Opšte kretanje krutog tela.

Definicija.- Kretanje krutog tela pri kome telo može da zauzme bilo koji položaj u odnosu na referentni objekat (nepokretan DKS $Oxyz$), naziva se opšte kretanje tela. Iz definicije opšteg kretanja tela sledi da su kretanja tačaka krutog tela pri ovakvom njegovom kretanju ograničeno samo uslovima koji slede iz činjenice da je telo kruto, tj. da se rastojanja između tačaka tela tokom njegovog kretanja ne menjaju, odnosno, da se ne menjaju uglovi između pravih (osa, vektora) vezanih za to telo. To znači da opšte kretanje može da realizuje jedino slobodno kruto telo, tj. telo čije stanje kretanja nije ograničeno drugim telima - vezama. Zbog toga se ovo kretanje može nazvati i kretanje slobodnog krutog tela u 3D-euklidskom prostoru.

Napomena.- Ravno kretanje krutog tela koje ima 3 stepena slobode predstavlja kretanje slobodnog krutog tela u 2D - euklidskom prostoru (ravni).

Određivanje broja stepeni slobode, konačne jednačine opšteg kretanja krutog tela i njegove kinematske karakteristike. - Posmatra se pomeranje krutog tela koje vrši opšte kretanje na bilo kom intervalu vremena konačne dužine $[t_0, t]$. Pri ovom pomeranju tela dolazi do premeštanja (preslikavanja) DKS $A\xi\eta\zeta$ vezanog za telo iz DKS $A_0\xi_0\eta_0\zeta_0$ u trenutku t_0 ($A_0\xi_0\eta_0\zeta_0 = Oxyz$, $A_0=O$; $\vec{\lambda}_0=\vec{i}$, $\vec{\mu}_0=\vec{j}$, $\vec{\nu}_0=\vec{k}$) u DKS $A\xi\eta\zeta$ u trenutku t.

Položaj tačke A tela, kao koordinatnog početnog DKS vezanog za telo, u trenutku t biće poznat ako su poznate koordinate x_A, y_A, z_A te tačke u odnosu na referentni DKS $Oxyz$: $x_A = x_A(t)$; $y_A = y_A(t)$; $z_A = z_A(t)$; pri čemu su veličine x_A, y_A i z_A međusobno nezavisne i kao takve predstavljaće istovremeno i prve tri generalisane koordinate slobodnog tela: $q_1 = x_A$, $q_2 = y_A$ i $q_3 = z_A$. (1)

Pri pomeranju slobodnog krutog tela na posmatranom intervalu vremena tačke D tela koja se nalazi na osi $A\zeta$ DKS $A\xi\eta\zeta$ vezanog za telo premestiće se iz položaja $D_0 \in A_0\zeta_0$ u trenutku t_0, u položaj $D \in A\zeta$ u trenutku t, pri čemu se taj položaj nalazi na površini sfere čiji je centar tačka A, a poluprečnik: $\overline{AD} = \overline{A_0D_0}$. Pravac ose $A\zeta$ u trenutku t je, dakle, određen pravom AD i zaokrenut je u prostoru, a u odnosu na osu $A_0\zeta_0 = Oz$. Ovaj ugao biće označen sa θ i može se takođe videti i kao ugao između ose $A\zeta$ i ose Az' DKS $Ax'y'z'$ u tački A čije su ose paralelne osama nepokretnog DKS $Oxyz$ ($\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \vec{j}$, $\vec{k}' = \vec{k}$):

$\theta = \measuredangle(Az'; A\zeta) = \measuredangle(Oz, A\zeta) = \measuredangle(\vec{k}, \vec{\nu})$ (2_1)

Druge dve ose DKS vezanog za telo $A\xi$ i $A\eta$ u trenutku t nalaziće se u ravni π koja sadrži tačku A i na koju je osa $A\zeta$ upravna. Presek ove ravni i ravni $Ax'y'$ je osa $A\xi_1$, čvorna osa, i njen položaj, tj. njenog jediničnog vektora $\vec{n}$, u ravni $Ax'y'$ određen je uglom:

$\psi = \measuredangle(Ax', A\xi_1) = \measuredangle(\vec{i}, \vec{n})$ (2_2)

Položaj ose $A\xi$, a samim tim i ose $A\eta$ u ravni π, u trenutku t određen je uglom

$\varphi = \measuredangle(A\xi_1, A\xi) = \measuredangle(\vec{n}, \vec{\lambda})$ (2_3)

Uglovi ψ, θ i φ predstavljaju Ojlerove uglove zaokretanja osa DKS vezanog za telo u odnosu na ose referentnog DKS $Oxyz$, odnosno, $Ax'y'z'$, na intervalu vremena $[t_0\ t]$. Ovi uglovi prema Ojlerovoj teoremi predstavljaju uglove tri uzastopne rotacije tela oko osa koje se seku u istoj tački, tj. u tački A slobodnog krutog tela. Ove rotacije su:

1.- Precesija (ugao ψ) – osa rotacije Az' ($\vec{k}$)
2.- nutacija (ugao θ) – osa rotacije čvorna osa $A\xi'$ ($\vec{n}$)
3.- sopstvena rotacija (ugao φ) – sopstvena osa tela $A\zeta$ ($\vec{\nu}$)

Ojlerovim uglovima ψ, θ i φ određeni su koeficijenti matrice kosinusa uglova koje svaka od osa koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ gradi sa svakom od osa DKS $Ax'y'z'$ ($Oxyz$):

$$a_{ij} = a_{ij}(\psi,\theta,\varphi), \qquad (3)$$

tj. analitički su određeni bazni vektori $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ koordinatnog sistema vezanog za telo u DKS $Ax'y'z'$ ($Oxyz$), a pomoću jednačine:

$$\begin{bmatrix}\vec{\lambda}\\ \vec{\mu}\\ \vec{\nu}\end{bmatrix} = [a_{ij}]\begin{bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{bmatrix} \quad i \quad [a_{ij}] = [a_{ij}^{\varphi}][a_{ij}^{\theta}][a_{ij}^{\psi}] \qquad (4)$$

Matrica $[a_{ij}]$ za opšte kretanje tela ima istu matematičku formu (oblik) kao i matrica kosinusa uglova za sferno kretanje krutog tela.

Uglovi ψ, θ i φ pri opštem kretanju krutog tela su međusobno nezavisni slobodni parametri i predstavljaju druge tri generalisane koordinate slobodnog krutog tela:

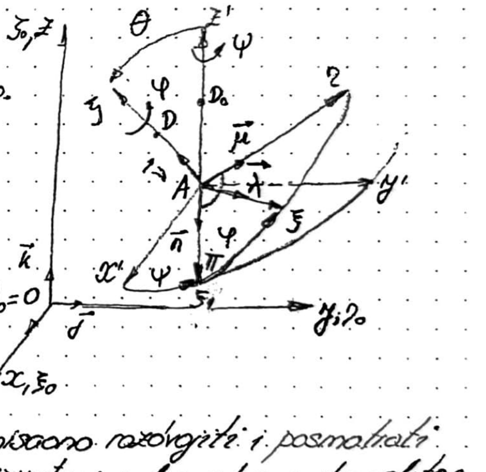
$$q_4 = \psi, \quad q_5 = \theta, \quad q_6 = \varphi \qquad (5)$$

Broj stepeni slobode opšteg kretanja tela u 3D-euklidskom prostoru, kao broj međusobno nezavisnih komponentalnih kretanja, 3 translacije i 3 rotacije oko 3 pokretne ose, je: $n=6$. Konačne jednačine kretanja slobodnog krutog tela, s obzirom na uvedene generalisane koordinate (1) i (5) su:

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t) \quad i \quad z_A = z_A(t); \qquad (6_1)$$

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t) \quad i \quad \varphi = \varphi(t). \qquad (6_2)$$

Jednačine (6_1) predstavljaju jednačine translatornog kretanja tela u 3D-euklidskom prostoru tokom njegovog opšteg kretanja. Tačka A tela čije jednačine kretanja opisuju ovu translaciju tokom kretanja slobodnog tela naziva se pol translacije.



Jednačine (6_2) predstavljaju jednačine sfernog kretanja tela oko pola translacije, pokretne tačke A tela, tokom njegovog opšteg kretanja.

Opisana komponentalna kretanja slobodnog krutog tela su međusobno nezavisna i ona se dešavaju istovremeno, ali se pri posmatranju (kako konačnih tako i) elementarnog pomeranja slobodnog krutog tela na bilo kom intervalu vremena $[t, t+dt]$ mogu misaono razdvojiti i posmatrati kao da se dešavaju sukcesivno, jedno za drugim. Redosled izvođenja elementarnog translatornog pomeranja i elementarne rotacije oko pola translacije pri opštem kretanju krutog tela, a na posmatranom intervalu vremena, nije bitan (elementarna translacija i elementarna rotacija oko pola translacije su, zbog nezavisnosti, međusobno komutativna pomeranja).

Elementarno translatorno pomeranje slobodnog krutog tela na intervalu vremena $[t, t+dt]$ određeno je elementarnim pomeranjem pola translacije A tela na tom intervalu vremena. Vektor tog elementarnog pomeranja je:

$$d\vec{r}_A \approx \vec{r}_A(t+dt) - \vec{r}_A(t) \Rightarrow d\vec{r}_A = dx_A\vec{i} + dy_A\vec{j} + dz_A\vec{k},$$

gde su: dx_A, dy_A i dz_A priraštaji koordinata x_A, y_A, z_A tačke A u trenutku t, a za interval vremena dt.

Brzina tačke A u trenutku t: $\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$ i $\vec{v}_A = \dot{x}_A\vec{i} + \dot{y}_A\vec{j} + \dot{z}_A\vec{k}$

i njeno ubrzanje: $\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt}$, $\vec{a}_A = \ddot{x}_A\vec{i} + \ddot{y}_A\vec{j} + \ddot{z}_A\vec{k}$,

predstavljaju brzinu i ubrzanje translatornog kretanja tela pri njegovom opštem kretanju u bilo kom trenutku t.

Vektor elementarne rezultujuće rotacije slobodnog krutog tela oko pola translacije A u trenutku t, a na intervalu vremena dužine dt, je:

$\delta\vec{\alpha} = d\psi\vec{k} + d\theta\vec{n} + d\varphi\vec{\nu}$,

pa su trenutna ugaona brzina $\vec{\omega}$ i trenutno ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon}$ opšteg kretanja krutog tela:

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi \Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{\nu}$ $(\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega}\times\vec{\lambda},\ \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega}\times\vec{\mu},\ \dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega}\times\vec{\nu})$

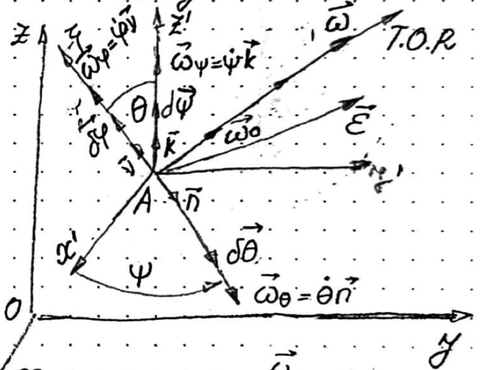
i $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

Vektori elementarne rezultujuće rotacije $\delta\vec{\alpha}$ i trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ slobodnog krutog tela su međusobno kolinearni i leže na trenutnoj osi rotacije čiji je jedinični vektor $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}/|\vec{\omega}|$. Trenutna osa rotacije opšteg kretanja krutog tela prolazi u svakom trenutku t kroz pol translacije i predstavlja geometrijsko mesto tačaka tela čije su brzine u tom trenutku jednake brzini pola translacije.

Vektor trenutnog ugaonog ubrzanja opšteg kretanja krutog tela: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\omega\vec{\omega}_0)$, sastoji se od dve komponente: $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$, gde je:

$\vec{\varepsilon}_1 = \dot{\omega}\vec{\omega}_0$ – komponenta ugaonog ubrzanja na trenutnoj osi rotacije koja je posledica promene intenziteta trenutne ugaone brzine u trenutku t, a na intervalu vremena dt

i $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_{T.O.R} \times \vec{\omega}$ – komponenta ugaonog ubrzanja koja je upravna trenutnu osu rotacije slobodnog krutog tela u trenutku t i koja je posledica promene pravca vektora trenutne ugaone brzine (trenutne ose rotacije tela) u tom trenutku vremena ugaonom brzinom $\vec{\omega}_{T.O.R}$ $(\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{\omega}_{T.O.R} \times \vec{\omega}_0)$.



Vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ u DKS $A\xi\eta\zeta$, odnosno, u DKS $Oxyz$:

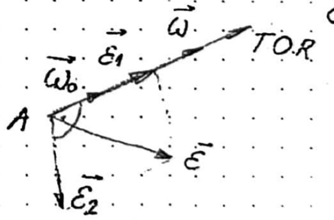
$\vec{\omega} = \omega_\xi\vec{\lambda} + \omega_\eta\vec{\mu} + \omega_\zeta\vec{\nu}$ i $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$,

određen je Ojlerovim kinematskim jednačinama

(videti knjigu; $\omega_{\xi,\eta,\zeta} = \omega_{\xi,\eta,\zeta}(\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$ i

$\omega_{x,y,z} = \omega_{x,y,z}(\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$)

Vektor trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ u DKS $A\xi\eta\zeta$, odnosno, u DKS $Oxyz$ je:



$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_\xi\vec{\lambda} + \varepsilon_\eta\vec{\mu} + \varepsilon_\zeta\vec{\nu}$, gde je: $\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi$, $\varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta$ i $\varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta$ i

$\varepsilon_{\xi,\eta,\zeta} = \varepsilon_{\xi,\eta,\zeta}(\ddot{\psi},\ddot{\theta},\ddot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$

i $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x\vec{i} + \varepsilon_y\vec{j} + \varepsilon_z\vec{k}$, gde je $\varepsilon_x = \dot{\omega}_x$, $\varepsilon_y = \dot{\omega}_y$ i $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z$ i $\varepsilon_{x,y,z} = \varepsilon_{x,y,z}(\ddot{\psi},\ddot{\theta},\ddot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$

Veza između projekcija vektora $\vec{\omega}$, odnosno $\vec{\varepsilon}$, na ose Dekartovih koordinatnih sistema $A\xi\eta\zeta$ i $Oxyz$ je:

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} = [a_{ij}]^T\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\end{bmatrix} = [a_{ij}]^T\begin{bmatrix}\varepsilon_\xi\\\varepsilon_\eta\\\varepsilon_\zeta\end{bmatrix}$$

Kretanje tačke tela koje vrši opšte kretanje. - Posmatra se kretanje tačke M slobodnog krutog tela čiji je položaj u odnosu na DKS $A\xi\eta\zeta$ određen koordinatama: $\xi(t)=\xi_0=const$, $\eta(t)=\eta_0=const$ i $\zeta(t)=\zeta_0=const$, i čiji je vektor položaja u odnosu na pol translacije A, u trenutku t:

$\vec{\rho}=\vec{AM}=\xi\vec{\lambda}(t)+\eta\vec{\mu}(t)+\zeta\vec{\nu}(t)$.

Kako je: $\dot{\vec{\lambda}}=\vec{\omega}\times\vec{\lambda}$, $\dot{\vec{\mu}}=\vec{\omega}\times\vec{\mu}$ i $\dot{\vec{\nu}}=\vec{\omega}\times\vec{\nu}$, to je:

$\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\xi\dot{\vec{\lambda}}+\eta\dot{\vec{\mu}}+\zeta\dot{\vec{\nu}} \Rightarrow \frac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$.

Konačna jednačina kretanja tačke M u odnosu na nepokretan pol O u vektorskom obliku: $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\vec{r}=\vec{OM}$, određuje se iz jednačine:

$\vec{r}=\vec{r}_A+\vec{\rho}$, odnosno iz jednačine: $x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}=x_A(t)\vec{i}+y_A(t)\vec{j}+z_A(t)\vec{k}+$ $+\xi\vec{\lambda}(t)+\eta\vec{\mu}(t)+\zeta\vec{\nu}(t)$; gde su: $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$ konačne jednačine kretanja tačke u odnosu na nepokretni DKS Oxyz. Množenjem skalarno leve i desne strane poslednje jednačine vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, dobijaju se funkcije $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$ u obliku:

$$\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_A(t)\\ y_A(t)\\ z_A(t)\end{bmatrix}+\left[a_{ij}(\psi(t),\theta(t),\varphi(t))\right]^T\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}.$$

Brzina tačke M slobodnog krutog tela određena je izrazom:

$\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}_A+\dot{\vec{\rho}} \Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_A+\vec{v}_M^{\,A}$, gde je

$\vec{v}_M^{\,A}=\dot{\vec{\rho}}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$ - obrtna komponenta brzine tačke M nastala kao posledica rotacije, obrtanja, tela oko pola A. Ova komponenta, kao i kod sfernog kretanja krutog tela, leži u ravni koja sadrži tačku M, a upravna je na trenutnu osu rotacije opšteg kretanja krutog tela.

Dakle: Brzina proizvoljne tačke M slobodnog krutog tela jednaka je vektorskom zbiru brzine pola translacije $\vec{v}_A$ i njene obrtne komponente $\vec{v}_M^{\,A}$.

Na osnovu formule za brzinu tačaka slobodnog krutog tela može se sada pokazati (na isti način kao i kod ravnog kretanja krutog tela) da vektor trenutne ugaone brzine tela ne zavisi od izbora pola translacije opšteg kretanja krutog tela. Ovo ima za posledicu invarijantnost konačnih jednačina sfernog kretanja slobodnog tela oko pola translacije, a u odnosu na izbor tačke tela za pol translacije, kao i invarijantnost trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ slobodnog krutog tela u odnosu na izbor trenutnog pola translacije opšteg kretanja tela.

Ubrzanje tačke M slobodnog krutog tela je:

$\dot{\vec{v}}=\dot{\vec{v}}_A+\dot{\vec{v}}_M^{\,A} \Rightarrow \vec{a}=\vec{a}_A+\vec{a}_M^{\,A}$,

gde je: $\vec{a}_M^{\,A}=\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times\vec{v}_M^{\,A}$ - obrtna komponenta ubrzanja tačke M nastala kao posledica rotacije slobodnog krutog tela oko njegovog pola translacije. Ova komponenta se može napisati i u obliku:

$\vec{a}_M^{\,A}=\vec{a}_{M\varepsilon_1}^{\,A}+\vec{a}_{M\varepsilon_2}^{\,A}+\vec{a}_{M\omega}^{\,A}$, gde su: $\vec{a}_{M\varepsilon_1}^{\,A}=\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\rho}$, $\vec{a}_{M\varepsilon_2}^{\,A}=\vec{\varepsilon}_2\times\vec{\rho}$ i $\vec{a}_{M\omega}^{\,A}=\vec{\omega}\times\vec{v}_M^{\,A}$

Dakle: ubrzanje proizvoljne tačke M slobodnog krutog tela određeno je vektorskim zbirom brzine pola translacije A i njenog obrtnog ubrzanja, nastalog kao posledica obrtanja tela oko tog pola.

Napomena o svođenju opšteg kretanja krutog tela.-

Elementarno pomeranje slobodnog krutog tela koje se sastoji od elementarnog translatornog pomeranja tela i elementarne rotacije tog tela oko pola translacije, može se svesti na trenutno zavojno kretanje tela oko trenutne ose tog zavojnog kretanja. Trenutna osa zavojnog kretanja tela (osa kinematskog zavrtnja) je geometrijsko mesto tačaka slobodnog krutog tela čije su trenutne brzine istog pravca i smera kao i vektor trenutne ugaone brzine slobodnog tela.

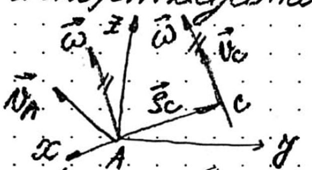
Ako je tačka C tačka trenutne zavojne ose, tada je:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{v}_C = p\vec{\omega}\\ i\quad &\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{s}_C = p\vec{\omega}\end{aligned}\right\} \Rightarrow p = \frac{\dot{x}_A + (\omega_y z_C - \omega_z y_C)}{\omega_x} = \frac{\dot{y}_A + (\omega_z x_C - \omega_x z_C)}{\omega_y} = \frac{\dot{z}_A + (\omega_x y_C - \omega_y x_C)}{\omega_z}$$

gde je p parametar trenutnog zavrtnja, a određuje se jednačine:

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v}_C = p\vec{\omega}\cdot\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega}\cdot(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{s}_C) = p\omega^2 \Rightarrow p = \frac{\vec{v}_A\cdot\vec{\omega}}{\omega^2}$$

Kinematski zavrtanj, tj. trenutno zavojno kretanje predstavlja takav oblik kretanja krutog tela koji se ekvivalentnim transformacijama ne može dalje uprošćavati.



Kinematske invarijante.-

Prva kinematska invarijanta je trenutna ugaona brzina tela $\vec{\omega}$, s obzirom da ona ne zavisi od izbora trenutnog pola translacije: $\vec{I}_1 = \vec{\omega}$.

Druga kinematska invarijanta.- Ukoliko se umesto tačke A za pol translacije izabere tačka B čija je brzina: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{AB}$, tada važi:

$$\vec{v}_B\cdot\vec{\omega} = \vec{v}_A\cdot\vec{\omega} + (\vec{\omega}\times\vec{AB})\cdot\vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B\cdot\vec{\omega} = \vec{v}_A\cdot\vec{\omega}}.$$

Iz poslednje jednačine sledi: $\boxed{I_2 = v_B\cos\beta = v_A\cos\alpha}$,

što znači da se projekcija vektora brzine trenutne translacije na osu trenutne rotacije ne menja sa promenom pola, pa zato ta veličina predstavlja drugu kinematsku invarijantu.