V | II (II deo)

Sferno kretanje krutog tela

Definicija. - Kretanje tela pri kome jedna tačka tela (A) ostaje nepokretna naziva se rotacija tela oko nepokretne tačke (A), odnosno, sferno kretanje krutog tela.
Naziv sferno kretanje krutog tela potiče od činjenice da se pri rotaciji tela oko nepokretne tačke A, bilo koja druga tačka tela M kreće po sfernoj površi čiji je centar upravo nepokretna tačka A tela, a poluprečnik jednak rastojanju posmatrane tačke M tela od tačke A, jer je telo kruto.

Određivanje broja stepeni slobode sfernog kretanja krutog tela. - Posmatra se pomeranje krutog tela koje vrši sferno kretanje oko svoje nepokretne tačke A, a na intervalu vremena $[t_0,t]$. Pri tom pomeranju DKS vezan za telo prelazi (premešta se) iz DKS : $A_0\xi_0\eta_0\zeta_0 = Oxyz$ u trenutku t_0, u DKS $A\xi\eta\zeta$ u trenutku t, pri čemu je:
$A=A_0$, tj. $A=O$, tako da je: $x_A(t)=0,\ y_A(t)=0$ i $z_A(t)=0$ (1)
Zbog toga će, u nastavku, DKS vezan za telo koje vrši rotaciju oko nepokretne tačke $A=O$ biti DKS $O\xi\eta\zeta$. Ose ovog koordinatnog sistema u trenutku t biće zaokrenute u odnosu na ose tog koordinatnog sistema u trenutku t_0, $O\xi_0\eta_0\zeta_0$, tj. u odnosu na ose nepokretnog DKS $Oxyz$. U tom smislu osa $O\zeta$, kao prioritetna osa tela (najčešće osa materijalne, ili geometrijske simetrije tela), koja u prethodno razmatranim kretanja krutog tela (translatorno kretanje, rotacija oko nepokretne $O\zeta=Oz$ i ravno kretanje krutog tela paralelno ravni Oxy) nije menjala svoj pravac u odnosu na referentni nepokretan DKS $Oxyz$, tokom sfernog kretanja tela oko nepokretne tačke O tela menja svoj položaj u vremenu, a u odnosu na DKS $Oxyz$. Položaj ose $O\zeta$, tj. njenog jediničnog vektora $\vec{\nu}$ u trenutku t, u DKS $Oxyz$ biće određen sa dva ugla:
- uglom $\theta = \measuredangle(Oz, O\zeta) = \measuredangle(\vec{k},\vec{\nu})$ (2)
- uglom koje normalna projekcija vektora $\vec{\nu}$ na ravan Oxy, vektor $\vec{\nu}_{xy}$ gradi sa npr., osom Ox

Osa $O\zeta$ u bilo kom trenutku t predstavlja osu normale na ravan u kojoj leže ose $O\xi$ i $O\eta$. Ova ravan sa ravni Oxy ima zajedničku tačku O, pa je presek ove dve ravni prava u ravni Oxy koja prolazi kroz tačku O. Ako se ova prava orijentiše pomoću jediničnog vektora $\vec{n}$ dobija se čvorna osa. Položaj čvorne ose u ravni Oxy određen je u bilo kom trenutku t uglom ψ:
$\psi = \measuredangle(\vec{i},\vec{n})$ (3)
Kako je $\vec{\nu}_{xy} \perp \vec{n}$, to ugao ψ određuje, istovremeno i položaj vektora $\vec{\nu}_{xy}$ u ravni Oxy:
$\measuredangle(\vec{i},\vec{\nu}_{xy}) = \frac{3\pi}{2}+\psi$

$\left(\vec{\nu}_{xy}\cdot\vec{i} = |\vec{\nu}_{xy}|\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\psi\right) \Rightarrow \vec{\nu}_{xy}\cdot\vec{i} = |\vec{\nu}_{xy}|\sin\psi \ \text{ i } \ \vec{\nu}_{xy}\cdot\vec{j} = |\vec{\nu}_{xy}|\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\psi\right) \Rightarrow \right.$
$\left.\vec{\nu}_{xy}\cdot\vec{j} = -|\vec{\nu}_{xy}|\cos\psi, \text{ gde je } |\vec{\nu}_{xy}| = |\vec{\nu}||\sin\theta| = \sin\theta\right)$

Položaj ose $O\xi$, pa samim tim i ose $O\eta$, u odnosu na čvornu osu u ravni $O\xi\eta$ određen je uglom φ:
$\varphi = \measuredangle(\vec{n},\vec{\lambda})$ (4)

Uglovi ψ, θ i φ dati sa (3), (2) i (4) nazivaju se Ojlerovi uglovi. Ovi uglovi predstavljaju uglove rotacije tela oko osa koje su upravne na ravni u kojima se ti uglovi vide:

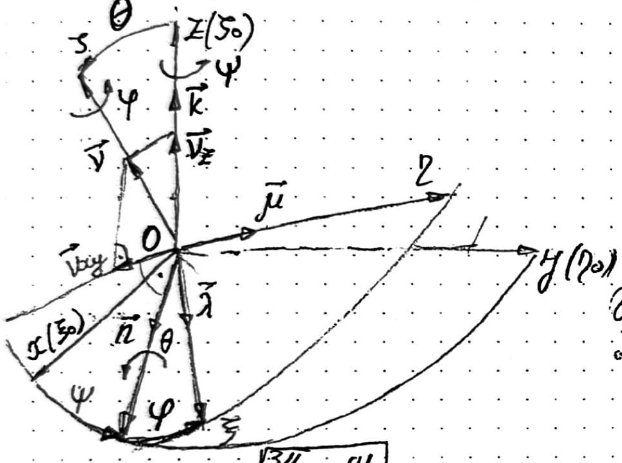
1\. − ψ − ugao precesije i predstavlja ugao rotacije oko nepokretne ose Oz, a vidi se u ravni Oxy

2\. − θ − ugao nutacije i predstavlja ugao rotacije oko čvorne ose, a vidi se u ravni upravnoj na nju, ravni osa Oz i $O\zeta$.

3\. − φ − ugao sopstvene rotacije i predstavlja ugao rotacije oko sopstvene ose tela $O\zeta$, a vidi se u ravni $O\xi\eta$ tela. Ose navedenih rotacija seku se u nepokretnoj tački O tela.

Ojlerova teorema. − **Proizvoljno pomeranje krutog tela oko nepomične tačke O moguće je obaviti uzastopnim rotacijama oko tri ose koje se seku u nepomičnoj tački;**

Ove 3 rotacije su upravo precesija, nutacija i sopstvena rotacija tela. Da bi se dokazala Ojlerova teorema biće pokazano da je uglovi $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$ i $\varphi=\varphi(t)$ u posmatranom trenutku t na jednoznačan način određuju bazne vektore $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ DKS vezanog za telo u tom trenutku, a u nepokretnom DKS $Oxyz$, tj. da su koeficijenti matrice kosinusa uglova $[a_{ij}]$ funkcije vrednosti tih uglova.



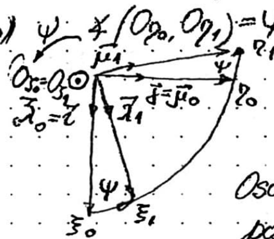
1\. − rotacija − precesija za ugao ψ oko ose $Oz=O\zeta_0$:

$O\xi_0\eta_0\zeta_0 \rightarrow O\xi_1\eta_1\zeta_1$

a) $O\zeta_0 = O\zeta_1$; $O\xi_1\eta_1 \in O\xi_0\eta_0$; $\vec{\nu}_1 = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$

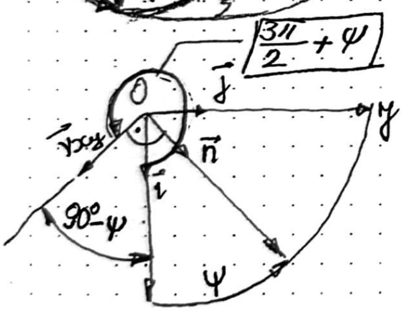
b) $\measuredangle(O\xi_0, O\xi_1) = \psi \Rightarrow \vec{\lambda}_1 = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$

$\measuredangle(O\eta_0, O\eta_1) = \psi \Rightarrow \vec{\mu}_1 = -\sin\psi\,\vec{i} + \cos\psi\,\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$



$$\begin{bmatrix}\vec{\lambda}_1\\ \vec{\mu}_1\\ \vec{\nu}_1\end{bmatrix} = \left[a_{ij}^{\psi}\right]\begin{bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{bmatrix}, \quad \left[a_{ij}^{\psi}\right] = \begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (5)$$

Osa $O\xi_1$ predstavlja čvornu osu, pa je njen jedinični vektor: $\vec{\lambda}_1 = \vec{n}$



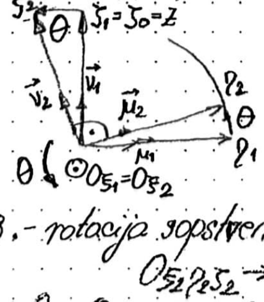
2\. − rotacija nutacija za ugao θ oko čvorne ose $O\xi_1$

$O\xi_1\eta_1\zeta_1 \rightarrow O\xi_2\eta_2\zeta_2$

a) $O\xi_2 = O\xi_1$; $O\xi_2\eta_2 \in O\xi_1\eta_1 \Rightarrow \vec{\lambda}_2 = \vec{\lambda}_1 + 0\cdot\vec{\mu}_1 + 0\cdot\vec{\nu}_1$

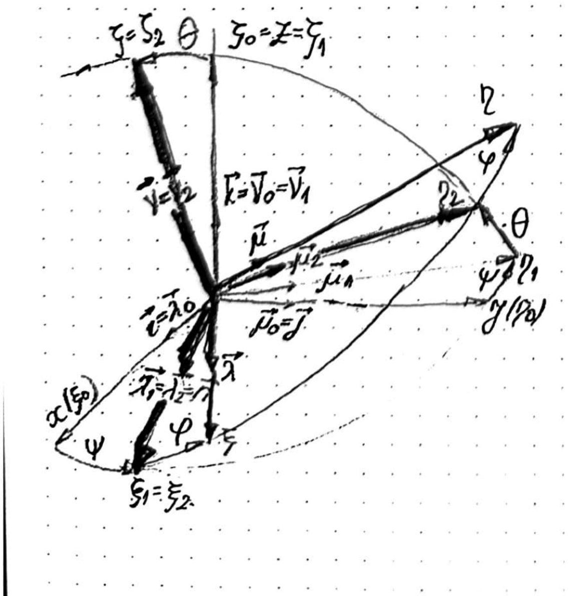
b) $\measuredangle(O\eta_1, O\eta_2) = \theta$; $\vec{\mu}_2 = 0\cdot\vec{\lambda}_1 + \cos\theta\,\vec{\mu}_1 + \sin\theta\,\vec{\nu}_1$

$\measuredangle(O\zeta_2, O\zeta_1) = \theta$; $\vec{\nu}_2 = 0\cdot\vec{\lambda}_1 - \sin\theta\,\vec{\mu}_1 + \cos\theta\,\vec{\nu}_1$



$$\begin{bmatrix}\vec{\lambda}_2\\ \vec{\mu}_2\\ \vec{\nu}_2\end{bmatrix} = \left[a_{ij}^{\theta}\right]\begin{bmatrix}\vec{\lambda}_1\\ \vec{\mu}_1\\ \vec{\nu}_1\end{bmatrix}, \quad \left[a_{ij}^{\theta}\right] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \quad (6)$$

$a_{ij}^{\theta} = a_{ij}^{\theta}(\theta)$



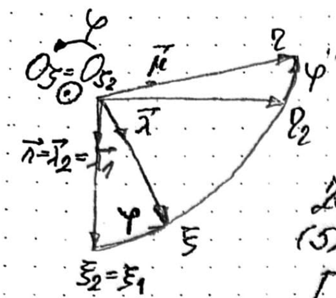
3\. − rotacija sopstvena rotacija za ugao φ oko ose $O\zeta_2$

$O\xi_2\eta_2\zeta_2 \rightarrow O\xi\eta\zeta$

a) $O\zeta = O\zeta_2$, $O\xi\eta \in O\xi_2\eta_2 \Rightarrow \vec{\nu} = 0\cdot\vec{\lambda}_2 + 0\cdot\vec{\mu}_2 + 1\cdot\vec{\nu}_2$

b) $\measuredangle(O\xi_2, O\xi) = \varphi \Rightarrow \vec{\lambda} = \cos\varphi\,\vec{\lambda}_2 + \sin\varphi\,\vec{\mu}_2 + 0\cdot\vec{\nu}_2$

$\measuredangle(O\eta_2, O\eta) = \varphi \Rightarrow \vec{\mu} = -\sin\varphi\,\vec{\lambda}_2 + \cos\varphi\,\vec{\mu}_2 + 0\cdot\vec{\nu}_2$



$$\begin{bmatrix}\vec\lambda\\ \vec\mu\\ \vec\nu\end{bmatrix} = [a_{ij}^{\varphi}]\begin{bmatrix}\vec\lambda_2\\ \vec\mu_2\\ \vec\nu_2\end{bmatrix};\ [a_{ij}^{\varphi}] = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ a_{ij}^{\varphi}=a_{ij}^{\varphi}(\varphi) \qquad (7)$$

Zamenom (6) u (7), a zatim u tako dobijenu matričnu jednačinu (5), dobija se:

$$\begin{bmatrix}\vec\lambda\\ \vec\mu\\ \vec\nu\end{bmatrix} = [a_{ij}^{\varphi}][a_{ij}^{\theta}]\begin{bmatrix}\vec\lambda_1\\ \vec\mu_1\\ \vec\nu_1\end{bmatrix} = [a_{ij}^{\varphi}][a_{ij}^{\theta}][a_{ij}^{\psi}]\begin{bmatrix}\vec i\\ \vec j\\ \vec k\end{bmatrix},$$

tj. $\begin{bmatrix}\vec\lambda\\ \vec\mu\\ \vec\nu\end{bmatrix} = [a_{ij}]\begin{bmatrix}\vec i\\ \vec j\\ \vec k\end{bmatrix}$, gde je: $[a_{ij}] = [a_{ij}^{\varphi}][a_{ij}^{\theta}][a_{ij}^{\psi}]$ i $\boxed{a_{ij} = a_{ij}(\psi,\theta,\varphi)}$, (8)

i $\vec\lambda = \vec\lambda(\psi,\theta,\varphi)$, $\vec\mu = \vec\mu(\psi,\theta,\varphi)$, $\vec\nu = \vec\nu(\psi,\theta,\varphi)$. (9)

Pošto je prema (8) i (9) položaj baznih vektora KS vezanog za telo koje vrši sferno kretanje određen u DKS Oxyz, sa tri međusobno nezavisna Ojlerova ugla ψ, θ i φ i pošto važi (1): $x_A=0$, $y_A=0$, $z_A=0$, to je broj stepeni slobode sfernog kretanja: $n = 6-3$, odnosno, $n=3$.

Konačne jednačine sfernog kretanja krutog tela oko nepokretne tačke O tela su:

$\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$ i $\varphi=\varphi(t)$ (10)

i njima je određen položaj KS vezanog za telo $O\xi\eta\zeta$ u odnosu na nepokretni DKS Oxyz u bilo kom trenutku t. Funkcije (10) su neprekidne, jednoznačne i dva puta diferencijabilne.

Ose rotacija Oz, $O\xi_1$ i $O\zeta$ su orijentisane tako da se iz vrha svake od ove tri ose, smer promene uglova ψ, θ i φ, respektivno, vidi u pozitivnom matematičkog smeru. Precesija $\psi=\psi(t)$, nutacija $\theta=\theta(t)$ i sopstvena rotacija $\varphi=\varphi(t)$ tela oko osa Oz, $O\xi_1$ i $O\zeta$ odvijaju se tokom rotacije tela oko nepokretne tačke O istovremeno, ali se pri posmatranju pomeranja tela tokom sfernog kretanja na bilo kom intervalu vremena, ove tri rotacije mogu misaono razdvojiti i posmatrati kao uzastopne (sukcesivne) rotacije kojima se telo iz nekog početnog položaja koji odgovara početnom trenutku posmatranog intervala vremena, u krajnji položaj koji odgovara krajnjem trenutku tog intervala vremena.

Kinematske karakteristike sfernog kretanja. – Posmatra se pomeranje tela koje vrši sferno kretanje na bilo kom beskonačno malom intervalu vremena $[t, t+dt]$. Ako su poznate konačne jednačine ovog kretanja, onda će položaj tela u trenutku t, a u odnosu na nepokretni DKS Oxyz biti određen vrednostima uglova precesije, nutacije i sopstvene rotacije: $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$ i $\varphi=\varphi(t)$, a u trenutku $t_1=t+dt$ vrednostima ovih uglova:

$\psi_1=\psi(t+dt) \approx \psi(t)+d\psi$, $\theta_1=\theta(t+dt) \approx \theta(t)+d\theta$ i $\varphi_1=\varphi(t+dt) \approx \varphi(t)+d\varphi$.

Veličine $d\psi, d\theta$ i $d\varphi$ predstavljaju priraštaje uglova ψ, θ i φ u trenutku t: $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$, i $\varphi=\varphi(t)$ a na posmatranom intervalu vremena dužine dt. Uglovi $d\psi, d\theta$ i $d\varphi$ su: ugao elementarne precesije oko ose Oz, elementarne nutacije oko čvorne ose i elementarne sopstvene rotacije oko ose $O\zeta$ u trenutku t, respektivno. Ovi uglovi određuju položaj tela, tj. koordinatnog sistema vezanog za telo u trenutku $t_1=t+dt$, a u odnosu na koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ sa kojim se koordinatni sistem vezan za telo poklapa u trenutku t.

Vektori elementarnih trenutnih rotacija su po definiciji:

1.- $d\vec{\psi} \overset{def}{=} d\psi\vec{k}$ – vektor trenutne elementarne precesije koji ima pravac ose precesije u trenutku t (ose Oz)

2.- $d\vec{\theta} \overset{def}{=} d\theta\vec{n}$ – vektor trenutne elementarne nutacije koji ima pravac čvorne ose u trenutku t (trenutne čvorne ose $O\xi_1 = O\xi_2$)

3.- $d\vec{\varphi} \overset{def}{=} d\varphi\vec{\nu}$ – vektor trenutne elementarne sopstvene rotacije koji ima pravac sopstvene ose tela $O\zeta$ u trenutku t (trenutne sopstvene ose $O\zeta$)

Teorema.- Beskonačno malo pomeranje tela u trenutku t koje se sastoji od dve i više elementarnih trenutnih rotacija u istom trenutku, a oko osa koje se seku, može se svesti na rezultujuću trenutnu elementarnu rotaciju čiji je vektor jednak zbiru vektora komponentalnih elementarnih rotacija.

Vektor trenutne rezultujuće elementarne rotacije (u trenutku t) je, u modelu opisanog sfernog kretanja tela:

$$\delta\vec{\alpha} = d\vec{\psi}+d\vec{\theta}+d\vec{\varphi} \Rightarrow \delta\vec{\alpha} = d\psi\vec{k}+d\theta\vec{n}+d\varphi\vec{\nu}, \qquad (11)$$

gde su $d\vec{\psi}$, $d\vec{\theta}$ i $d\vec{\varphi}$ komponentalne elementarne rotacije tela u posmatranom trenutku t.

Relacija (11) nije integrabilna, tj. iz nje se ne može odrediti vektor konačne rotacije $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(t)$, što je u skladu sa činjenicom da sferno kretanje krutog tela ima 3, a ne 1, stepen slobode. ($\vec{\alpha} \neq \vec{\psi}(t)+\vec{\theta}(t)+\vec{\varphi}(t)$)

Odnos, pak, vektora trenutne elementarne rezultujuće rotacije $\delta\vec{\alpha}$ i intervala vremena dt u odnosu na koji se ta rotacija realizuje, predstavlja konačnu veličinu koja se zove vektor trenutne ugaone brzine sfernog kretanja tela:

$$\vec{\omega} \overset{def}{=} \frac{\delta\vec{\alpha}}{dt} \Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k}+\dot{\theta}\vec{n}+\dot{\varphi}\vec{\nu}, \text{ odnosno, } \vec{\omega}=\vec{\omega}_\psi+\vec{\omega}_\theta+\vec{\omega}_\varphi, \qquad (12)$$

gde su:

$\vec{\omega}_\psi=\dot{\psi}\vec{k}$ – vektor trenutne ugaone brzine precesije koji ima pravac trenutne ose precesije, ose Oz,

$\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta}\vec{n}$ – vektor trenutne ugaone brzine nutacije koji ima pravac trenutne ose nutacije, čvorne ose $O\xi_1=O\xi_2$ i

$\vec{\omega}_\varphi=\dot{\varphi}\vec{\nu}$ – vektor trenutne ugaone brzine sopstvene rotacije koji ima pravac trenutne ose sopstvene rotacije, ose tela $O\zeta$.

Projekcije vektora trenutnih ugaonih brzina $\vec{\omega}_\psi$, $\vec{\omega}_\theta$ i $\vec{\omega}_\varphi$ na ose precesije, trenutne ose nutacije i trenutne ose sopstvene rotacije: $\omega_\psi=\dot{\psi}$, $\omega_\theta=\dot{\theta}$ i $\omega_\varphi=\dot{\varphi}$, respektivno, nazivaju se ugaone brzine precesije, nutacije i sopstvene rotacije. Prema konvenciji one su pozitivne ako se smer porasta uglova ψ, θ i φ na intervalu vremena $[t, t+dt]$ iz vrha osa Oz, $O\xi_1$ i $O\zeta$, respektivno, vidi u pozitivnom matematičkom smeru.

Vektori $\delta\vec{\alpha}$ i $\vec{\omega}$ su kolinearni, tj. istog pravca i smera i njihov pravac i smer određuje pravac trenutne ose rotacije, T.O.R (osa rotacije u trenutku t). Jedinični vektor te ose biće označen sa $\vec{\omega}_0$: $\vec{\omega}_0=\vec{\omega}/\omega$, gde je $\omega=|\vec{\omega}|$. (13)

Vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ tokom sfernog kretanja krutog tela oko tačke O menja se ne samo po intenzitetu, već i po pravcu, što znači da je $\vec{\omega}_0=\vec{\omega}_0(t)$, tj. trenutna osa rotacije menja svoj položaj u prostoru tokom kretanja tela, ali uvek prolazi kroz nepokretnu tačku. Trenutna osa rotacije tela, dakle, rotira oko tačke O. Vektor trenutne ugaone brzine trenutne ose rotacije, $\vec{\omega}_{T.O.R}$, je funkcija trenutne ugaone brzine tela $\vec{\omega}$, pri čemu važi:

$$\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{\omega}_{T.O.R}\times\vec{\omega}_0 \qquad (14)$$

Vektor trenutne ugaone brzine tela (12) u KS $O\xi\eta\zeta$ vezanom za telo određen je svojim projekcijama ω_ξ, ω_η i ω_ζ, tj.:

$$\vec{\omega}=\omega_\xi\vec{\lambda}+\omega_\eta\vec{\mu}+\omega_\zeta\vec{\nu} \qquad (15)$$

gde je:

$$\omega_\xi=\vec{\omega}\cdot\vec{\lambda},\quad \omega_\xi=\dot{\psi}\vec{\lambda}\cdot\vec{k}+\dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{\lambda}+\dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{\lambda} \Rightarrow \omega_\xi=\dot{\psi}a_{13}+\dot{\theta}\cos\varphi \Rightarrow \omega_\xi=\dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\varphi$$
$$\omega_\eta=\vec{\omega}\cdot\vec{\mu},\quad \omega_\eta=\dot{\psi}\vec{\mu}\cdot\vec{k}+\dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{\mu}+\dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{\mu} \Rightarrow \omega_\eta=\dot{\psi}a_{23}-\dot{\theta}\sin\varphi \Rightarrow \omega_\eta=\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\varphi$$
$$\omega_\zeta=\vec{\omega}\cdot\vec{\nu},\quad \omega_\zeta=\dot{\psi}\vec{\nu}\cdot\vec{k}+\dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{\nu}+\dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{\nu} \Rightarrow \omega_\zeta=\dot{\psi}a_{33}+\dot{\varphi} \Rightarrow \omega_\zeta=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi} \qquad (16)$$

Vektor trenutne ugaone brzine tela (12) u nepokretnom KS Oxyz određen je svojim projekcijama ω_x, ω_y i ω_z, tj.:

$$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}, \qquad (17)$$

gde je:

$$\omega_x=\vec{\omega}\cdot\vec{i},\quad \omega_x=\dot{\psi}\vec{k}\cdot\vec{i}+\dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{i}+\dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{i} \Rightarrow \omega_x=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}a_{31} \Rightarrow \omega_x=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega_y=\vec{\omega}\cdot\vec{j},\quad \omega_y=\dot{\psi}\vec{k}\cdot\vec{j}+\dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{j}+\dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{j} \Rightarrow \omega_y=\dot{\theta}\sin\psi+\dot{\varphi}a_{32} \Rightarrow \omega_y=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega_z=\vec{\omega}\cdot\vec{k},\quad \omega_z=\dot{\psi}\vec{k}\cdot\vec{k}+\dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{k}+\dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{k} \Rightarrow \omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}a_{33} \Rightarrow \omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta \qquad (18)$$

Jednačine (16) i (18) nazivaju se Ojlerove kinematske formule. Veličine $\omega_{\xi,\eta,\zeta}$, kao i veličine $\omega_{x,y,z}$ funkcije su ugaone brzine precesije $\dot{\psi}$, nutacije $\dot{\theta}$ i sopstvene ugaone brzine $\dot{\varphi}$ na linearan način.

(Jedinični vektor čvorne ose $\vec{n}$ u DKS $O\xi\eta\zeta$ je: $\vec{n}=\cos\varphi\,\vec{\lambda}-\sin\varphi\,\vec{\mu}$, a u DKS Oxyz: $\vec{n}=\cos\psi\,\vec{i}+\sin\psi\,\vec{j}$)

Brzina promene baznih vektora $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ DKS $O\xi\eta\zeta$ vezanog za telo određena je vektorom trenutne ugaone brzine tela, tj. DKS $O\xi\eta\zeta$:

$$\dot{\vec{\lambda}}=\vec{\omega}\times\vec{\lambda},\quad \dot{\vec{\mu}}=\vec{\omega}\times\vec{\mu},\quad \dot{\vec{\nu}}=\vec{\omega}\times\vec{\nu}. \qquad (19)$$

Veličina koja predstavlja brzinu promene vektora trenutne ugaone brzine u bilo kom trenutku t naziva se trenutno ugaono ubrzanje tela $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon}\overset{def}{=}\frac{d\vec{\omega}}{dt}; \qquad (20)$$

gde je $d\vec{\omega}\approx\vec{\omega}(t+dt)-\vec{\omega}(t)$, priraštaj vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$ na intervalu vremena $[t,t+dt]$

Kako je prema (13): $\vec{\omega}=\omega\vec{\omega}_0$, vektor trenutnog ugaonog ubrzanja (20) biće:

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d}{dt}(\omega\vec{\omega}_0) \Rightarrow \vec{\varepsilon}=\dot{\omega}\vec{\omega}_0+\omega\dot{\vec{\omega}}_0 \Rightarrow \vec{\varepsilon}=\dot{\omega}\vec{\omega}_0+\omega(\vec{\omega}_{T.O.R}\times\vec{\omega}_0),$$

odnosno: $$\boxed{\vec{\varepsilon}=\dot{\omega}\vec{\omega}_0+\vec{\omega}_{T.O.R}\times\vec{\omega}}. \qquad (21)$$

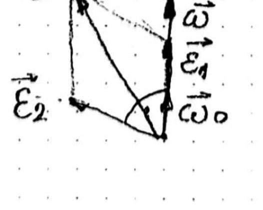
Prema (20) vektor $\vec{\varepsilon}$ u odnosu na T.O.R tela (u trenutku t) ima dve komponente:

- komponenta $\vec{\varepsilon}_1=\dot{\omega}\vec{\omega}_0$ ima pravac T.O.R. i posledica je promene intenziteta trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ u trenutku t, a na intervalu vremena $[t,t+dt]$.
- komponenta $\vec{\varepsilon}_2=\vec{\omega}_{T.O.R}\times\vec{\omega}$ upravna je na T.O.R ($\vec{\varepsilon}_2\perp\vec{\omega}_0$) i posledica je promene pravca trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ u trenutku t, a na intervalu vremena $[t,t+dt]$.

Na osnovu (21), tj. činjenice da je:

$$\vec{\varepsilon}=\vec{\varepsilon}_1+\vec{\varepsilon}_2, \qquad (22)$$

sledi da vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ i vektor trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ nisu kolinearni vektori



Vektor trenutnog ugaonog ubrzanja tela $\vec{\varepsilon}$ u KS $O\xi\eta\zeta$ vezanom za telo određen je projekcijama $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta$ i ε_ζ, tj.:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_\xi \vec{\lambda} + \varepsilon_\eta \vec{\mu} + \varepsilon_\zeta \vec{\nu}, \qquad (23)$$

gde je:

$$\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi, \quad \varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta \quad i \quad \varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta \qquad (24)$$

$$\left(\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{\nu}) = \dot{\omega}_\xi \vec{\lambda} + \dot{\omega}_\eta \vec{\mu} + \dot{\omega}_\zeta \vec{\nu} + \omega_\xi \dot{\vec{\lambda}} + \omega_\eta \dot{\vec{\mu}} + \omega_\zeta \dot{\vec{\nu}}, \text{ gde je:}\right.$$

$$\left.\omega_\xi \dot{\vec{\lambda}} + \omega_\eta \dot{\vec{\mu}} + \omega_\zeta \dot{\vec{\nu}} = \omega_\xi(\vec{\omega} \times \vec{\lambda}) + \omega_\eta(\vec{\omega} \times \vec{\mu}) + \omega_\zeta(\vec{\omega} \times \vec{\nu}) = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0\right)$$

Vektor trenutnog ugaonog ubrzanja tela $\vec{\varepsilon}$ u KS $Oxyz$ određen je projekcijama $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ i ε_z, tj.: $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k}$, (25)

gde su: $\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \varepsilon_y = \dot{\omega}_y$ i $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z$ (26)

$$\left(\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k}\right)$$

<u>Kinematika tačke tela koje rotira oko nepokretne tačke O tela.</u>- Kretanje tačke M tela čiji je položaj u DKS $O\xi\eta\zeta$ vezanom za telo određen koordinatama ξ, η, ζ, tj. vektorom $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}$, u odnosu na nepokretan DKS $Oxyz$ biće određeno funkcijama: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, tj. vektorom: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Kako je: $\vec{r} = \vec{\rho}$, tj.

$$x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \xi\vec{\lambda}(t) + \eta\vec{\mu}(t) + \zeta\vec{\nu}(t),$$

to su konačne jednačine kretanja tačke M u DKS $Oxyz$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = [a_{ij}]^T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \qquad (27)$$

gde je: $a_{ij} = a_{ij}(\psi, \theta, \varphi)$, $\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t)$ i $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ i $\zeta = \zeta_0$.

Brzina tačke M je:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}) \Rightarrow \vec{v} = \xi\dot{\vec{\lambda}} + \eta\dot{\vec{\mu}} + \zeta\dot{\vec{\nu}} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \qquad (28)$$

U DKS $O\xi\eta\zeta$ brzina tačke: $\vec{v} = v_\xi\vec{\lambda} + v_\eta\vec{\mu} + v_\zeta\vec{\nu}$, biće određena determinantom:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} \Rightarrow v_\xi = \omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta, \; v_\eta = \omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta \; i \; v_\zeta = \omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi \qquad (29)$$

U DKS $Oxyz$ brzina tačke M: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, biće određena determinantom:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow v_x = \omega_y z - \omega_z y, \; v_y = \omega_z x - \omega_x z \; i \; v_z = \omega_x y - \omega_y x \qquad (30)$$

Geometrijsko mesto tačaka čija je brzina u nekom trenutku t jednaka nuli ($\vec{v} = 0$) u DKS $O\xi\eta\zeta$, a prema (29), biće određeno jednačinama $v_\xi = 0, v_\eta = 0$ i $v_\zeta = 0$, tj. jednačinom:

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}, \qquad (31)$$

a u DKS $Oxyz$ jednačinama: $v_x = 0, v_y = 0$ i $v_z = 0$, koje s obzirom na (30) daju jednačinu

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \qquad (32)$$

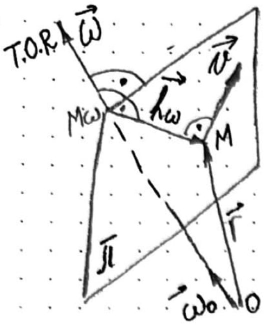
Jednačina (31) predstavlja jednačinu prave, tj. T.O.R u DKS $O\xi\eta\zeta$, a (32) jednačinu te iste prave, tj. T.O.R u DKS $Oxyz$, s obzirom da je pravac T.O.R određen vektorom $\vec{\omega}$.

Vektor brzine tačke M tela koje vrši sferno kretanje, a koja nije na T.O.R u trenutku t, leži u ravni Π koja sadrži tačku M i upravna je na T.O.R, a može se dati izrazom:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{h}_\omega,$$

gde je: $\vec{h}_\omega = \overrightarrow{M_\omega M}$ i M_ω normalna projekcija tačke M na T.O.R.

To znači da je raspodela brzina tačaka tela koje se sferno kreće u nekom trenutku t ista kao da to telo u posmatranom trenutku t rotira oko T.O.R.

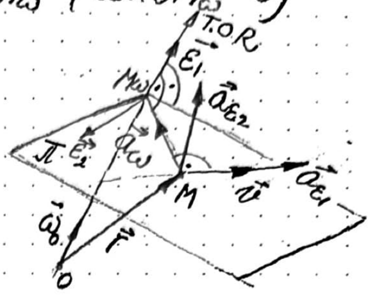


$M \in \pi$, $\vec{\omega} \perp \pi$, $\pi \cap T.O.R = \{M_\omega\}$

$\vec{h}_\omega = \overrightarrow{M_\omega M}$, $\vec{h}_\omega \perp \vec{\omega}$ $(\vec{h}_\omega \in \pi)$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM_\omega} + \overrightarrow{M_\omega M}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{OM_\omega} + \vec{h}_\omega) \Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{h}_\omega$ $(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM_\omega} = 0)$



Ubrzanje tačke M tela koje vrši sferno kretanje je:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$,

tj. ubrzanje tačke M se sastoji od dve komponente:

$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ i $\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$,

pa je $\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$.

Komponenta $\vec{a}_\varepsilon$ nije kolinearna sa vektorom brzine $\vec{v}$ tačke M, jer vektor trenutne ~~ugaonog~~ ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ nije kolinearan sa vektorom trenutne ugaone brzine, kao u slučaju rotacije tela oko nepokretne ose. Ako se trenutno ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon}$ predstavi preko komponenata $\vec{\varepsilon}_1$ i $\vec{\varepsilon}_2$, tj. kao: $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$, tada se obrtno ubrzanje $\vec{a}_\varepsilon$ može napisati u obliku zbira komponenata:

$\vec{a}_\varepsilon = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \times \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_\varepsilon = \vec{a}_{\varepsilon_1} + \vec{a}_{\varepsilon_2}}$, gde je $\vec{a}_{\varepsilon_1} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}$ i $\vec{a}_{\varepsilon_2} = \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r}$. i $\vec{a}_{\varepsilon_1}$ kolinearno sa $\vec{v}$,

dok $\vec{a}_{\varepsilon_2}$ ne leži u ravni π. $(\vec{a}_{\varepsilon_2} \perp \vec{\varepsilon}_2$ i $\vec{a}_{\varepsilon_2} \perp \vec{r})$

Komponenta ubrzanja tačke M, $\vec{a}_\omega$ je: $\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{h}_\omega)$ i ona je kolinearna sa vektorom $-\vec{h}_\omega$, tj. $\vec{a}_\omega = -\omega^2 \vec{h}_\omega$.

Prema tome ubrzanje tačke M je dato izrazom:

$\vec{a} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$, tj. $\vec{a} = \vec{a}_{\varepsilon_1} + \vec{a}_{\varepsilon_2} + \vec{a}_\omega$

U DKS $O\xi\eta\zeta$ ubrzanje tačke M je:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta & \varepsilon_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \end{vmatrix},$$

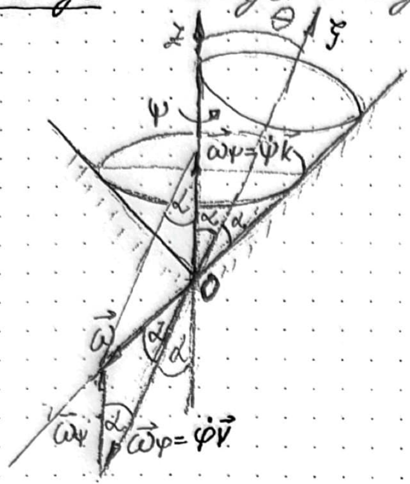
a u DKS Oxyz:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Žiroskop je uređaj za merenje promene uglova kretanja tela za koji je vezan, i za održavanje orijentacije tela u prostoru. Konvencionalni mehanički žiroskop sastoji se od jednog rotora koji može da rotira oko jedne ose. Nosač rotora se vezuje za unutrašnji kardanski prsten ili obruč, a ovaj je vezan za spoljašnji prsten koji može da se vrti oko svoje ose u ravni vešanja. Spoljašnji prsten ima 1 stepen slobode, Unutrašnji prsten poseduje 2 stepena slobode, a njegova osa rotacije 1. Rotor poseduje 3 stepena slobode, a njegova osa 2 stepena slobode.

<u>precesija</u> – ići napred, <u>prednjačiti</u>; pravilna promena pravca ose rotirajućih tela

<u>nutacija</u> – kolebanje, klimanje, njihanje sopstvene ose



$\theta = \theta_0 = \alpha$, tj. $\theta = const$, $\dot{\theta} = 0$

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{\nu} \Rightarrow |\vec{\omega}_\psi| = |\vec{\omega}_\varphi| \Rightarrow |\dot{\varphi}| = |\dot{\psi}|$