \frac{\mu_0 G}{\cos \varphi + \mu_0 \sin \varphi}. \quad (6)$$

**13.** Točak (homogeni cilindar) težine intenziteta  $G$  i poluprečnika  $R$  oslanja se na dasku zanemarljive težine pravougaonog poprečnog preseka širine  $b$  i visine  $h$ . Točak i daska leže na strmoj ravni nagiba  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{19}/9$ ). Ako je koeficijent trenja klizanja između daske i ravni  $\mu_0 = 3/4$  odrediti:

- interval u kome može da se menja visina daske ( $h_{\min}, h_{\max}$ ),
- minimalnu širinu daske u slučaju kad je njena visina maksimalna.

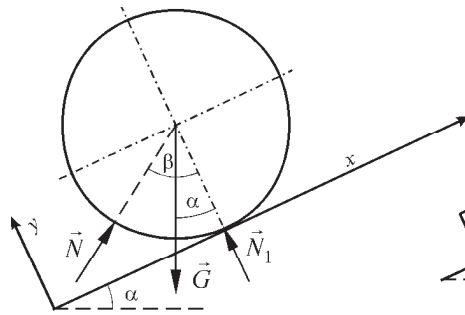
Trenje u tačkama dodira točka sa daskom i podlogom zanemariti.



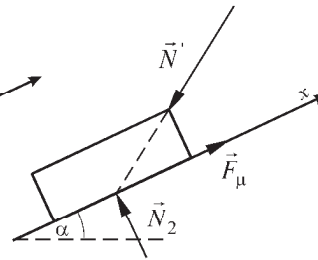
Slika 13

**Rešenje:**

- Analitički uslovi ravnoteže ravnog sučelnog sistema sila koji dejstvuje na disk oslobođen veza, u odnosu na koordinatni sistem  $Oxy$  čija je osa  $Ox$  paralelna strmoj ravni, su prema slici 13.1:



slika 13.1



slika 13.2

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow N \sin \beta - G \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_1 - G \cos \alpha + N \cos \beta = 0. \quad (2)$$

Rešavanjem ovog sistema algebarskih jednačina sledi:



$$N_1 = G \cos \alpha - G \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta}, \quad N = G \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (3)$$

gde je ugao  $\beta$  određen izrazom

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{R^2 - (R - h)^2}}{R - h}. \quad (4)$$

Analitički uslovi ravnoteže ravnog sučelnog sistema sila koji dejstvuje na dasku glase (slika 13.2):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -N' \sin \beta + F_\mu = 0, \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_2 - N' \cos \beta = 0, \quad (6)$$

odakle je s obzirom na (3)

$$F_\mu = G \sin \alpha, \quad N_2 = G \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (7)$$

gde je  $\vec{N}_2$  normalna komponenta reakcije podloge  $\vec{R}$ , a  $\vec{F}_\mu$  odgovarajuća sila trenja klizanja.

Da bi sistem ostao u ravnoteži moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$0 \leq F_\mu \leq \mu_0 N_2, \quad (8)$$

$$N_1 \geq 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \beta \leq \frac{b}{h}. \quad (10)$$

Nejednačina (8) daje uslov da u sistemu ne dodje do proklizavanja, nejednačinom (9) dat je uslov da ne dodje do prevrtanja diska preko daske a nejednačinom (10) dobija se uslov prevrtanja daske oko tačke  $B$  (sl.13.2).

Imajući u vidu (3) i (7) uslovi (8) i (9) mogu se napisati u obliku

$$0 \leq G \sin \alpha \leq \mu G \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (11)$$

$$G \cos \alpha - G \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \geq 0, \quad (12)$$

odakle sledi

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \beta \leq \mu_0. \quad (13)$$

S obzirom na izraz (4), iz (13) dobija se nejednačina

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{\sqrt{R^2 - (R - h)^2}}{R - h} \leq \mu_0, \quad (14)$$

koja određuje minimalnu i maksimalnu vrednost visine daske:

$$h_{\min} = \frac{R}{10}, \quad h_{\max} = \frac{R}{5}. \quad (15)$$

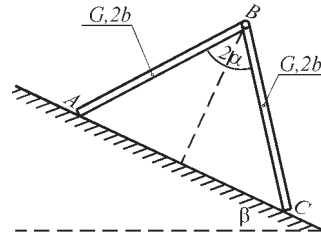
b) Ugao  $\beta$  za  $h = h_{\max}$  je:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta(h = h_{\max}) = \frac{\sqrt{R^2 - (R - h_{\max})^2}}{R - h_{\max}} = \frac{3}{4}. \quad (16)$$

Minimalna širina daske  $b_{\min}$ , pri njenoj maksimalnoj visini prema uslovu (10) je

$$b_{\min} = h_{\max} \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{3R}{20}. \quad (17)$$

**14.** Dvokrake lestvice ABC postavljene su na strmu ravan koja sa horizontalom zaklapa ugao  $\beta$ . Krakovi AB i BC lestvice jednakih dužina  $2b$ , i jednakih težina intenziteta  $G$ , spojeni su pomoću zgloba B. Statički koeficijent trenja između lestvica i strme ravni jednak je  $\mu_0$ , pri čemu je  $\mu_0 > \operatorname{tg} \beta$ . Odrediti najveći i najmanji ugao rasklapanja lestvice pri kome će one biti u ravnoteži.



Slika 14

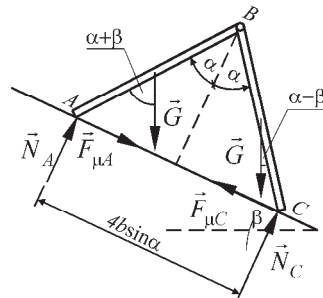
**Rešenje:**

Minimalni ugao  $\alpha_{\min}$  rasklapanja lestvica, određuje se iz uslova da pri tom uglu dolazi do prevrtanja lestvica oko tačke C, udesno. U tom slučaju je reakcija u tački A jednaka nuli. Jedan od analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na sistem krutih tela oslobođen veza ima oblik (slika 14.1)

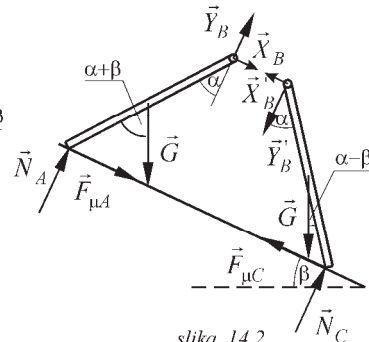
$$\sum M_{Cz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow Gb \sin(\alpha_{\min} - \beta) + G \cos \beta (4b \sin \alpha_{\min} - b \sin \alpha_{\min}) - Gb \sin \beta \cos \alpha_{\min} = 0, \quad (1)$$

odakle sledi da je

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$



Slika 14.1



slika 14.2

Za određivanje najvećeg ugla rasklapanja potrebno je prethodno izračunati intenzitete reakcija oslonaca u tačkama A i C, koji se mogu izračunati iz sledećih jednačina:

$$\sum M_{Az}^{\vec{F}_i} = 0, \quad N_C 4b \sin \alpha - Gb \sin(\alpha + \beta) - Gb(3 \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Cz}^{\vec{F}_i} = 0, \quad -N_A 4b \sin \alpha + Gb \sin(\alpha - \beta) + Gb(3 \cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) = 0, \quad (4)$$

odakle je

$$N_C = G(\cos \beta + 0,5 \sin \beta \operatorname{tg} \alpha), \quad (5)$$

$$N_A = G(\cos \beta - 0,5 \sin \beta \operatorname{tg} \alpha). \quad (6)$$

Intenziteti sila trenja u tačkama dodira lestvice i ravni,  $\vec{F}_{\mu A}$  i  $\vec{F}_{\mu C}$  određuju se iz uslova ravnoteže posebno za krak  $AB$ , odnosno  $BC$  (sl. 14.2):

$$\sum M_{Bz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -N_A 2b \sin \alpha + F_{\mu A} 2b \cos \alpha + Gb \sin(\alpha + \beta) = 0, \quad (7)$$

$$\sum M_{Bz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow N_C 2b \sin \alpha - F_{\mu C} 2b \cos \alpha - Gb \sin(\alpha - \beta) = 0. \quad (8)$$

Iz predhodnih jednačina sledi:

$$F_{\mu A} = -G(\sin \beta - 0,5 \cos \beta \operatorname{tg} \alpha), \quad (9)$$

$$F_{\mu C} = G(\sin \beta + 0,5 \cos \beta \operatorname{tg} \alpha). \quad (10)$$

Lestvice će, biti u ravnoteži samo ako intenziteti sila trenja  $\vec{F}_{\mu A}$  i  $\vec{F}_{\mu C}$  ne prelaze odgovarajuće granične vrednosti, tj. ako je:

$$-\mu_0 N_A \leq F_{\mu A} \leq \mu_0 N_A, \quad (11)$$

$$-\mu_0 N_C \leq F_{\mu C} \leq \mu_0 N_C. \quad (12)$$

S obzirom na (5), (6), (9) i (10) i posle kraćeg sređivanja, nejednačine (11) i (12) mogu se napisati u obliku:

$$-\mu_0(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - 0,5 \sin \beta) \leq -\operatorname{tg} \alpha \sin \beta + 0,5 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos \beta \leq \mu_0(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - 0,5 \sin \beta), \quad (13)$$

$$-\mu_0(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha + 0,5 \sin \beta) \leq \operatorname{tg} \alpha \sin \beta + 0,5 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos \beta \leq \mu_0(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha + 0,5 \sin \beta). \quad (14)$$

Ove nejednačine su ekvivalentne sledećem sistemu nejednačina:

$$x^2 + 2x(\mu_0 - \operatorname{tg} \beta) - \mu_0 \operatorname{tg} \beta \geq 0, \quad (15)$$

$$x^2 - 2x(\mu_0 + \operatorname{tg} \beta) + \mu_0 \operatorname{tg} \beta \leq 0,$$

$$x^2 + 2x(\mu_0 + \operatorname{tg} \beta) + \mu_0 \operatorname{tg} \beta \geq 0,$$

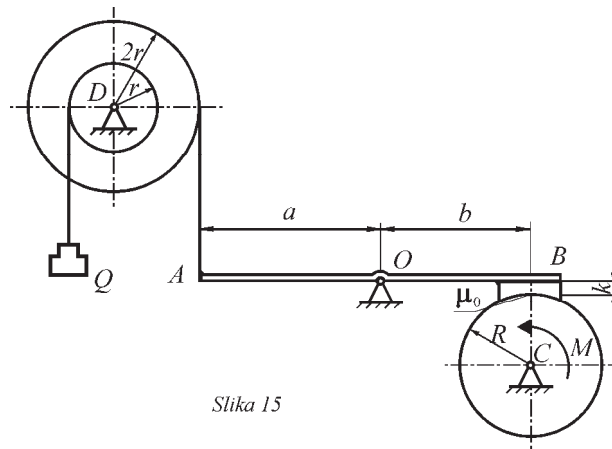
$$x^2 - 2x(\mu_0 - \operatorname{tg} \beta) - \mu_0 \operatorname{tg} \beta \leq 0,$$

gde je  $x = \operatorname{tg} \alpha$ .

Ako se uvede smena:  $\operatorname{tg} \beta = \mu_0 k$ , gde je u skladu sa uslovom zadatka,  $0 < k < 1$ , i reši predhodni sistem nejednačina po  $x$ , posle odgovarajućih transformacija sledi:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \mu_0 - \operatorname{tg} \beta + \sqrt{(\mu_0 - \operatorname{tg} \beta)^2 + \mu_0 \operatorname{tg} \beta}. \quad (16)$$

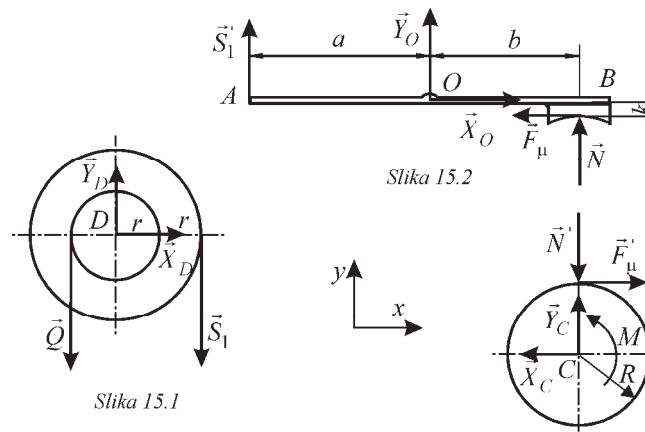
**15.** Na koaksijalni<sup>1</sup> laki cilindar  $D$ , poluprečnika  $r$  i  $2r$  (slika 15), namotana su dva laka, gipka i neistegljiva užeta. Za kraj jednog užeta vezan je teret težine intenziteta  $Q$ , a kraj drugog užeta je vezan za laku krutu polugu  $AB$ , koja je vezana za nepomični oslonac  $O$ . Na drugom kraju, u tački  $B$  je za polugu kruto vezana papučica, koja naleže na obod lakog diska čiji je centar vezan nepomičnim osloncem  $C$ . Ako na disk u naznačenom smeru deluje spreg sila intenziteta  $M$ , a koeficijent trenja klizanja između papučice i diska iznosi  $\mu_0$ , odrediti najmanju težinu tereta da sistem krutih tela bude u ravnoteži. Sve potrebne geometrijske veličine su date na slici (debljina papučice iznosi  $k$ ).



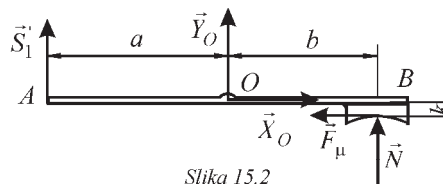
Slika 15

**Rešenje:**

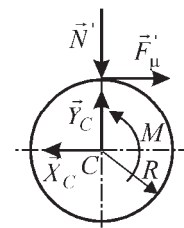
Koaksijalni laki cilindar oslobođen veza prikazan je na slici 15.1.



Slika 15.1



Slika 15.2



Slika 15.3

<sup>1</sup> Koaksijalni cilindar se definiše kao kruto telo nastalo krutim spajanjem dva cilindra različitih prečnika, pri čemu im se podužne ose simetrije poklapaju.

Analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na koaksijalni cilindar dati su u obliku:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_D = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_D - Q - S_1 = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{Dz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow Qr - S_1 \cdot 2r = 0. \quad (3)$$

Iz uslova (1), (2) i (3) sledi

$$X_D = 0, \quad S_1 = \frac{Q}{2}, \quad Y_D = \frac{3}{2}Q.$$

Kako je  $X_D = 0$ , na koaksijalni cilindar dejstvuje sistem paralelnih sila ( $\vec{Y}_D$ ,  $\vec{Q}$  i  $\vec{S}_1$ ).

Poluga AB za koju je kruto vezana papuča prikazana je na slici 15.2. Analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na polugu i papuču glase:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_O - F_\mu = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_O + S'_1 + N = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_{Oz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow Nb - F_\mu k - S'_1 a = 0. \quad (6)$$

Imajući u vidu da je  $\vec{S}_1 = -\vec{S}'_1$ , i da u graničnom položaju ravnoteže sistema krutih tela važi relacija

$$F_\mu = \mu_0 N \quad (7)$$

rešenje sistema algebarskih jednačina (4),..., (7) je:

$$N = \frac{Qa}{2(b - \mu_0 k)}, \quad Y_O = -\frac{Q}{2} \left( 1 + \frac{a}{b - \mu_0 k} \right),$$

$$F_\mu = \mu \frac{Qa}{2(b - \mu_0 k)}, \quad X_O = \mu \frac{Qa}{2(b - \mu_0 k)}. \quad (8)$$

Na slici 15.3 prikazan je disk oslobođen veza, pa analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na njega glase:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -X_C + F'_\mu = 0, \quad (9)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_C - N' = 0, \quad (10)$$

$$\sum M_{Cz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow M - F'_\mu R = 0. \quad (11)$$

Iz sistema algebarskih jednačina (9), (10) i (11), s obzirom da je  $F_\mu = F'_\mu$  i  $N = N'$ , sledi:

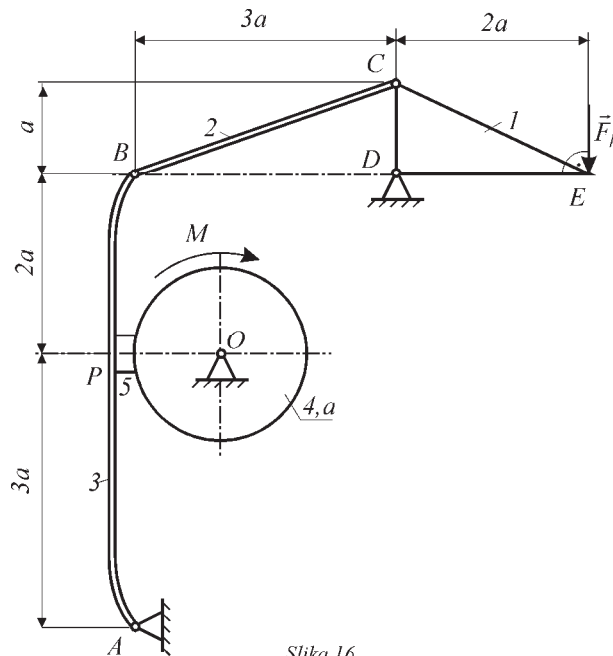
$$X_C = \mu \frac{Qa}{2(b - \mu k)}, \quad Y_C = \frac{Qa}{2(b - \mu k)}, \quad (12)$$

$$M = \mu R \frac{Qa}{2(b - \mu k)}. \quad (13)$$

Treba uočiti da u ovom slučaju jednačine (1), (2), (4), (5), (9) i (10) nisu neophodne za rešavanje zadatka jer nisu eksplicitno tražene reakcije u zglobovima D, O i C. Traženi intenzitet težine tereta određuje se iz jednačine (13) i iznosi

$$Q = \frac{2M(b - \mu_0 k)}{\mu_0 a R}. \quad (14)$$

**16.** Odrediti intenzitet  $F_k$  najmanje kočione sile kojom treba delovati u tački E poluge<sup>2</sup> 1 da ne dođe do proklizavanja između papuče 5 i doboša 4, ako je statički koeficijent trenja klizanja između doboša i papuče jednak  $\mu_0$ . Dimenzije elemenata kočionog sistema date su na slici 16. Intenzitet momenta sprega sile koji deluje na doboš poluprečnika  $a$  iznosi  $M$ . Veze u tačkama A, B, C, D i O su zglobne. Papuča 5 je kruto vezana za polugu 3. Težine svih elemenata kočionog sistema zanemariti.



Slika 16

**Rešenje:**

Sistem krutih tela prikazan na slici 16 treba rastaviti i osloboditi veza. Poluga 1 oslobodena veza prikazana je na slici 16.1.

Jedan od uslova ravnoteže ravnog sistema sile koji dejstvuje na polugu 1 glasi:

$$\sum M_{Dz}^{\vec{F}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad aS_1 \sin \alpha - 2aF_k = 0, \quad (1)$$

odakle sledi intenzitet sile u štapu CB

$$S_1 = \frac{2F_k}{\sin \alpha} \quad (2)$$

gde su

<sup>2</sup> Poluga je kruto telo oblika pravog ili krivog štapa.

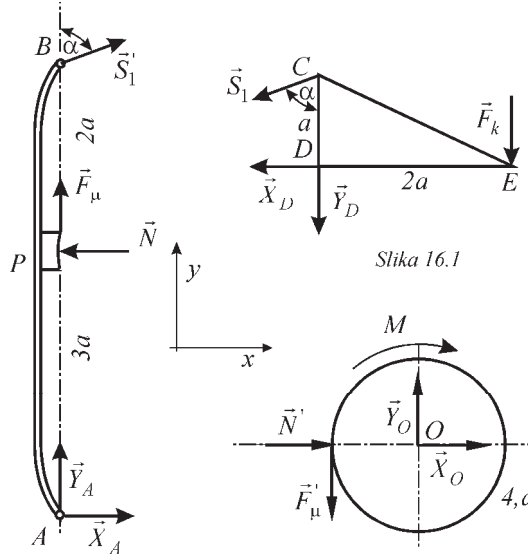
$F_k$  intenzitet kočione sile, i

$\alpha$  ugao između podužne ose štapa BC i vertikale.

Poluga AB za koju je kruto vezana papuča oslobođena veza prikazana je na slici

16.2. Jedan od uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na polugu AB je

$$\sum M_{Az}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow 3aN - 5aS'_l \sin \alpha = 0. \quad (3)$$



Slika 16.2

Slika 16.3

Imajući u vidu da je za intenzitet reakcije u lakom štapu CB ispunjen uslov  $S_1 = S'_1$ , iz jednačine (3) sledi veza između intenziteta normalne reakcije između doboša i papučice, i intenziteta kočione sile

$$N = \frac{5 \sin \alpha}{3} S'_1 \Rightarrow N = \frac{5 \sin \alpha}{3} \frac{2F_k}{\sin \alpha} = \frac{10}{3} F_k. \quad (4)$$

Doboš oslobođen veza prikazan je na slici 16.3. Jedan od uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na doboš glasi

$$\sum M_{Oz} = 0 \Rightarrow aF'_\mu - M = 0, \quad (5)$$

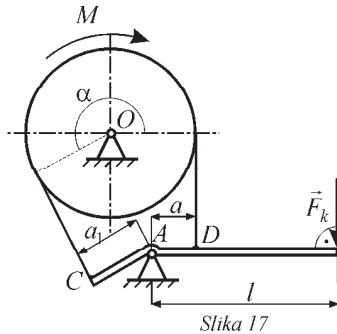
odakle se izračunava intenzitet sile trenja klizanja u zavisnosti od sprega sila intenziteta momenta M (gde je  $F'_\mu = F_\mu$ )

$$F'_\mu = \frac{M}{a}. \quad (6)$$

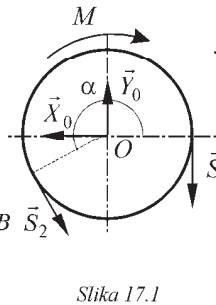
Obzirom da je  $F_\mu \leq \mu_0 N$ , pri čemu se znak "=" odnosi na granični položaj ravnoteže, slede relacije iz kojih proističe intenzitet kočione sile koji se u zadatku traži:

$$\mu_0 N \geq \frac{M}{a} \Rightarrow \mu_0 \frac{10}{3} F_k \geq \frac{M}{a} \Rightarrow F_k \geq \frac{3M}{10a\mu_0} \Rightarrow F_{k,min} = \frac{3M}{10a\mu_0}. \quad (7)$$

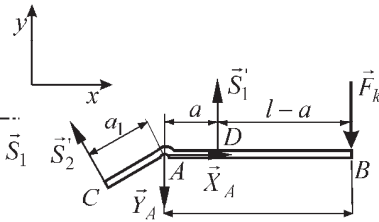
**17.** Odrediti intenzitet sile kočenja  $\vec{F}_k$ , kojom treba djelovati na polugu  $CAB$  diferencijalne kočnice sa trakom, da bi doboš na koji deluje spreg sila intenziteta momenta  $M$  bio u ravnoteži. Ugao zahvatanja trake i doboša je  $\alpha$ , a statički koeficijent trenja klizanja između trake i doboša je  $\mu_0$ . Rastojanja:  $\overline{AC} = a_1$ ,  $\overline{AB} = l$  i  $\overline{AD} = a$ .



Slika 17



Slika 17.1



Slika 17.2

### Rešenje:

Sistem krutih tela prikazan na slici 17 treba rastaviti i međusobni uticaj delova sistema zameniti reakcijama veza. S obzirom da se u zadatku ne traži reakcija veze u zglobovima O, može se pisati samo jedan od analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji deluje na doboš oslobođen veza (slika 17.1)

$$\sum M_{Oz}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow S_2 r - S_1 r - M = 0, \quad (1)$$

odakle sledi

$$S_2 - S_1 = \frac{M}{r}. \quad (2)$$

Između intenziteta  $S_2$  i  $S_1$  sila važi odnos  $S_2 > S_1$ , što sledi iz jednačine (2), jer su i  $M$  i  $r$  pozitivne veličine.

Kako se zadatkom ne traži ni reakcija zgloba A, piše se samo jedan analitički uslov ravnoteže<sup>3</sup> sistema sila koji deluje na polugu  $CAB$  oslobođenu veza (slika 17.2)

$$\sum M_{Az}^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow -S_2' a_1 + S_1' a - F_k l = 0. \quad (3)$$

odakle sledi

$$F_k = \frac{-S_2' a_1 + S_1' a}{l}. \quad (4)$$

Vodeći računa da je  $\vec{S}_1' = -\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2' = -\vec{S}_2$ , i da postoji veza između njihovih intenziteta preko Ojlerove jednačine

<sup>3</sup> Čitalac može zapaziti da, ukoliko se ne traže reakcije veza u zglobovima kojima su posmatrana tela vezana, potrebno je napisati samo jedan analitički uslov ravnoteže, tj. momentnu jednačinu.



$$S_1 = S_2 e^{-\mu_0 \alpha} \quad (5)$$

gde su:

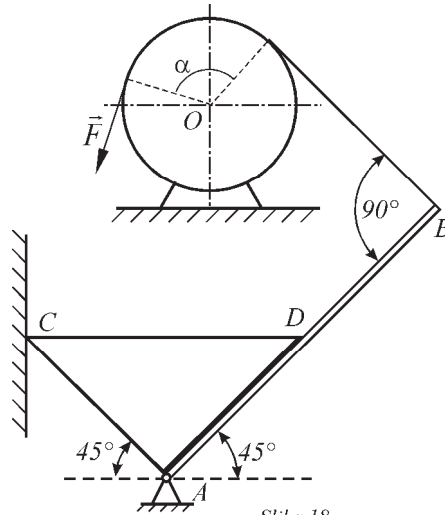
$\mu_0$  - statički koeficijent trenja između doboša i trake,

$\alpha$  - ugao zahvata između doboša i trake,

sledi:

$$S_1 = \frac{M}{r(e^{\mu_0 \alpha} - 1)}, \quad S_2 = \frac{M e^{\mu_0 \alpha}}{r(e^{\mu_0 \alpha} - 1)}, \quad F_k = \frac{M(a - a_1 e^{\mu_0 \alpha})}{rl(e^{\mu_0 \alpha} - 1)}. \quad (6)$$

**18.** Homogena ploča oblika jednakokrakog pravouglog trougla katete dužine  $a$  i težine intenziteta  $G$ , oslanja se temenom  $C$  o glatki vertikalni zid, a stranicom  $AD$  leži na gredi  $AB$ . Greda  $AB$ , dužine  $2a$  i težine intenziteta  $G$ , zglibno je vezana u tački  $A$  za nepomičan oslonac. U tački  $B$  greda je vezana tankim neistegljivim lakim užetom koje je prebačeno preko nepokretnog, hrapavog cilindra. Na kraju užeta deluje sila intenziteta  $F = \frac{G\sqrt{2}}{4}$ . Statički koeficijent trenja klizanja između užeta i cilindra je  $\mu_0 = 0,1$ . Odrediti reakcije svih veza i najmanji ugao obuhvata  $\alpha$ , pri kome se sistem nalazi u stanju ravnoteže, prikazanom na slici 18.



### Rešenje:

Analitički uslovi ravnoteže ravnog sučelnog sistema sila koji deluje na homogenu ploču oslobođenu veza glase (slika 18.1):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow R_C - N \cos 45^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -G + N \sin 45^\circ = 0. \quad (2)$$

Homogena greda  $AB$  oslobođena veza predstavljena je na slici 18.2. Analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na homogenu gredu imaju oblik:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A - S' \cos 45^\circ + N' \cos 45^\circ = 0, \quad (3)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - G + S' \sin 45^\circ - N' \sin 45^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_{Az}^{F_i} = 0 \Rightarrow Ga \frac{\sqrt{2}}{2} - S' \cdot 2a + N' \frac{a}{2} = 0. \quad (5)$$

Rešavanjem algebarskih jednačina (1),..., (5) sledi

$$X_A = -\frac{G}{2}, \quad Y_A = \frac{3G}{2}, \quad (6)$$

$$S' = \frac{G\sqrt{2}}{2}, \quad R_C = G, \quad N = G\sqrt{2}. \quad (7)$$

Preko hrapavog nepokretnog cilindra prebačeno je neistegljivo uže (slika 18.3) na čijem slobodnom kraju deluje zadata sila  $\vec{F}$   $\left(F = \frac{G\sqrt{2}}{4}\right)$ . Vodeći računa da je  $\vec{S} = -\vec{S}'$  i

da je intenzitet sile  $\vec{S}$  određen iz analitičkih uslova ravnoteže  $\left(S = \frac{G\sqrt{2}}{2}\right)$ , na osnovu

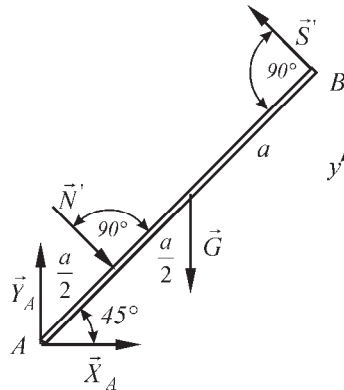
Ojlerove jednačine postoji veza između intenziteta sile  $\vec{F}$  i  $\vec{S}$

$$F = Se^{-\mu_0\alpha}, \quad (8)$$

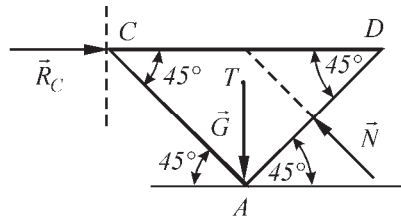
gde su:

$\mu_0$  - statički koeficijent trenja klizanja između užeta i cilindra i

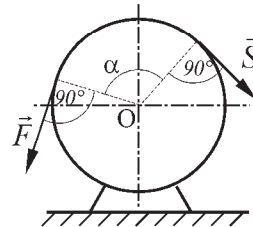
$\alpha$  - ugao zahvata između užeta i cilindra koji treba odrediti.



Slika 18.2



Slika 18.1

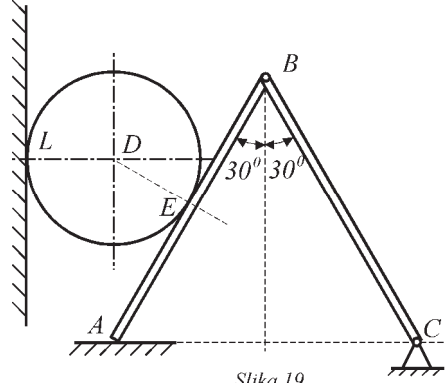


Slika 18.3

Iz relacije (8) sledi

$$\alpha = \frac{\ln 2}{0,1} = 6,9314 \Rightarrow \alpha = 397,15^\circ. \quad (9)$$

**19.** Sistem krutih tela se sastoji od štapa BC zanemarljive težine, grede AB dužine  $2l$ , težine  $2\vec{G}$ , i diska težine  $\vec{G}$ . Disk se oslanja na vertikalni zid i na gredu AB u tačkama L i E ( $\overline{AE} = \overline{EB}$ ). Veze u tačkama B i C su zglobove. Greda AB se krajem A oslanja o horizontalnu hrapavu podlogu. Odrediti koeficijent trenja klizanja  $\mu_0$  između grede i hrapave podloge, da bi položaj sistema na slici 19 bio ravnotežni.

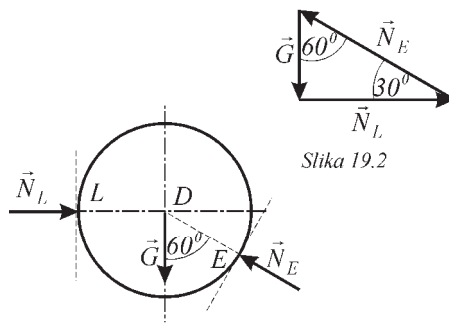


Slika 19

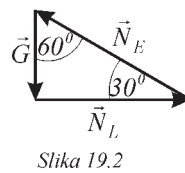
**Rešenje:**

Na disk oslobođen veza deluje sistem tri sučeljne sile (slika 19.1). Iz trougla sile (slika 19.2) sledi:

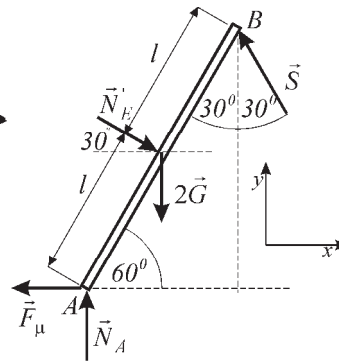
$$N_E = 2G, \quad N_L = G\sqrt{3} \quad (1)$$



Slika 19.1



Slika 19.2



Slika 19.3

Zatim se posmatra ravnoteža grede AB. Analitički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na gredu AB oslobođenu veza imaju oblik (slika 19.3):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -S \cos 60^\circ + N_E \cos 30^\circ - F_\mu = 0, \quad (2)$$

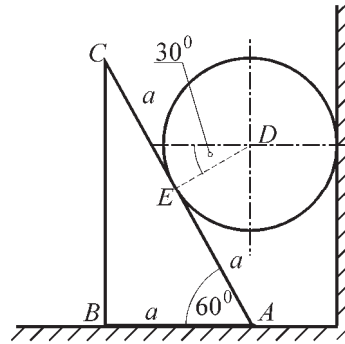
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow S \cos 30^\circ - 2G - N_E \cos 60^\circ + N_A = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow 2lS \cos 30^\circ - 2Gl \cos 60^\circ - N_E l = 0. \quad (4)$$

Rešavanjem sistema jednačina (2), (3) i (4) uzimajući u obzir da je u graničnom slučaju ravnoteže  $F_\mu = \mu_0 N_A$  sledi:

$$S = G\sqrt{3}, \quad N_A = \frac{3}{2}G, \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**20.** Sistem homogenih krutih tela sastoji se od ploče ABC oblika pravouglog trougla težine  $\vec{G}$  i diska D težine  $\vec{Q}$ . Ploča se oslanja na horizontalnu hrapavu podlogu, pri čemu je statički koeficijent trenja klizanja  $\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , a disk na ploču i na vertikalni zid. Odrediti položaj reakcije podloge i maksimalnu težinu diska pri kojoj sistem ostaje u ravnoteži. Trenje u ostalim vezama zanemariti. Dato je:  $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{AB} = a$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ .



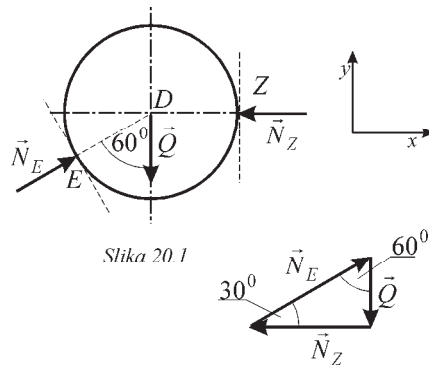
Slika 20

**Rešenje:**

Na disk oslobođen veza deluje sistem od tri sučeljne sile (slika 20.1). Iz trougla sila (slika 20.2) sledi:

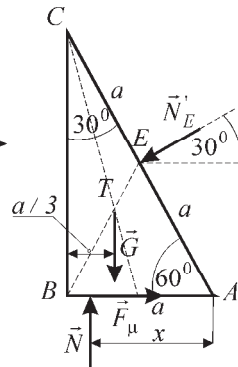
$$N_E = 2Q.$$

(1)



Slika 20.1

Slika 20.2



Slika 20.3

Analitički uslovi ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila koji deluje na trougaonu ploču oslobođenu veza imaju oblik (slika 20.3):

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_\mu - 2Q \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - G - 2Q \frac{1}{2} = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow -Nx + G \frac{2a}{3} + 2Qa = 0. \quad (4)$$

Rešavanjem predhodnog sistema algebarskih jednačina dobija se:

$$F_\mu = Q\sqrt{3}, \quad N = G + Q, \quad x = \frac{2G + 6Q}{3G + 3Q} a.$$

U ovom slučaju moraju se poštovati sledeća ograničenja:

- da ne dođe do proklizavanja ploče ABC, tj.

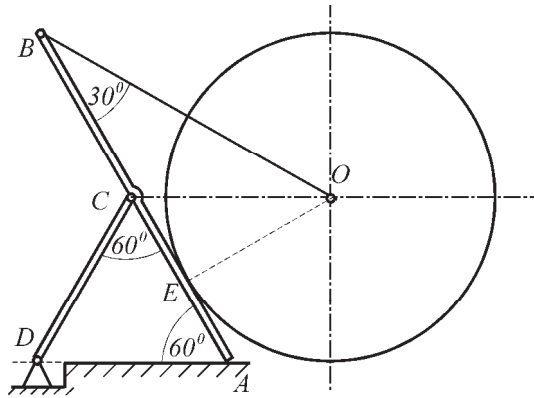
$$F_{\mu} \leq \mu_0 N, \quad Q\sqrt{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(G+Q) \Rightarrow Q \leq \frac{G}{2}, \quad (5)$$

▪ da ne dodje do prevrtanja ploče ABC oko tačke B, odnosno:

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow 0 \leq \frac{2G+6Q}{3G+3Q}a \leq a \Rightarrow Q \leq \frac{G}{3}. \quad (7)$$

Da bi bila ispunjena oba uslova (5) i (7) mora biti  $Q_{\max} = \frac{G}{3}$ .

**21.** Sistem krutih tela prikazan na slici 21 sastoji se od grede AB, dužine  $4l$ , težine  $2\vec{G}$ , lakog štapa CD, dužine  $2l$  i diska poluprečnika  $l\sqrt{3}$ , težine  $\vec{G}$ . Disk je lakim, neistegljivim užetom vezan za kraj grede AB i oslanja se na nju u tački E. Drugim krajem A greda se oslanja na horizontalnu hrapavu podlogu. Veze u tačkama D i C su zglobne. Odrediti silu u užetu BO i statički koeficijent trenja klizanja između grede AB i podloge, ako je



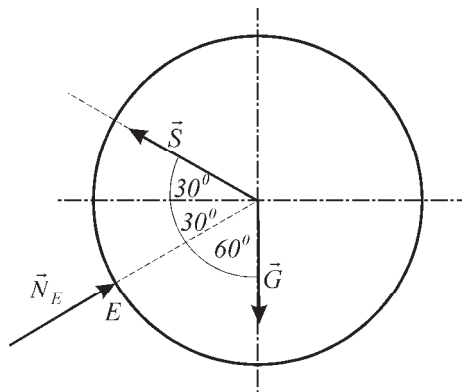
Slika 21

prikazani položaj sistema ravnotežni ( $\overline{CE} = \overline{EA} = \frac{\overline{BC}}{2}$ ).

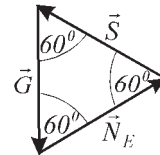
### Rešenje:

Na disk oslobođen veza deluje ravan sistem sučeljnih sila (slika 21.1). Iz trougla sila sledi (slika 21.2):

$$N_E = S = G. \quad (1)$$



Slika 21.1



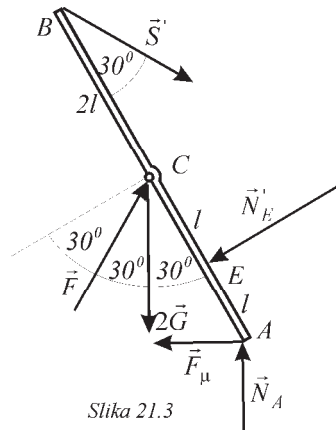
Slika 21.2

Analitički uslovi ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila koji deluje na gredu AB oslobođenu veza glase (slika 21.3):

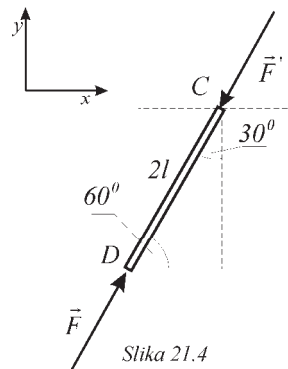
$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -F_\mu - N_E \cos 30^\circ + F \sin 30^\circ + S \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_A - N_E \cos 60^\circ + F \sin 60^\circ - S \cos 60^\circ - 2G = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow lN_E - 2lF \sin 60^\circ + 2G \cdot 2l \sin 30^\circ - 4lS \cos 60^\circ = 0. \quad (4)$$



Slika 21.3

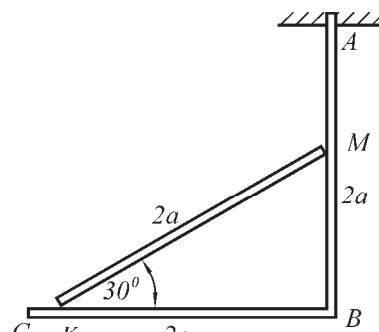


Slika 21.4

Uzimajući u obzir da je u graničnom položaju ravnoteže  $F_\mu = \mu_0 N_A$ , rešenje predhodnog sistema jednačina je:

$$F = \frac{G\sqrt{3}}{3}, \quad N_A = \frac{5G}{2}, \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{15}.$$

**22.** Sistem krutih tela sastoji se od homogenog ugaonika ABC, konstantnog poprečnog preseka, čija je težina  $2\vec{G}$  i homogene grede MK, dužine  $2a$ , težine  $\vec{G}$ . Ugaonik je u tački A uklešten. Vertikalni krak ugaonika je gladak, dok između donjeg kraka i grede u tački K postoji trenje. Odrediti reakcije unutrašnjih i spoljašnjih veza sistema kao i statički koeficijent trenja  $\mu_0$ , tako da ugao koji podužna osa grede MK zaklapa sa horizontalnim krakom ugaonika bude  $\alpha = 30^\circ$ , ako je  $\overline{AB} = \overline{BC} = 2a$ .



Slika 22

**Rešenje:**

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na sistem krutih tela oslobođen veza su (slika 22.1):

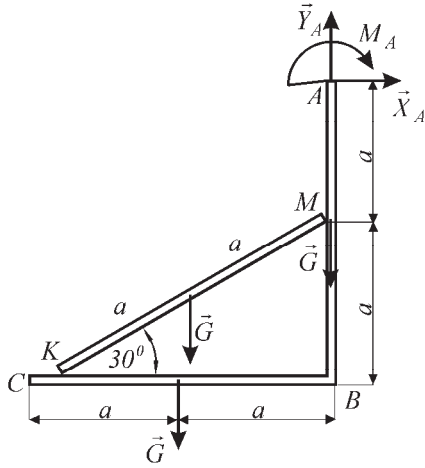
$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A - 3G = 0, \quad (2)$$

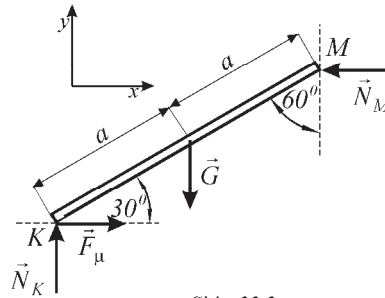
$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow Ga + Ga \frac{\sqrt{3}}{2} - M_A = 0. \quad (3)$$

Rešavanjem predhodnog sistema algebarskih jednačina dobija se:

$$X_A = 0, \quad Y_A = 3G, \quad M_A = Ga \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right).$$



Slika 22.1



Slika 22.2

Jednačine ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na gredu MK oslobođenu veza glase (slika 22.2)

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_\mu - N_M = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_K - G = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_{Kz} = 0 \Rightarrow -Ga \frac{\sqrt{3}}{2} + N_M a = 0. \quad (6)$$

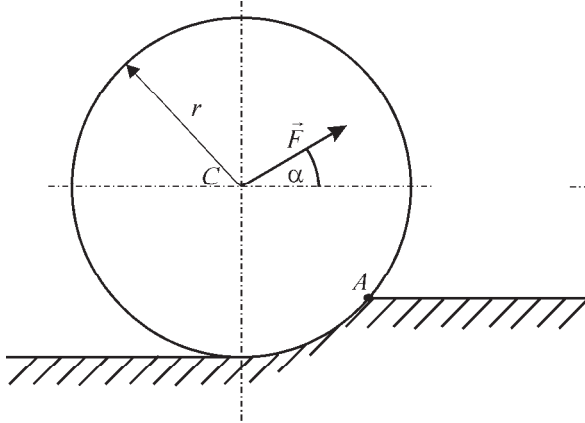
Iz jednačina (5) i (6) se dobija

$$N_K = G, \quad N_M = G \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (7)$$

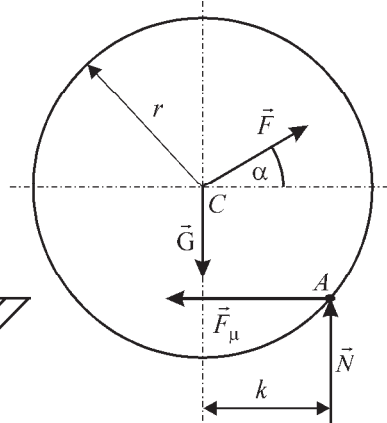
a iz jednačine (4), s obzirom da je sila trenja klizanja u graničnom slučaju  $F_\mu = \mu_0 N_K$  sledi

$$F_\mu = N_M \Rightarrow \mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (8)$$

**23.** Homogeni kružni cilindar, težine  $\vec{G}$  i poluprečnika,  $r$  leži na hrapavoj horizontalnoj ravni (slika 23). Ako je statički koeficijent trenja klizanja između cilindra i ravni  $\mu_0$ , a koeficijent trenja kotrljanja  $k$ , odrediti silu  $\vec{F}$  koja deluje pod uglom  $\alpha$  prema horizontali u centru cilindra, da bi cilindar ostao u stanju mirovanja.



Slika 23



Slika 23.1

### Rešenje

Iz analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji dejstvuje na cilindar oslobođen veza sledi:

$$N = G - F \sin \alpha, \quad F \cos \alpha \leq F_{\mu gr} = \mu_0 N, \quad F \cos \alpha \cdot r \leq Nk, \quad (1)$$

što u fizičkom smislu znači da horizontalna komponenta sile  $F \cos \alpha$  ne može da "savlada" maksimalnu silu trenja klizanja i istovremeno da njen moment u odnosu na tačku A ne može da "savlada" moment otpora kotrljanja čiji je intenzitet  $Nk$ .

Vodeći računa o intenzitetu sile  $\vec{N}$  dobija se:

$$F \cos \alpha \leq \mu_0 (G - F \sin \alpha) \Rightarrow F \leq \frac{\mu_0}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha} G, \quad (2)$$

$$F \cos \alpha \cdot r \leq (G - F \sin \alpha)k \Rightarrow F \leq \frac{k}{r \cos \alpha + k \sin \alpha} G. \quad (3)$$

Prema tome granična vrednost intenziteta sile  $\vec{F}$  je određena relacijama

$$F'_{gr} = \frac{\mu_0}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha} G, \quad F''_{gr} = \frac{k}{r \cos \alpha + k \sin \alpha} G \quad (4)$$

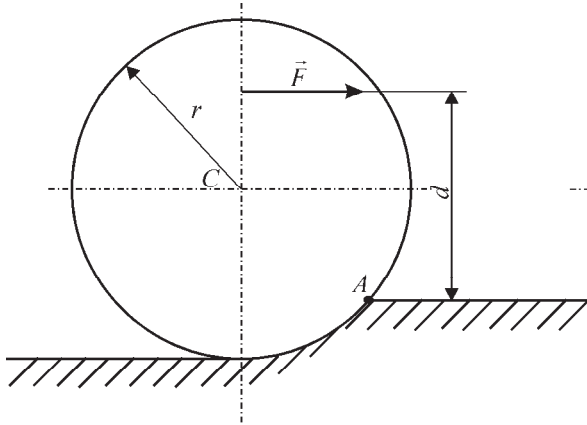
odnosno relacijom u kojoj figuriše manji od dva broja



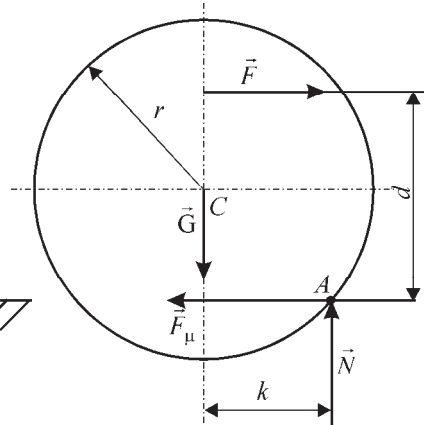
$\frac{\mu_0}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha}$  i  $\frac{k}{r \cos \alpha + k \sin \alpha}$ . Na osnovu prethodne analize zaključuje se da će cilindar ostati u stanju mirovanja za sve vrednosti intenziteta sile  $\vec{F}$  koje zadovoljavaju jednačinu

$$F \leq \min \left\{ \frac{\mu_0}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha} G, \frac{k}{r \cos \alpha + k \sin \alpha} G \right\}. \quad (5)$$

U datoj analizi treba razmotriti mogućnosti pokretanja cilindra iz stanja mirovanja (neka je  $\alpha=0$ ). Napadnu liniju sile  $\vec{F}$  moguće je pomerati iznad i ispod tačke  $C$ . Ako je napadna linija sile  $\vec{F}$  iznad tačke  $C$  tada je, obično,  $\mu_0 > \frac{k}{d}$  (slika 23.3 i 23.4).



Slika 23.2



Slika 23.3

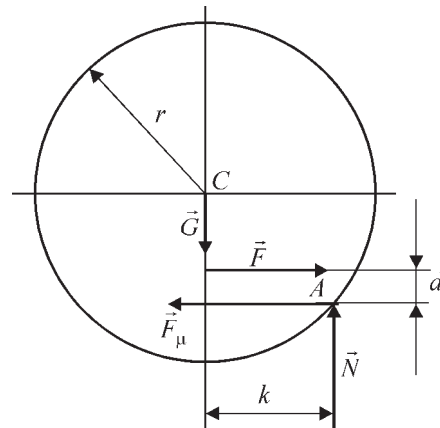
Ako intenzitet sile  $\vec{F}$  zadovoljava nejednačinu

$$\frac{k}{d} G < F \leq \mu_0 G \quad (6)$$

cilindar će se pokrenuti iz stanja mirovanja i započeti kotrljanje bez klizanja.

U fizičkom smislu to znači da je intenzitet sile  $\vec{F}$  takav da ne može da "savlada" maksimalnu silu trenja klizanja (tj. otpor klizanju) ali je njen moment u odnosu na tačku  $A$  takav da može da "savlada" moment otpora kotrljanju (tj. moment sprega sila  $\vec{F}$  i  $\vec{F}_\mu$  je veći od momenta sprega sila  $\vec{G}$  i  $\vec{N}$ ) što dovodi do započinjanja kotrljanja bez klizanja.

Ako je napadna linija sile  $\vec{F}$  ispod tačke  $C$  ( $d$  veoma malo) tada je, obično,  $\mu_0 < \frac{k}{d}$  (sl.23.4).



Slika 23.4

U ovom slučaju ako intenzitet sile  $\vec{F}$  zadovoljava nejednačinu

$$\mu_0 G < F \leq \frac{k}{d} G \quad (7)$$

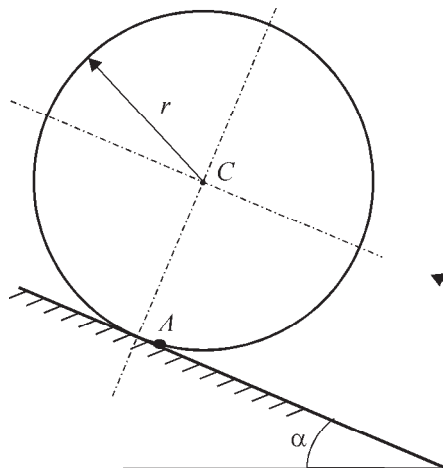
cilindar će se iz stanja mirovanja pokrenuti i započeti klizanje bez kotrljanja, što u fizičkom smislu znači da je intenzitet sile  $\vec{F}$  takav da može da "savlada" maksimalnu silu trenja klizanja ali je njen moment u odnosu na tačku  $A$  takav da ne može da "savlada" moment otpora kotrljanju.

Kada je intenzitet sile  $\vec{F}$  takav da zadovoljava nejednačinu

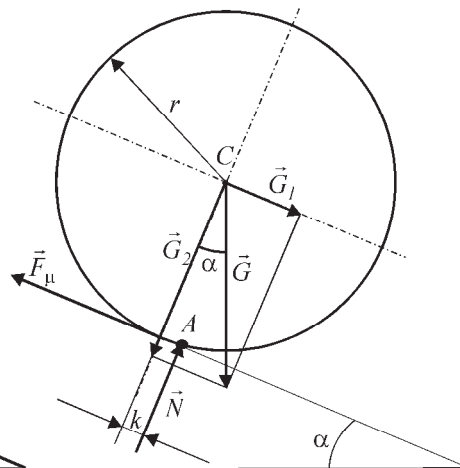
$$F > \max \left\{ \mu_0 G, \frac{k}{d} G \right\} \quad (8)$$

cilindar će se iz stanja mirovanja pokrenuti i započeti kotrljanje sa klizanjem tj. intenzitet sile  $\vec{F}$  je takav da istovremeno može da "savlada" i otpor klizanja i otpor kotrljanju.

**24.** Odrediti za koji će ugao  $\alpha$  (sl. 24) cilindar, težine  $\vec{G}$  i poluprečnika  $r$ , koji leži na strmoj ravni ostati u stanju mirovanja ako je statički koeficijent trenja klizanja između cilindra i strme ravni  $\mu_0$  a koeficijent trenja kotrljanja  $k$ .



Slika 24



Slika 24.1

### Rešenje

Sila  $\vec{G}$  se razlaže na komponente  $\vec{G}_1$  i  $\vec{G}_2$  čiji su intenziteti  $G \sin \alpha$  i  $G \cos \alpha$ . Iz uslova ravnoteže sistema sila koji dejstvuje na cilindar sledi (slika 24.1):

$$N = G \cos \alpha, \quad G \sin \alpha \leq F_{\mu gr}, \quad G \sin \alpha \cdot r \leq Nk \quad (1)$$

tj.

$$G \sin \alpha \leq \mu_0 G \cos \alpha, \quad G \sin \alpha \cdot r \leq G \cos \alpha \cdot k \quad . \quad (2)$$

Prema tome, maksimalni (granični) ugao  $\alpha$  određen je relacijama

$$\operatorname{tg} \alpha'_{gr} = \mu_0, \quad \operatorname{tg} \alpha''_{gr} = \frac{k}{r} \quad (3)$$

tj. maksimalni ugao  $\alpha$  određen je manjom vrednošću od dva broja  $\mu_0$  i  $\frac{k}{r}$ , odnosno

$$\operatorname{tg} \alpha_{gr} = \min \left\{ \mu_0, \frac{k}{r} \right\} \quad (4)$$

Cilindar će ostati u stanju mirovanja i za sve uglove  $\alpha$  koji zadovoljavaju nejednačinu

$$\operatorname{tg} \alpha < \min \left\{ \mu_0, \frac{k}{r} \right\} \quad (5)$$

Za određeni granični ugao  $\alpha_{gr}$  treba razmotriti mogućnosti koje mogu nastati promenom veličina  $\mu_0$  i  $k$ .

Ako je

$$\mu_0 > \frac{k}{r}, \quad \frac{k}{r} < \operatorname{tg} \alpha_{gr} \leq \mu_0 \quad (6)$$

cilindar će iz stanja mirovanja započeti kotrljanje bez klizanja.

U slučaju da je

$$\mu_0 < \frac{k}{r}, \quad \mu_0 < \operatorname{tg} \alpha_{gr} \leq \frac{k}{r} \quad (7)$$

cilindar će iz stanja mirovanja započeti klizanje bez kotrljanja.

Kada je

$$\operatorname{tg} \alpha_{gr} = \max \left\{ \mu_0, \frac{k}{r} \right\} \quad (8)$$

cilindar će iz stanja mirovanja započeti kotrljanje sa klizanjem.