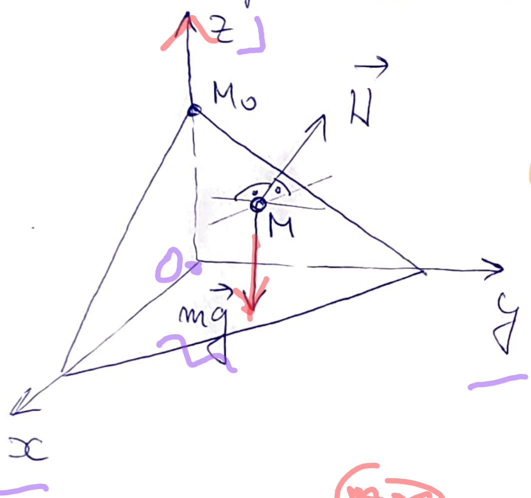
1. Материјална тачка почиње кретање у пољу теже по глаткој равни $x+2y+3z-d=0$, где је d позитивна константа. У почетном тренутку тачка се налазила на оси Oz и имала брзину $\vec{v}_0 = 2\vec{i} - \vec{j}$ (оса Oz оријентисана је вертикално навише). Одредити коначне једначине кретања тачке. $x(t)=?$ $y(t)=?$ $z(t)=?$



Решење:

(*) $$\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}}$$

$$\vec{N} = \lambda \,\mathrm{grad} f \qquad \nabla f \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{N} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

λ – Лагранжев множитељ везе

(**) $$f(x,y,z) = x + 2y + 3z - d = 0$$

↳ једначина везе

grad f → градијент функције $f(x,y,z)$ је вектор који има правац нормале на површ $f(x,y,z)$ у датој тачки.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

(*) $$m\vec{a} = m\vec{g} + \lambda\,\mathrm{grad} f = m\vec{g} + \lambda(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

$$m\ddot{x} = \lambda, \quad m\ddot{y} = 2\lambda, \quad m\ddot{z} = -mg + 3\lambda$$

Имамо 3 скаларне диференц. једначине са 4 непознате величине: $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ и λ.

За одређивање непознатих користи се и једначина везе $f(x,y,z)=0$ која се два пута диференцира по времену:

$$x+2y+3z-d=0 \quad / \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\ddot{x}+2\ddot{y}+3\ddot{z}=0$$

Сада имамо систем од 4 ј-не са 4 непознате:

$$m\ddot{x}=\lambda, \quad m\ddot{y}=2\lambda, \quad m\ddot{z}=3\lambda-mg, \quad \ddot{x}+2\ddot{y}+3\ddot{z}=0$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}&=\frac{\lambda}{m} \\ \ddot{y}&=\frac{2\lambda}{m} \\ \ddot{z}&=3\frac{\lambda}{m}-g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\ddot{x}+2\ddot{y}+3\ddot{z}=0 \\ &\frac{\lambda}{m}+2\cdot\frac{2\lambda}{m}+3\left(3\frac{\lambda}{m}-g\right)=0 \\ &14\frac{\lambda}{m}=3g, \quad \boxed{\lambda=\frac{3mg}{14}} \end{aligned}$$

Сада следи:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}&=\frac{\lambda}{m}=\frac{3g}{14} \\ \ddot{y}&=2\frac{\lambda}{m}=\frac{6g}{14}=\frac{3g}{7} \\ \ddot{z}&=3\frac{\lambda}{m}-g=\frac{9}{14}g-g=-\frac{5g}{14} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ddot{x}&=3g/14 \\ \ddot{y}&=3g/7 \\ \ddot{z}&=-\frac{5g}{14} \end{aligned}}$$

Почетни услови: Пошто се тачка М налазила у тренутку $t_0=0$ на оси Oz, следи да је $x_0=y_0=0$.

Из једначине везе сада закључујемо:

$$\cancel{x_0}+\cancel{2y_0}+3z_0-d=0, \quad 3z_0=d, \quad \boxed{z_0=d/3}$$

Вектор почетне брзине $\vec{v}_0=2\vec{i}-\vec{j}=\dot{x}_0\vec{i}+\dot{y}_0\vec{j}+\dot{z}_0\vec{k}$

$$\Rightarrow \dot{x}_0=2, \quad \dot{y}_0=-1, \quad \dot{z}_0=0$$

Сада можемо интегралити диференцијалне једначине

$$\ddot{x} = \frac{3g}{14}\ , \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{3g}{14}\ , \quad \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_{t_0}^{t} \frac{3g}{14}\, dt$$

$$\dot{x}\Big|_{\dot{x}_0 = 2}^{\dot{x}} = \frac{3g}{14}\int_{t_0=0}^{t} dt\ , \quad \dot{x} - 2 = \frac{3g}{14}(t-0)$$

$$\dot{x} = 2 + \frac{3g}{14}t\ , \quad \frac{dx}{dt} = 2 + \frac{3g}{14}t$$

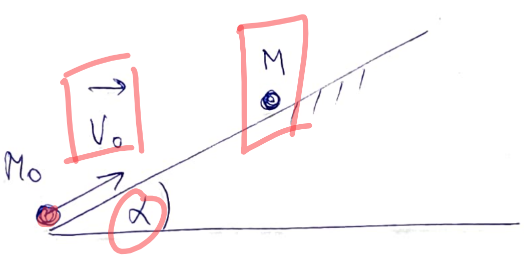
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} 2\, dt + \int_{t_0}^{t} \frac{3g}{14} t\, dt\ , \quad x\Big|_{x_0}^{x} = 2t\Big|_{t_0}^{t} + \frac{3g}{14}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\boxed{x(t) = 2t + \frac{3g}{28}t^2}$$ К.ј.К.

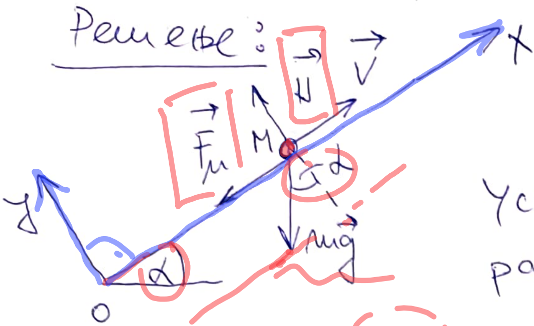
На сличан начин, добијају се преостале две коначне једначине кретања:

$$\boxed{y(t) = -t + \frac{3}{14}gt^2}\ , \quad \boxed{z(t) = \frac{d}{3} - \frac{5}{28}gt^2}$$

(2) Материјалној тачки саопштена је почетна брзина $\vec{V_0}$ уз храпаву стрму раван, нагнуту под углом α у односу на хоризонталну раван. Коефицијент трења између тачке и стрме равни износи μ. Одредити пут и време кретања тачке до тренутка заустављања.



Решење:

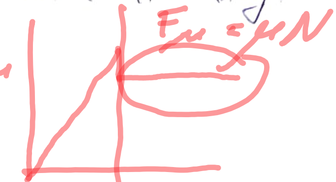


$$\boxed{m\vec a = m\vec g + \vec N + \vec F_\mu} \quad / \cdot \vec x \ / \cdot \vec y$$

Усваја се оса Ox у правцу стрме равни, док је оса Oy управна на њу.

x: $m\ddot x = -mg\sin\alpha - F_\mu$

y: $m\ddot y = -mg\cos\alpha + N$



Сила трења клизања је $\boxed{F_\mu = \mu N}$. С обзиром да се тачка креће само дуж осе Ox, важи:

$$y = 0, \quad \dot y = \ddot y = 0.$$

$$m\ddot x = -mg\sin\alpha - \mu N, \quad 0 = N - mg\cos\alpha$$

$$\boxed{N = mg\cos\alpha}$$

$$m\ddot x = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \quad /:m$$

$$\ddot x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$\dot x = v$

$$\int_{\dot x_0 = v_0}^{\dot x} d\dot x = -\int_{t_0=0}^{t} g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,dt, \quad v - v_0 = -g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)t$$

$$\dot x = \boxed{v = v_0 - g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)t}$$

У тренутку заустављања важи $v_1 = v(t_1) = 0$, одакле се добија тренутак заустављања тела

$$v_1 = 0 = v_0 - g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)t_1, \quad \boxed{t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}}$$

Даље можемо писати:

$$v = \dot x = \frac{dx}{dt} = -g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)t + v_0$$

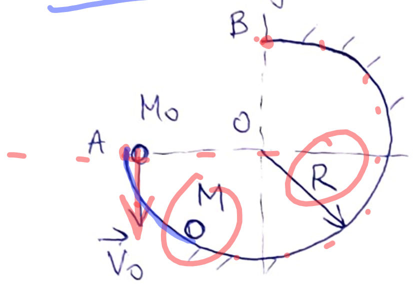
$$\int_{x_0=0}^{x} dx = -g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\int_{t_0=0}^{t} t\,dt + v_0\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\boxed{x(t) = -g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_0 t}$$

Пређени пут тачке M до заустављања износи:

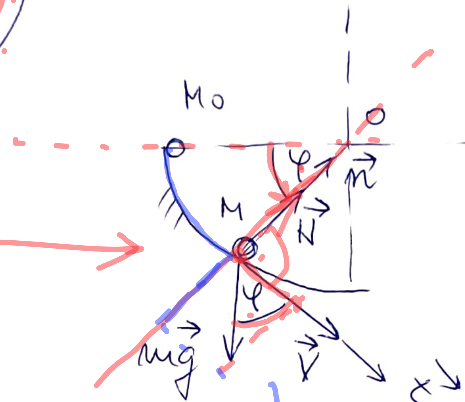
$$x_1 = x(t_1) = \ldots = \boxed{\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} = x_1}$$

③ Тачка M, m полази из положаја A почетном брзином $\vec{V}_0$, и креће се по унутрашњости глатког (непотпуног) цилиндра полупречника R. Одредити најмањи интензитет почетне брзине V_0 тако да тачка дође у положај B.



Решење:

$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}}$$



У овом случају погодно је користити природни триједар, па се добијају следеће једначине:

$s = R\varphi$

$ds = R\,d\varphi$

$$t: \quad m a_T = m\frac{dV}{dt} = mg\cos\varphi \qquad \ldots(1)$$

$$n: \quad m a_N = m\frac{V^2}{R} = N - mg\sin\varphi \qquad \ldots(2)$$

Нека је $s = \overset{\frown}{M_0M}$ лучна координата. Може се писати

$V = \dot{s}$ и $s = \overset{\frown}{M_0M} = R\varphi$, односно $V = \dot{s} = R\dot{\varphi}$,

где је φ угао који одређује положај тачке на цилиндру. Даље можемо писати:

$$a_T = \ddot{s} = \dot{V} = \frac{d\dot{s}}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{d\dot{s}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds} = \frac{V\,dV}{R\,d\varphi}$$

Једначина (1) сада гласи:

$$m\frac{dV}{dt} = \cancel{m}\frac{V\,dV}{R\,d\varphi} = \cancel{m}g\cos\varphi, \Rightarrow \int_{V_0}^{V} V\,dV = \int_{\varphi_0=0}^{\varphi} gR\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{V^2}{2}\Big|_{V_0}^{V} = gR\sin\varphi\Big|_0^{\varphi}, \quad V^2 - V_0^2 = 2gR\sin\varphi$$

$$V^2 = V_0^2 + 2gR\sin\varphi \qquad \ldots(3)$$

Комбинујући једначине (2) и (3), добијамо

$$\frac{m}{R}\left(V_0^2 + 2gR\sin\varphi\right) = N - mg\sin\varphi$$

$$\boxed{N = m\frac{V_0^2}{R} + 3mg\sin\varphi}$$

Да би тачка M стигла у положај B потребно је да за све време кретања тачке постоји контакт између ње и цилиндра, односно $N > 0$. У граничном случају можемо писати $\boxed{N_B = N\left(\varphi = \frac{3\pi}{2}\right) = 0}$

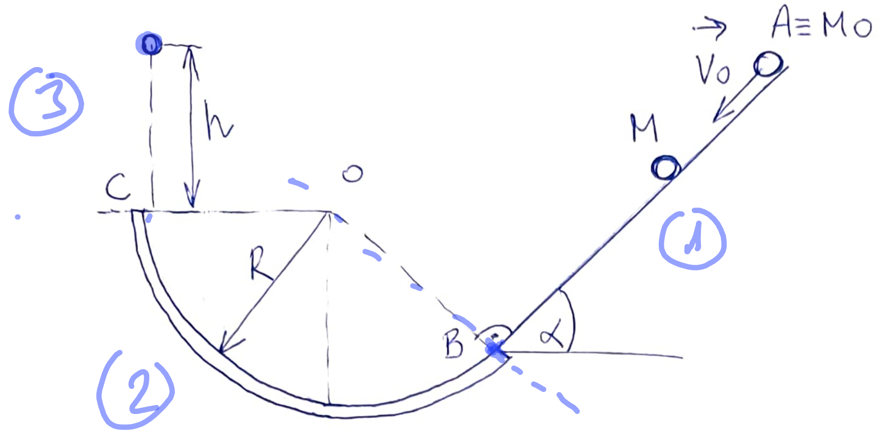
$\frac{3\pi}{2}$

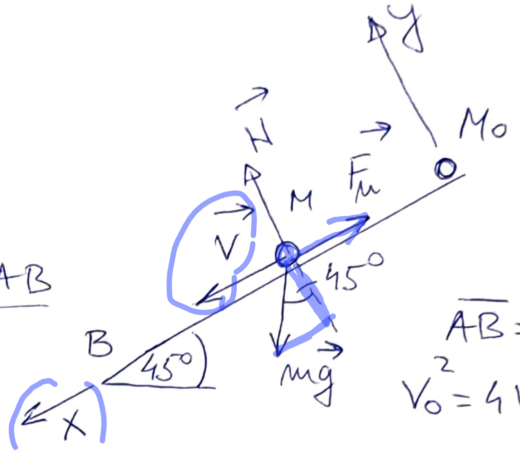
$$N_B = m\frac{V_0^2}{R} + 3mg\sin\varphi_B = 0$$

$$\frac{V_0^2}{R} + 3g\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} = 0, \quad \frac{V_0^2}{R} - 3g = 0$$

$$\boxed{V_0^2 = 3gR, \quad V_0 = \sqrt{3gR}}$$

4) Низ храпаву стрму раван AB, дужине $\overline{AB} = 2r$ и нагибног угла $\alpha = 45^\circ$ у односу на хоризонталу, креће се куглица M масе m, из положаја A почетном брзином интензитета $V_0^2 = 4\sqrt{2}gr$. У положају B куглица прелази у глатки део BC, где је $\measuredangle BOC = 135^\circ$, облика кружног цилиндра полупречника $R = \sqrt{2}r$. Ако је коефицијент трења клизања на делу AB $\mu = 0{,}5$, одредити максималну висину пењања куглице после напуштања везе у тачки C. Куглица M, после напуштања везе у тачки C, креће се слободно у хомогеном пољу гравитације.





$\overline{AB} = 2r$

$V_0^2 = 4\sqrt{2}gr$

Решење: - стрма раван AB

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_\mu} + \vec{N}$$

$$m\ddot{x} = mg\sin 45^\circ - F_\mu$$

$$m\ddot{y} = 0 = N - mg\cos 45^\circ, \quad \boxed{N = mg\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$F_\mu = \mu N = \frac{1}{2} mg\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4} mg}$$

$$m\ddot{x} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} mg, \quad \ddot{x} = \frac{\sqrt{2}}{4} g$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}, \quad V = \dot{x}$$

$$\ddot{x} = V\frac{dV}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{4} g, \quad \int_{V_0}^{V} V\,dV = \frac{\sqrt{2}}{4} g \int_{x_0=0}^{x} dx$$

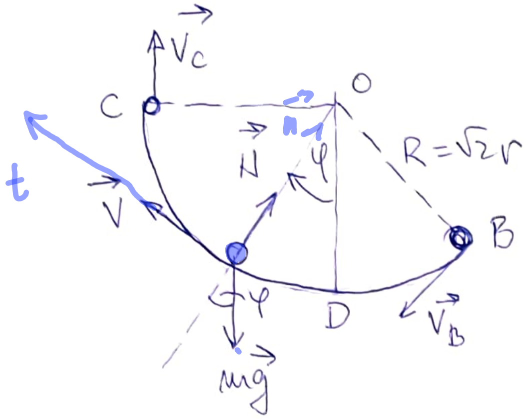
$$\frac{V^2 - V_0^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} g x, \quad V^2 = V_0^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} g x$$

брзина тачке у положају B износи:

$$V_B^2 = V_0^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} g x_B = 4\sqrt{2} gr + \frac{\sqrt{2}}{2} g 2r, \quad \boxed{V_B^2 = 5\sqrt{2} gr}$$

- кретање по кружном луку $\overset{\frown}{BC}$ (слика на следећој страни)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \Rightarrow \begin{cases} \tau: & ma_T = m\frac{dV}{dt} = -mg\sin\varphi \quad \ldots(1) \\ n: & ma_N = m\frac{V^2}{R} = N - mg\cos\varphi \quad \ldots(2) \end{cases}$$



лучна координата $s = \overset{\frown}{DC} = R\varphi$

$v = \dot s = R\dot\varphi \Rightarrow ds = R\,d\varphi$

$\boxed{a_T = \ddot s = \dot v = R\ddot\varphi}$

једн. (1) $\rightarrow$ $m\frac{dv}{dt} = m\frac{d\dot s}{dt}\frac{ds}{ds} = m\frac{d\dot s}{ds}\dot s$

$$\cancel{m} v\frac{dv}{ds} = -\cancel{m}g\sin\varphi$$

$$\boxed{v\,dv = -g\sin\varphi\,ds = -g\sin\varphi\cdot R\,d\varphi}$$

$$\int_{v_B}^{v_C} v\,dv = -gR\int_{\varphi_B=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi_C=\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi$$

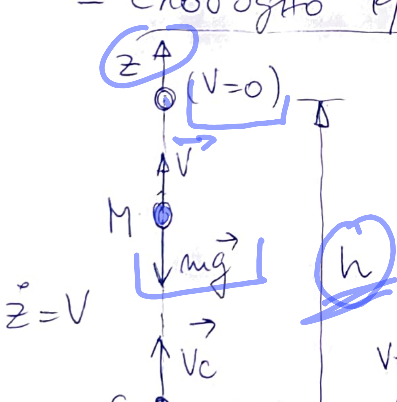
$$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_B}^{v_C} = -gR(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi_B}^{\varphi_C} = gR(\cos\varphi_C - \cos\varphi_B)$$

$$\frac{v_C^2 - v_B^2}{2} = gR\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos(-\pi/4)\right) = gR\left(0 - \frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$v_C^2 = v_B^2 - \cancel{2}gR\frac{\sqrt2}{\cancel{2}} = 5\sqrt2 gr - \sqrt2 g(\sqrt2 r)$$

$$\boxed{v_C^2 = (5\sqrt2 - 2)gr}$$

– Слободно кретање тачке



$\boxed{m\vec a = m\vec g}$ (Оса Cz усмерена вертикално навише)

$$\ddot z = -g$$

$$\ddot z = \frac{d\dot z}{dt}\frac{dz}{dz} = -g$$

$$\int_{v_C}^{v=0} \dot z\,d\dot z = -g\int_{z_C=0}^{h} dz$$

$$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_C}^{0} = -gz\Big|_0^h, \quad \frac{0 - v_C^2}{2} = -g(h-0)$$

$$v_C^2 = 2gh, \quad h = v_C^2/2g$$

$$\boxed{h = \frac{(5\sqrt2 - 2)r}{2}}$$

II начин: $\ddot z = \frac{d\dot z}{dt} = -g$

$$\int_{v_C}^{v} d\dot z = -g\int_{t_C=0}^{t} dt, \quad v - v_C = -gt$$

$$v = v_C - gt$$

$v = 0$, $t_1 = v_C/g$

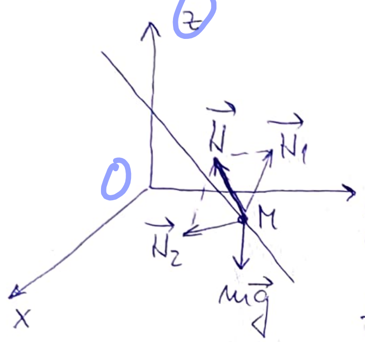
$\frac{dz}{dt} = v_C - gt$, ...

$$z(t) = v_C t - g\frac{t^2}{2}$$

$$h = z_1 = z(t_1) = \dots = \frac{v_C^2}{2g}$$

① Тачка M масе m, креће се у пољу теже по глаткој линији чија је једначина у односу на Декартов координатни систем $Oxyz$ дата са $\boxed{x+3=y+2=z+1}$, где је оса Oz усмерена вертикално навише. Одредити интензитет реакције везе. $N=?$

Решење. Тачка M креће се по глаткој линији која представља пресек две равни, па се реакција везе одређује као збир реакција појединих равни.



$$\underbrace{x+3=\overbrace{y+2=z+1}^{\text{друга раван } f_2}}_{\text{прва раван } f_1}$$

$x+3=y+2$

$f_1(x,y,z)=0$

$f_1: \; x-y+1=0 \quad f_1$

$y+2=z+1$

$y-z+1=0$

$f_2(x,y,z)=0$

$f_2: \; \boxed{y-z+1=0} \quad f_2$

$$\boxed{m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}_1+\vec{N}_2}$$

$$\vec{N}_1=\lambda_1 \operatorname{grad} f_1=\lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{k}\right)=\lambda_1(1\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j})$$

$$\vec{N}_2=\lambda_2 \operatorname{grad} f_2=\lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{k}\right)=\lambda_2(1\cdot\vec{j}-1\cdot\vec{k})$$

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\lambda_1(\vec{i}-\vec{j})+\lambda_2(\vec{j}-\vec{k})$$

$m\ddot{x}=\lambda_1 \quad \ldots(1)$

$m\ddot{y}=-\lambda_1+\lambda_2 \quad \ldots(2)$

$m\ddot{z}=-mg-\lambda_2 \quad \ldots(3)$

$f_1: \; x-y+1=0 \;/\frac{d^2}{dt^2}$

$\ddot{x}-\ddot{y}=0 \quad \ldots(4)$

$f_2: \; y-z+1=0 \;/\frac{d^2}{dt^2}$

$\ddot{y}-\ddot{z}=0 \quad \ldots(5)$

Убацимо (1), (2) и (3) у (4) и (5):

$$\frac{\lambda_1}{m}-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{m}=0 \quad ; \quad \frac{\lambda_2-\lambda_1}{m}+\frac{\lambda_2+mg}{m}=0$$

$$\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1=0 \quad , \quad \lambda_2-\lambda_1+\lambda_2+mg=0$$

$2\lambda_1=\lambda_2$, $2\lambda_2-\lambda_1=-mg$ → решавањем добијамо $\lambda_1=-\frac{mg}{3}$, $\lambda_2=-\frac{2mg}{3}$

сада је: $\vec{N}_1=\lambda_1 \operatorname{grad} f_1=-\frac{mg}{3}(\vec{i}-\vec{j})$, $\vec{N}_2=\lambda_2 \operatorname{grad} f_2=-\frac{2mg}{3}(\vec{j}-\vec{k})$

$\vec{N}=\vec{N}_1+\vec{N}_2$ (укупна реакција везе)

$$\vec{N}=-\frac{mg}{3}(\vec{i}-\vec{j})-\frac{2mg}{3}(\vec{j}-\vec{k})=-\frac{mg}{3}(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{j}-2\vec{k})=-\frac{mg}{3}(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$$

интензитет реакције везе: $|\vec{N}|=N=\frac{mg}{3}\sqrt{1+1+4}=\frac{\sqrt{6}}{3}mg$