Ojlerove diferencijalne jednačine

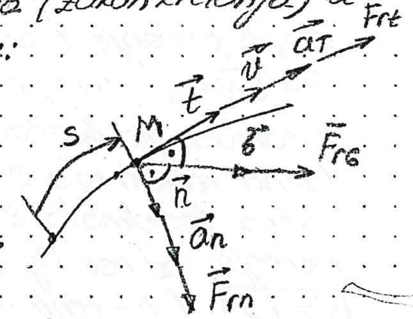
Pretpostavimo da je poznata linija putanje, tj., trajektorija tačke M u odnosu na nepokretni DKS Oxyz. Kretanje tačke M po trajektoriji biće poznato ukoliko je poznat zakon puta $s=s(t)$. Ako u položaju M tačke na trajektoriji u proizvoljnom trenutku t postavimo prirodan triedar (ort tangente na trajektoriju u $M-\vec{t}$, ort glavne normale na trajektoriju $M-\vec{n}$ i ort binormale na trajektoriju u $M-\vec{b}$), onda je:

$\vec{v} = v\vec{t}$, $v = \dot{s}$

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, gde je: $\vec{a}_t = a_t\vec{t}$, $a_t = \dot{v} = \ddot{s}$ – tangentno ubrzanje

$\vec{a}_n = a_n\vec{n}$, $a_n = \frac{v^2}{R_K}$ – normalno ubrzanje

Neka se kretanje posmatrane tačke odvija pod dejstvom sistema sila čija je rezultanta: $\vec{F}_r = F_{rt}\vec{t} + F_{rn}\vec{n} + F_{rb}\vec{b}$, gde su F_{rt}, F_{rn} i F_{rb} projekcije rezultante $\vec{F}_r$ na ose prirodnog triedra. Diferencijalna jednačina kretanja (zakon kretanja) u vektorskom obliku: $m\vec{a} = \vec{F}_r$, može se sada dati u obliku:



$$m(a_t\vec{t} + a_n\vec{n}) = F_{rt}\vec{t} + F_{rn}\vec{n} + F_{rb}\vec{b} \quad (1)$$

pa se iz je nakon projektovanja leve i desne strane na ose prirodnog triedra dobija sistem od 3 skalarne jednačine:

$$\left.\begin{aligned} ma_t = F_{rt} &\Rightarrow m\ddot{s} = F_{rt} && (2) \\ ma_n = F_{rn} &\Rightarrow m\frac{v^2}{R_K} = F_{rn} && (3) \\ ma_b = F_{rb} &\Rightarrow 0 = F_{rb} && (4) \end{aligned}\right\} \text{Ojlerove diferencijalne jednačine}$$

Ako je poznat zakon promene projekcije rezultante sila $\vec{F}_r$ na osu tangente prirodnog triedra: $F_{rt} = F_{rt}(t, s, \dot{s})$, jednačina (2) predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda po funkciji $s=s(t)$, tj. diferencijalnu jednačinu kretanja tačke po trajektoriji. Opšti integral te jednačine je: $s=s(t; C_1, C_2)$, a zakon puta $s=s(t)$ se dobija iz tog opšteg integrala za početne uslove: $t_0=0$, $s_0=s(t_0)$ i $v_0=\dot{s}(t_0)=\dot{s}_0$

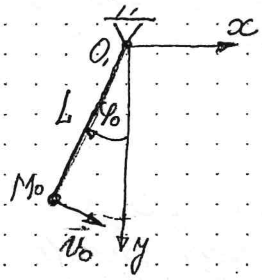
Jednačine (3) i (4) nakon integracije jednačine (2), a u slučaju slobodne tačke, predstavljaju jednačine kompatibilnosti za sistem sila koji deluje na tu slobodnu tačku i dovodi je u kretanje po datoj trajektoriji.

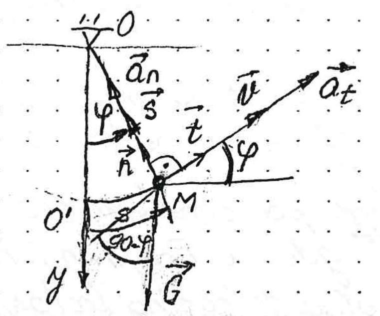
U slučaju da se posmatra kretanje vezane tačke u ravni (npr. Oxy) iz jednačina (3) i (4) se nakon integracije jednačine (2) određuju nepoznate reakcije veza.

④ Tačka M mase m koja je lakim, neistegljivim užetom dužine L vezana za nepokretnu tačku O, može da se kreće u vertikalnoj ravni Oxy. U početnom položaju M_0 tačke uže je pomereno od vertikalne ose Oy za ugao otklona φ_0, a tački M je saopštena početna brzina $\vec{v}_0$ u ravni Oxy. Odrediti:

a) silu u užetu u proizvoljnom položaju tačke M

b) zakon kretanja tačke M u slučaju malih otklona φ užeta od ose Oy, kada je $\sin\varphi \approx \varphi$.





Linija putanje tačke M je kružnica sa centrom u tački, a poluprečnika $R=\overline{OM}=L$ (uže je neistegljivo). Položaj tačke M u proizvoljnom trenutku t određen je lučnom koordinatom $s=\overset{\frown}{O'M}$, gde je O' tačka od koje se meri lučna koordinata s i koja se nalazi u presecku kružne trajektorije tačke i ose Oy. Lučna koordinata s se može povezati sa uglom otklona užeta φ čiji smer merenja od ose Oy do pravca užeta OM, prati smer porasta lučne koordinate s:

$\boxed{s=L\varphi}$ (φ - centralni ugao luka kružnice OM)

U položaju M tačke na kružnici vezan je prirodni triedar. Vektor brzine $\vec{v}$ i vektor tangentnog ubrzanja $\vec{a}_t$ tačke u posmatranom trenutku t se pretpostavljaju u smeru ose tangentne prirodnog triedra (prate smer porasta lučne koordinate). Vektor normalnog ubrzanja $\vec{a}_n$ je u pravcu i smeru ose glavne normale u posmatranom položaju tačke na trajektoriji: Brzina v, tangentno ubrzanje a_t i normalno ubrzanje a_n tačke M u trenutku t su:

$$v=\dot{s}=L\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}=v/L} \quad (1)$$

$$a_t=\dot{v}=\frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t=\frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow a_t=\frac{dv}{d\varphi}\dot{\varphi} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{a_t=\frac{v\,dv}{L\,d\varphi}} \quad (2)$$

$$\text{i } a_n=\frac{v^2}{R}. \quad (3)$$

Pošto je tačka M vezana užetom za nepokretnu tačku O, tačka se mora osloboditi veze, tj. uže se mora preseći u okolini tačke M, a njeno dejstvo se zameniti silom u užetu $\vec{S}$. Sila $\vec{S}$ ima pravac užeta u okolini tačke M, a smer ka tački vešanja (tački O). Pored sile u užetu $\vec{S}$ na tačku deluje i sila Zemljine teže $\vec{G}$, pa je diferencijalna jednačina kretanja tačke M u vektorskom obliku:

$$m\vec{a}=\vec{G}+\vec{S}, \quad (4)$$

a njoj pripadajuće Ojlerove diferencijalne jednačine imaju oblik:

$$m\dot{v}=G_t+S_t \Rightarrow \boxed{m\dot{v}=-mg\sin\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{v}=-g\sin\varphi} \quad (5)$$

$$m\frac{v^2}{L}=G_n+S_n \Rightarrow \boxed{m\frac{v^2}{L}=S-mg\cos\varphi} \quad (6)$$

$$0=0 \quad (7)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke po trajektoriji (5) predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda po funkciji $\varphi=\varphi(t)$, jer je: $a_T=\dot{v}=\frac{d}{dt}(L\dot{\varphi})=L\ddot{\varphi}$;

što znači da se ona može napisati i u obliku: $\ddot{\varphi}=-\frac{g}{L}\sin\varphi$. Međutim, rešenje ove jednačine, $\varphi=\varphi(t)$, nije moguće odrediti preko elementarnih funkcija, već specijalnih funkcija. U tom smislu iz jednačine (5) biće određen samo njen prvi integral $v=v(\varphi)$ kojim se određuje brzina v tačke M u funkciji od veličine položaja tačke M, tj. ugla otklona užeta, φ.

Ako se ima u vidu (2), tj. da je: $a_t=\dot{v}=\frac{v\,dv}{L\,d\varphi}$, to jednačina (5) postaje:

$$\boxed{\frac{v\,dv}{L\cdot d\varphi}=-g\sin\varphi} \qquad (6)$$

Nakon razdvajanja promenljivih v i φ u (6) i njene integracije dobija se:

$$v\,dv=-gL\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv=-gL\int_{-\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=gL[\cos\varphi-\cos(-\varphi_0)] \Rightarrow \boxed{v^2=v_0^2+2gL(\cos\varphi-\cos\varphi_0)} \qquad (8)$$

(Početni položaj je određen uglom $-\varphi_0$, jer je smer merenja ugla početnog otklona užeta od ose Oy do pravca užeta u početnom trenutku to suprotan od smera merenja ugla otklona užeta u trenutku t).

Sada se može pristupiti određivanju sile u užetu S, tj. funkcije $S=S(\varphi)$ iz Ojlerove jednačine (7):

$$S=\frac{mv^2}{L}+mg\cos\varphi \xRightarrow{(8)} \boxed{S=\frac{mv_0^2}{L}-2mg\cos\varphi_0+3mgL\cos\varphi}. \qquad (9)$$

Funkcija (9) pokazuje da sila u užetu u svakom trenutku zavisi od početnih uslova kretanja tačke i od ugla otklona užeta, φ.

Kako je veza tipa uže jednostrano zadržavajuća, sila u užetu mora biti: $S\geq 0$. (10)

Položaj φ_1 u kome veza prestaje da bude zadržavajuća određen je jednačinom: $\boxed{S(\varphi_1)=0}$, tj. iz jednačine:

$$\frac{mv_0^2}{L}-2mg\cos\varphi_0+3mgL\cos\varphi_1=0 \Rightarrow \boxed{\cos\varphi_1=\frac{1}{3}\left(\cos\varphi_0-\frac{v_0^2}{gL}\right)} \qquad (10)$$

b) U slučaju malih otklona užeta, tj. kada važi $\sin\varphi\approx\varphi$, diferencijalna jednačina kretanja tačke po kružnoj trajektoriji (5) dobija oblik:

$$\dot{v}\approx-g\varphi \qquad (11)$$

gde je: $a_T=\dot{v}=L\ddot{\varphi}$, pa (11) postaje:

$$L\ddot{\varphi}=-g\varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0} \text{ i } \boxed{\omega^2=\frac{g}{L}},\ \omega=\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (12)$$

kružna frekvenca sistema (mat. klatna)

Jednačina (12) je nepotpuna, homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina jednačine (12) je: $\lambda^2+\omega^2=0$, pa su njeni koreni $\lambda_1=i\omega$ i $\lambda_2=-i\omega$, pa opšte rešenje jednačine (12) glasi:

$$\varphi=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t, \qquad (13)$$

Za određivanje integracionih konstantni C_1 i C_2 potreban je i prvi izvod po vremenu funkcije (13):

$$\dot{\varphi} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t. \qquad (14)$$

Iz (13) i (14) za početne uslove:

$$t_0 = 0,\ \boxed{\varphi(t_0) = -\varphi_0} \quad i \quad \boxed{\dot{\varphi}(t_0) = \frac{v(t_0)}{L}} = \frac{v_0}{L} \qquad (15)$$

sledi da su integracione konstante

$$\boxed{C_1 = -\varphi_0} \quad i \quad \boxed{C_2 = \frac{v_0}{L\omega}},$$

pa je zakon kretanja tačke, tj. klatna:

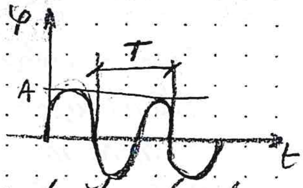
$$\boxed{\varphi(t) = -\varphi_0\cos\omega t + \frac{v_0}{L\omega}\sin\omega t} \qquad (16)$$

Uvođenjem novih konstanti A i α tako da je:

$C_1 = A\cos\alpha$ i $C_2 = A\sin\alpha$,

odakle je:

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ i $tg\alpha = \frac{C_1}{C_2}$,



rešenje (13), odnosno (16), može se napisati u obliku:

$$\boxed{\varphi(t) = A\cos(\omega t - \alpha)} \qquad (17)$$

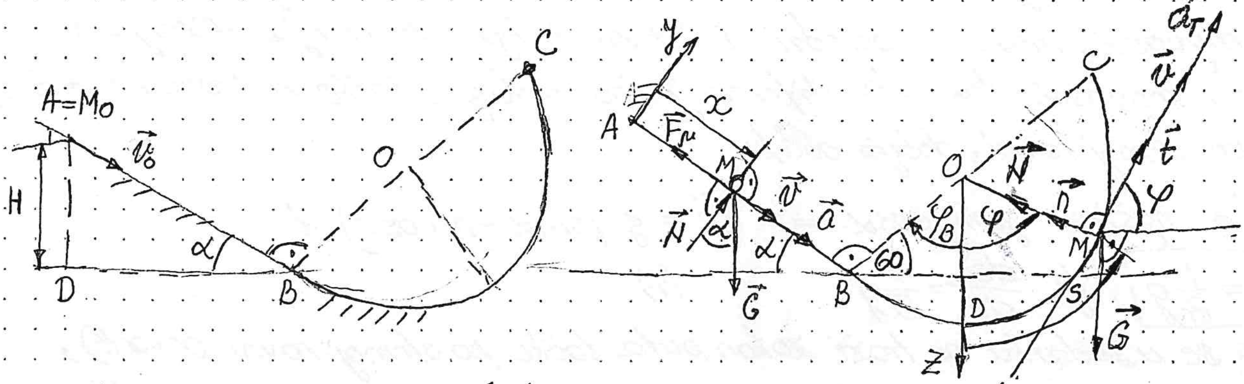
Kretanje opisano funkcijom (17) je takvo da se rastojanje tačke od neke nepokretne tačke periodično povećava i smanjuje. Takvo kretanje naziva se oscilatorno.

Vreme koje protekne između dva uzastopna prolaska tačke kroz isti položaj, u istom smeru i istom brzinom predstavlja period oscilovanja i iznosi: $T = 2\pi/\omega \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Period oscilovanja ne zavisi od početnih uslova kretanja tačke, tj. klatna.

Napomena.- Tačka koja se kreće po glatkoj kružnici u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile Zemljine teže, naziva se matematičko klatno.

(5) U vertikalnoj ravni, niz hrapavu strmu ravan visine $\overline{AD}=H$ i nagibnog ugla $\alpha=30°$ prema horizontali kreće se tačka M mase m, iz položaja A početnom brzinom intenziteta v_0. Strma ravan u tački B prelazi u glatki polukružni luk poluprečnika $R=H\sqrt{3}$ pri čemu je pravac BOC upravan na AB. Koliku početnu brzinu treba saopštiti tački M da bi ona stigla u tačku C? Koeficijent trenja klizanja između tačke M i hrapave strme ravni je $\mu=\sqrt{3}/4$



Kretanje tačke M u vertikalnoj ravni po vezi ABC sastoji se od faze:
1.- kretanja tačke po hrapavoj strmoj ravni
2.- kretanja tačke po glatkoj kružnoj vezi.
U prvoj fazi linija putanje tačke je prava linija AB, pa će kretanje tačke po njoj biti poznato ako je poznat zakon puta tačke $x=x(t)$, gde je x pravolinijska koordinata tačka M koja se meri od njenog početnog položaja $A=M_0$ do njenog položaja M u trenutku t na strmoj ravni, a duž strme ravni. Brzina tačke M je $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}$, a ubrzanje $\vec{a}=\ddot{x}\vec{i}$. Na tačku M, nakon uklanjanja veze (strme hrapave ravni) deluje, pored sile teže $\vec{G}$, kao aktivne sile, i reakcija ove veze $\vec{R}$. Reakcija hrapave strme ravni, $\vec{R}$, sastoji se od dve komponente:
- normalne komponente $\vec{N}$ koja je upravna na trag strme ravni AB, a smer suprotan od smera onog pravca u kome tačka, zbog veze, ne može da se pomera (smer sile $\vec{N}$ je u ovom slučaju suprotan od smera ose Ay koja je upravna na strmu ravan, tj. osu Ax koja je vezana za strmu ravan i $\vec{N}\perp\vec{v}$)
- sile trenja klizanja $\vec{F}_\mu$ koja leži u tangentnoj ravni na vezu u položaju M tačke na vezi i koja ima pravac brzine $\vec{v}$ tačke M, ali suprotan smer od $\vec{v}$ u posmatranom trenutku t (sila $\vec{F}_\mu$ je upravna $\vec{N}$); intenzitet sile trenja klizanja, F_μ, kao intenzitet Kulonovog, suvog trenja je: $F_\mu=\mu N$, gde je μ dinamički koeficijent trenja čija je vrednost tokom kretanja tačke

približno konstantno i nešto manja od vrednosti statičkog koeficijenta trenja μ_0.

Zakon kretanja tačke u vektorskom obliku u prvoj fazi kretanja tačke je:

$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$. (1)

Projektovanjem leve i desne strane ove jednačine na ose DKS Axy dobijaju se jednačine:

$m\ddot{x} = +mg\sin\alpha - F_\mu$ (2)

i $0 = N - mg\cos\alpha$ (3)

Nakon određivanja intenziteta N normalne komponente reakcije $\vec{N}$ iz (3): $N = mg\cos\alpha$, može se odrediti i intenzitet F_μ sile trenja klizanja: $F_\mu = \mu mg\cos\alpha$, tako da diferencijalna kretanja tačke u pravcu ose Ax, tj. po strmoj ravni, dobija oblik:

$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ i

$\boxed{\ddot{x} = \frac{1}{8}g}$ tj. $\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{8}g$ (4)

Kako se u zadatku ne traži zakon puta tačke po strmoj ravni $x = x(t)$, već samo brzina tačke na kraju prve faze, tj. kada tačka stigne u položaj B strme ravni u kome je: $x_B = x_1 = x(t_1) = \overline{AB}$, gde je $\overline{AB} = \frac{AD}{\sin\alpha} = 2H$, potrebno naći zavisnost brzine tačke $v = \dot{x}$ od veličine položaj tačke na strmoj ravni, koordinate x tačke, tj. funkciju: $\dot{x} = \dot{x}(x)$. U tom cilju izvršiće se transformacija izvoda $d\dot{x}/dt$ u izvod $d\dot{x}/dx$ na sledeći način:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x},$$

tako da jednačina (4) postaje dif. jednačina prvog reda po funkciji $\dot{x} = \dot{x}(x)$:

$$\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \frac{1}{8}g \Rightarrow \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{8}g\,dx$$

čiji je prvi integral:

$$\int_{\dot{x}(0)=v_0}^{\dot{x}=v(x)} \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{8}g\int_{x(0)=0}^{x} dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{8}gx \Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + \frac{1}{4}gx} \quad (5)$$

Iz (5) sledi da je u tački B strme ravni, $x_B = 2H$, brzina tačke M:

$$v_B^2 = v^2(x_B = 2H) \Rightarrow \boxed{v_B^2 = v_0^2 + \frac{1}{2}gH} \quad (6)$$

Ova brzina predstavlja početnu brzinu tačke M za drugu fazu njenog kretanja. Položaj tačke na glatkoj kružnoj vezi biće određen uglom φ koji se meri od vertikalne ose Oz do pravca OM (φ - centralni ugao kružnice po kojoj se tačka kreće). Lučna koordinata tačke u položaju M je:

$s = \overset{\frown}{DM} = R\varphi$, gde je D tačka preseka ose Oz i kružnice.

Brzina v tačke i njeno tangentno ubrzanje a_T u položaju M tačke su:

$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = v/R$ (7)

i $a_T = \dot{v} = R\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \dot{v}/R$,

dok je njeno normalno ubrzanje a_N:

$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_N = R\dot{\varphi}^2$

Na početku druge faze, kada je tačka M u tački B kružnice, je:

$\boxed{\varphi_B} = -30^\circ$ i $\boxed{v_B^2} = v_0^2 + \frac{1}{2}gH$ (8)

Na tačku M u ovoj fazi, pored sile Zemljine teže $\vec{G}$, deluje i reakcija glatke kružne veze $\vec{N}$. Reakcija veze $\vec{N}$, kao reakcija idealne veze ima pravac normale na tangentnu ravan na kružnu vezu u tački M veze, tj. na njen trag, osu tangente Mt na kružnicu ($\vec{N} \perp \vec{v}$). Smer sile $\vec{N}$ je ka centru kružne veze, tački O, zbog toga što je veza zadržavajuća samo s jedne, „unutrašnje" strane (jednostrano zadržavajuća veza).

Zakon kretanja tačke druge faze u vektorskom obliku je:

$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}$ (9)

pa su Ojlerove diferencijalne jednačine:

$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g\sin\varphi$ (10)

$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\varphi$ (11)

Zakon kretanja tačke po trajektoriji $\varphi = \varphi(t)$, odnosno $s = s(t)$, dobija se iz (10). Prvi integral ove jednačine, kao i u prethodnom zadatku je funkcija koja predstavlja zakon promene brzine ~~brzine~~ tačke v od veličine položaja tačke na veži, ugla φ: $v = v(\varphi)$. Kako je:

$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\dot{\varphi}$ i, prema (7), $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\frac{v}{R}$, to jednačina (10) dobija oblik:

$\frac{v\,dv}{d\varphi} = -gR\sin\varphi$

pa je njen integral:

$v\,dv = -gR\sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow \int_{v_B}^{v=v(\varphi)} v\,dv = -gR\int_{\varphi_B=-30^\circ}^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_B^2}{2} = gR(\cos\varphi - \cos(-30))$

odnosno:

$v^2 = v_B^2 - gR(\sqrt{3} - 2\cos\varphi)$ i $v^2 = (v_0^2 + \frac{1}{2}gH) - gH\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2\cos\varphi)$

tj. $\boxed{v^2 = v_0^2 - \frac{5}{2}gH + 2\sqrt{3}\,gH\cos\varphi}$ (12)

Da bi tačka M stigla do položaja C na kružnoj veži, kada je: $\varphi_C = \pi - 30^\circ$, brzina tačke u tom položaju mora biti: $v_C^2 \geq 0$, što znači da mora biti zadovoljen uslov:

$v_C^2 = v_0^2 - \frac{5}{2}gH + 2\sqrt{3}\,gH\cos(\pi - 30) \geq 0$,

tj. $v_0^2 - \frac{11}{2}gH \geq 0$,

što znači da početna brzina tačke v_0 mora biti $\boxed{v_0^2 \geq \frac{11}{2}gH}$ (13)

Za $v_0^2=\frac{11}{2}gH$ brzina tačke u položaju C jednaka je: $v_C=0$.

Pored ovog uslova, reakcija kružne veze N mora biti: $N\geq 0$, tj. mora biti:

$$N=\frac{mv^2}{R}+mg\cos\varphi\geq 0\,,\quad za\ -30°\leq\varphi\leq\pi-30°. \qquad (14)$$

Zamenom (12) u (14) dobija se:

$$N=\frac{m}{H\sqrt{3}}\left(v_0^2-\frac{5}{2}gH+2\sqrt{3}gH\cos\varphi\right)+mg\cos\varphi\geq 0, \qquad (15)$$

Nakon sređivanja nejednačina (15) glasi:

$$\boxed{v_0^2\geq\frac{5}{2}gH-3\sqrt{3}gH\cos\varphi}\,,\quad za\ -30°\leq\varphi\leq\pi-30°. \qquad (16)$$

Najveća vrednost desne strane nejednačine (16) je za $\varphi_C=\pi-30°$, jer je tada $\cos\varphi_C=\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, što iznosi $\boxed{7gH}$. Početna brzina v_0^2 mora biti veća od najveće vrednosti desne strane nejednačine (16), tj. mora biti:

$$\boxed{v_0^2\geq 7gH} \qquad (18)$$

Upoređujući uslove (13) i (18), a s obzirom da je $\frac{11}{2}gH<7gH$, konačno sledi da početna brzina tačke mora biti:

$$\boxed{v_0^2\geq 7gH}$$

Intenzitet brzine tačke u položaju C za $v_0^2=7gH$ prema (12) je:

$$v_C^2=v_0^2-\frac{5}{2}gH+2\sqrt{3}gH\cos(\pi-30),$$

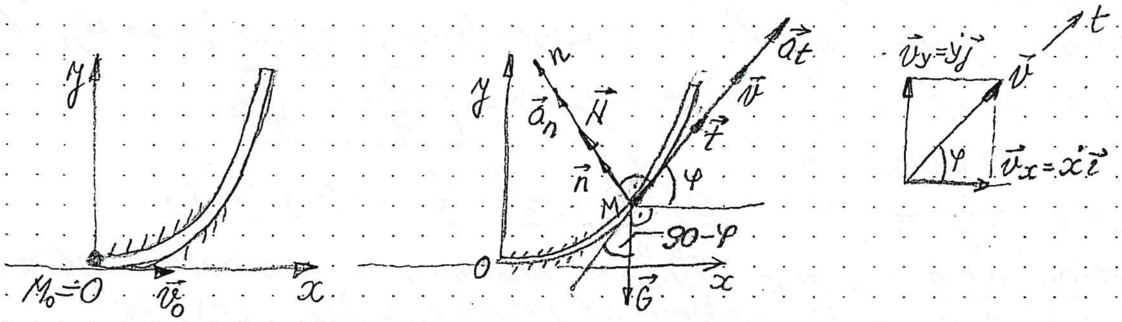
tj.:

$$\boxed{v_C^2=\frac{3}{2}gH},$$

a reakcija veze:

$$N_C=\frac{mv_C^2}{R}+mg\cos\varphi_C=\frac{m}{H\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}gH-mg\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{N_C=0}$$

⑥ Glatka cev savijena u obliku parabole $y=x^2$ stoji u vertikalnoj ravni. U cev se, u tački $O(0,0)$ (temenu parabole) ubacuje kuglica M mase m brzinom intenziteta v_0. Odrediti reakciju cevi u položaju $A(\sqrt{2}, y_A)$. Osa Oy je orjentisana vertikalno naviše



Na tačku nakon oslobođanja od veze (cevi oblika parabole) deluju: sila zemljine teže $\vec{G}$ i reakcija idealno glatke cevi (površi) $\vec{N}$. Diferencijalna jednačina kretanja kuglice M u vektorskom obliku je:

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{G}. \qquad (1)$$

Pošto je poznata linija putanje tačke, za kuglicu u proizvoljnom položaju M biće vezan prirodan triedar. Smer ose tangente (ort $\vec{t}$) je u smeru kretanja tačke, a smer ose glavne normale (ort $\vec{n}$) je ka centru krivine krive $y=x^2$ u tački M krive. Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja kuglice (diferencijalne jednačine kretanja kuglice u prirodnom triedru), s obzirom na (1) su:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi \qquad (2)$$

i

$$\frac{mv^2}{R_K} = N - mg\cos\varphi. \qquad (3)$$

U jednačina (2) i (3) ugao φ predstavlja ugao koji osa tangente (u tački M parabole) gradi sa horizontalnom osom Ox, odnosno, ugao koji vektor brzine $\vec{v}$ kuglice u trenutku t gradi sa osom Ox (smer vektora $\vec{v}$ se poklapa smerom ose tangente u tački M krive). Ako vektor brzine kuglice $\vec{v}$ razložimo na međusobno upravne komponente $\vec{v}_x = \dot{x}\vec{i}$ i $\vec{v}_y = \dot{y}\vec{j}$, tada, iz trougla brzina sledi da je:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\dot{y}}{v}}, \quad \boxed{\cos\varphi = \frac{\dot{x}}{v}} \quad i \quad tg\varphi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \Rightarrow tg\varphi = \frac{dy}{dx}, \; tj. \; \boxed{tg\varphi = y'}.$$

Takođe, treba imati u vidu da se poluprečnik krivine krive u tački $M(x,y)$ krive može, kada je poznata jednačina krive linije u Dekartovom koordinatnom sistemu Oxy ($y=y(x)$), odrediti po formuli:

$$R_K = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}.$$

Za parabolu $y=x^2$ je:

$$y' = 2x \; i \; y'' = 2,$$

pa je:

$$tg\varphi = y' = 2x, \quad R_K = \frac{[1+4x^2]^{3/2}}{2} \quad i \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

$$(\sin\varphi = tg\varphi/\sqrt{1+tg^2\varphi})$$

Zakon promene brzine v kuglice u vremenu, odnosno, sa promenom položaja kuglice na vezi, dobija se iz jednačine (2). U tom cilju potrebno je izvod $\frac{dv}{dt}$ na levoj strani te jednačine transformisati na sledeći način:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\dot{y}}, \qquad (4)$$

Jednačina (2) nakon podele leve i desne strane sa m, a s obzirom (4), glasi:

$$\frac{dv}{dy}\dot{y}=-g\sin\varphi \Rightarrow \frac{dv}{dy}v\sin\varphi=-g\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dy}v=-g};$$

koja nakon integracije:

$$v\,dv=-g\,dy \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv=-g\int_{y_0=0}^{y} dy \Rightarrow \frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=-g(y-y_0),$$

daje zakon promene brzine kuglice sa promenom y koordinate kuglice:

$$\boxed{v^2=v_0^2-2gy} \rightarrow \text{prvi integral dif. jed. kretanja (2)} \qquad (5)$$

Brzina kuglice u položaju $A(\sqrt{2}; y_A)$ je:

$$v_A^2=v_0^2-2gy_A, \text{ gde je: } y_A=x_A^2=2,$$

tako da je: $\boxed{v_A^2=v_0^2-4g}$ za $v_0^2 \geq 4g$ (6)

Sada se iz jednačine (3) može odrediti zakon promene reakcije veze N u funkciji x koordinate kuglice, tj. funkciju $N=N(x)$:

$$N=\frac{mv^2}{R_K}+mg\cos\varphi \Rightarrow \boxed{N}=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}mv^2+mg\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

tj:

$$N=\frac{2m(v_0^2-2gx^2)}{\sqrt{(1+4x^2)^3}}+\frac{mg}{\sqrt{1+4x^2}}$$

U položaju A kada je $x_A=\sqrt{2}$ reakcija veze N_A iznosi:

$$\boxed{N_A}=m\frac{2v_0^2+g}{27}$$

<u>Napomena</u>.- Cev predstavlja dvostrano zadržavajuću vezu. Kuglica može da naleže i na unutrašnju i na spoljašnju stranu cevi, što znači da smer reakcije veze $\vec{N}$ u posmatranom položaju kuglice na vezi, može biti ili ka centru krivine krive cevi ili suprotnog smera, što zavisi od aktivnih sila koje deluju na kuglicu.

Klasifikacija veza

Vezana tačka M je tačka koja u prostoru (3D-euklidskom) ne može da zauzme bilo koji položaj, a u dozvoljenom položaju ne može da ima bilo koju brzinu. Razlog za to je u činjenici da je tačka M u kontaktu sa drugim objektom, vezom, koji ograničava njeno stanje kretanje, bez obzira koje aktivne sile deluju na nju. Kako su položaji i brzine vezane tačke ograničeni, to veličine koje određuju položaj i brzine te tačke (kao slobodne) u odnosu na referentni objekat ne mogu imati bilo kakve vrednosti, već moraju da zadovolje dopunska ograničenja u formi jednačina i nejednačina. Ove jednačine, odnosno, nejednačine predstavljaju analitičke modele veza i u tom smislu dalje ćemo pod vezama podrazumevati upravo njihove analitičke modele.

Veze koje se izražavaju u formi jednačina nazivaju se zadržavajuće veze. U fizičkom smislu to su veze koje tačka M tokom kretanja u posmatranom intervalu vremena ne napušta. Najjednostavniji oblik zadržavajuće veze je $\boxed{f(\vec{r})=0}$, odnosno, $\boxed{f(x,y,z)=0}$, ako se kretanje tačke M posmatra u odnosu nepokretan DKS $Oxyz$ i gde su x, y i z odgovarajuće koordinate ove tačke kao slobodne. Ovakva veza ne zavisi eksplicitno od vremena i ograničava samo položaj tačke M u prostoru, jer ograničava vrednosti veličina položaja (koordinate tačke M u odnosu na, npr., DKS $Oxyz$), pa se zbog toga naziva stacionarna geometrijska (integrabilna) zadržavajuća veza. (Primer: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$)
U smislu analitičke geometrije ovakva jednačina predstavlja jednačinu nepokretne površi po kojoj se tačka M kreće.

Nestacionarna geometrijska zadržavajuća veza je geometrijska veza koja eksplicitno zavisi od vremena:
$\boxed{f(t,\vec{r})=0}$, odnosno, $\boxed{f(t,x,y,z)=0}$.
Ovakva jednačina predstavlja jednačinu površi koja se menja u vremenu, tako što se i sama kreće ili deformiše u prostoru. (Primer: $x^2+y^2+z^2-R^2(t)=0$).
Ove veze ne ograničavaju eksplicitno vrednosti veličina koje određuju brzinu tačke: $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$, odnosno, $\vec{v}=\{\dot{x},\dot{y},\dot{z}\}$.

Veze koje eksplicitno ograničavaju brzinu $\vec{v}$ tačke, tj vrednosti njenih projekcija na ose odgovarajućeg koordinatnog sistema (DKS $Oxyz$), nazivaju se kinematsk (diferencijalne). Jednačina zadržavajuće kinematske veze u najopštijem obliku glasi: $\boxed{f(t,\vec{r},\vec{v})=0}$, odnosno, $\boxed{f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0}$. Ovakva jednačina je neintegrabilna, što znači da funkcija $f=f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ ne predstavlja izvod po vremenu neke funkcije $\phi=\phi(t,x,y,z)$, tj:
$f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \neq \frac{d}{dt}\phi(t,x,y,z)$. Ako je, pak, $f=\frac{d}{dt}\phi(t,x,y,z)$, to bi se kinematska veza mogla svesti na geometrijsku: $\phi(t,x,y,z)-C=0$ i

predstavljala bi kvazikinematsku vezu. Primeri:
1.- kotrljanje bez klizanja kugle po, npr., nepokretnoj površi
2.- klizaljke, roleri.

Veza čija je analitička forma oblika nejednačine predstavlja nezadržavajuću vezu. Ove veze tačka može tokom kretanja da napusti i da nastavi da se kreće kao slobodna, a u ograničenom prostoru.
(Primer: $f(t,\vec{r}) \gtreqless 0$ - nestacionarna geometrijska nezadržavajuća veza; $x^2+y^2+z^2-R^2(t) \geq 0$)

U nastavku se bavimo samo stacionarnim, geometrijskim, zadržavajućim vezama. Sve veze, sa čijim smo se mehaničkim modelima susretali u klasičnoj mehanici (nepokretni cilindrični zglob, nepokretni sferni zglob, laki kruti štap, lako nerastegljivo uže, kruta podloga) predstavljaju veze navedenog tipa, jer eksplicitno ograničavaju položaje kontaktnih tačaka tela i veze u opštem slučaju ($x, y i z$ u jednačinama veze, u ovom slučaju su koordinate kontaktne tačke tela sa odgovarajućom vezom). Jedna veza, npr. sferni zglob, može se analitički predstaviti i sa više jednačina navedenog tipa.

Elementarno stvarno pomeranje i brzina tačke M na vezi

$f(x,y,z)=0$. - Kao što je napred rečeno, jednačina geometrijske, stacionarne, zadržavajuće veze, $f(x,y,z)=0$ predstavlja jednačinu površi u 3D-euklidskom prostoru, a u odnosu na nepokretan DKS $Oxyz$, po kojoj se kreće tačka M mase m, a pod dejstvom sistema aktivnih sila.
Pod elementarnim stvarnim pomeranje tačke, $d\vec{r}$, podrazumeva se pomeranje tačke po vezi (ukoliko tačka nije slobodna) na bilo kom beskonačno malom intervalu vremena $[t, t_1=t+dt]$, a pod dejstvom aktivnih sila.
Neka u trenutku t tačka zauzima na vezi položaj M:

$$t:\ M(x,y,z),\quad x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \Rightarrow \vec{r}=\{x(t), y(t), z(t)\}$$
$$i\ f(x,y,z)=0$$

U trenutku $t_1=t+dt$ tačka je, pod dejstvom aktivnih sila, prešla u položaj na vezi M_1 koji se nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M na vezi, tako da važi:

$$t_1=t+dt:\ M_1(x_1,y_1,z_1),\quad \left.\begin{array}{l} x_1=x(t+dt)\approx x+dx \\ y_1=y(t+dt)\approx y+dy \\ z_1=z(t+dt)\approx z+dz \end{array}\right\} \vec{r}_1=\vec{r}(t+dt)\approx\vec{r}(t)+d\vec{r}$$

$$i\ f(x_1,y_1,z_1)=0 \Rightarrow f(x+dx, y+dy, z+dz)=0.$$

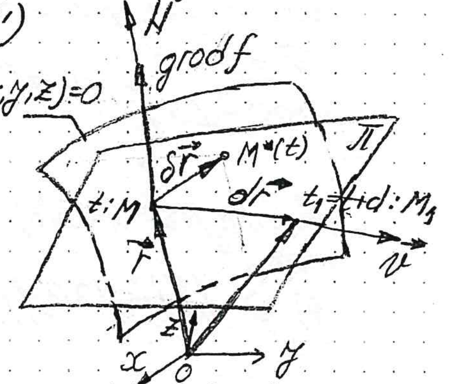
Pošto se položaj M_1 tačke u trenutku $t_1=t+dt$ nalazi u beskonačno maloj okolini položaj M u trenutku t na vezi, to se, do malih veličina prvog reda, može smatrati da se položaji M i M_1 nalaze u tangentnoj ravni π na površ $f(x,y,z)=0$ u tački M površi. Dalje, ako su M i M_1 u ravni π, tada je i vektor elementarnog stvarnog pomeranja tačke po vezi na intervalu vremena $[t, t_1=t+dt]$:

$\overrightarrow{MM_1}=d\vec{r}$, $d\vec{r} \approx \vec{r}(t+dt)-\vec{r}(t)$

$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$, takođe u ravni π.

Kako je položaj ravni π, kao ravni tangentnoj na površ $f(x,y,z)=0$ u tački $M(x,y,z)$ površi, određen pravcem normale na površ, tj. pravcem vektora $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ u tački M, to važi:

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{grad} f \perp \pi \\ d\vec{r} \in \pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{grad} f \perp d\vec{r} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\operatorname{grad} f \cdot d\vec{r}=0}}_{(1)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0}}_{(1')}$$



Vodeći računa o tome da je:

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r}=\vec{v}dt,\ dt>0,\quad \vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$

to se jednačina (1), odnosno (1'), može napisati u obliku:

$$\underbrace{\boxed{\operatorname{grad} f \cdot \vec{v}=0}}_{(2)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0}}_{(2')},$$

što znači da je i vektor brzine tačke u posmatranom trenutku t u ravni π.

$\vec{v} \in \pi$, $\vec{v} \perp \operatorname{grad} f$.

Jednačina (2), odnosno (2'), pokazuje da geometrijska veza $f(x,y,z)=0$ na indirektan način ograničava brzinu tačke tokom njenog kretanja po toj vezi, tj. vrednosti projekcija vektora $\vec{v}$ na ose DKS $Oxyz$.

Geometrijska veza $f(x,y,z)=0$ ograničava i ubrzanje tačke $\vec{a}$ u svakom trenutku, a po jednačini:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} f)=0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(\operatorname{grad} f)=0 \qquad (3)$$

Reakcija idealno glatke površi $f(x,y,z)=0$. Elementarno virtuelno pomeranje tačke na vezi $f(x,y,z)$.

Neka tačka zauzima položaj $M(x,y,z)$ na površi $f(x,y,z)=0$ u nekom trenutku t. Uočimo virtuelni položaj tačke $M^*(x^*, y^*, z^*)$ na toj površi, vezi, koji odgovara tom istom trenutku t, a koji se nalazi u beskonačno maloj okolini prethodno uočenog položaja $M(x,y,z)$.

Pod elementarnim virtuelnim pomeranjem tačke u posmatranom trenutku t, $\delta\vec{r}$, podrazumeva se pomeranje tačke iz njenog položaja na vezi u posmatranom trenutku, u drugi, virtuelni, vezom dozvoljeni položaj koji odgovara tom istom trenutku t, pri čemu se ne razmatraju aktivne sile koje deluju na tačku. Elementarno virtuelno pomeranje tačke je geometrijski, a ne dinamički pojam. Pošto se položaj M tačke u trenutku t i njemu pridruženi virtuelni položaj M^* na površi, nalaze u tangentnoj ravni π na površ $f(x,y,z)=0$ u tački M površi, to se i bilo koji vektor elementarnog virtuelnog pomeranja u posmatranom trenutku t nalazi u ravni π: $\overrightarrow{MM^*} = \delta\vec{r} \in \pi$.

Postoji beskonačno mnogo virtuelnih položaja M^* tačke u odnosu na uočeni položaj M u trenutku t, pa postoji i beskonačno mnogo elementarnih virtuelnih pomeranja $\delta\vec{r}$ tačke po vezi u tom trenutku, ali sva leže u ravni π.

Reakcija idealne veze u bilo kom trenutku t upravna je na bilo koje elementarno virtuelno vezom dozvoljeno pomeranje tačke M (kontaktne tela) po vezi u tom trenutku. To znači da je reakcija idealno glatke površi $f(x,y,z)=0$ u pravcu vektora $\operatorname{grad} f$, jer je:

$$\left.\begin{array}{l}\delta\vec{r} \in \pi \\ \operatorname{grad} f \perp \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{grad} f \perp \delta\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{N} = \lambda(t)\operatorname{grad} f} \quad (4)$$

$$\boxed{\vec{N} = \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}} \quad (4')$$

Funkcija $\lambda = \lambda(t)$ u (4), odnosno, (4') predstavlja Lagranžev množitelj veze.

$$(4) \Rightarrow |\vec{N}| = |\lambda(t)||\operatorname{grad} f| = |\lambda(t)|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Lagranževe jednačine I vrste za slučaj kretanja tačke po idealno glatkoj nepokretnoj površi.-

Posmatra se kretanje tačke M mase m pod dejstvom sistema aktivnih sila čija je rezultanta $\vec{F}$, po zadatoj idealno glatkoj, stacionarnoj, geometrijskoj zadržavajućoj vezi čija je jednačina u odnosu na DKS $Oxyz$: $f(x,y,z)=0$ (1)

Nakon oslobađanja od veze, dejstvo veze na tačku M se zamenjuje reakcijom veze $\vec{N}$, koja ima pravac normale na površ u posmatranom položaju tačke, pa dif. jednačina kretanja tačke u vektorskom obliku glasi:

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}, \quad (2)$$

gde je: $\vec{N} = \lambda(t)\operatorname{grad} f = \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$. (3)

i $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ (4)

Diferencijalne jednačine kretanja tačke u DKS $Oxyz$ s obzirom na (2), (3) i (4), biće:

$$m\ddot{x} = X + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} \quad (5)$$

$$m\ddot{y} = Y + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} \quad (6)$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda(t)\,\partial f/\partial z \quad (7)$$

Diferencijalne jednačine (5), (6) i (7) nazivaju Lagranževe dif. jednačine prve vrste. Ovaj sistem od tri jednačine, zajedno sa jednačinom veze (1) obrazuje sistem od četiri jednačine iz kojeg se, za zadate početne uslove:

$t_0=0;\ x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0)$ (8)

$\dot{x}_0=\dot{x}(t_0),\ \dot{y}_0=\dot{y}(t_0),\ \dot{z}_0=\dot{z}(t_0)$, (9)

četiri nepoznate funkcije: konačne jednačine kretanja tačke u pravcima osa DKS: $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$ i Lagranžev množitelj veze $\lambda=\lambda(t)$.

Pri rešavanju sistema jednačina (5), (6), (7) i (1), kao pomoćne jednačine koriste se jednačina oblika:

$$\boxed{\frac{df}{dt}=0} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=0, \text{ odnosno, } \vec{v}\cdot \operatorname{grad} f=0 \qquad (10)$$

i jednačina

$$\boxed{\frac{d^2f}{dt^2}=0} \Leftrightarrow \ddot{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\ddot{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\ddot{z}\frac{\partial f}{\partial z}+\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}+\dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}+\dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}=0, \text{ odnosno,}$$

$$\vec{a}\cdot \operatorname{grad} f+\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\operatorname{grad} f=0 \qquad (11)$$

Takođe, pri zadavanju početnih uslova treba voditi računa da uslovi (8) budu u skladu sa jednačinom veze (1), tj. da važi:

$f(x_0, y_0, z_0)=0$,

a da uslovi (9), zajedno sa (8) zadovoljavaju jednačinu (11), tj. da važi:

$$\vec{v}_0\cdot \operatorname{grad} f\big|_{M_0}=0 \Rightarrow \dot{x}_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\dot{y}_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\dot{z}_0\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0=0.$$

<u>Napomena.</u> — Veza $f(x,y,z)=0$ smanjuje broj stepeni slobode slobodne tačke ($n=3$) za jedan, tako da je broj stepeni slobode tačke čije je kretanje ograničeno navedenom vezom: $n=2$. Naime, iz jednačine $f(x,y,z)=0$ može se odrediti jedna od koordinata tačke M u DKS Oxyz u funkciji preostale dve, npr.:

$f(x,y,z)=0 \Rightarrow z=g(x,y)$.

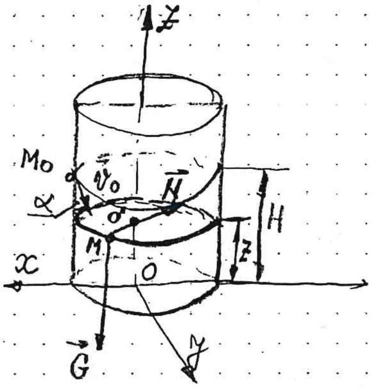
Dakle, vrednosti parametara x i y se mogu slobodno varirati (menjati), dok je vrednost parametra z određena tim vrednostima. Na osnovu toga sledi da posmatrana vezana tačka može da vrši dva nezavisna kretanja koja su u pravcima bilo koje dve ose DKS Oxyz.

<u>Dodatne lekcije</u>

1.- Lagranževe jednačine prve vrste za slučaj kretanja tačke po hrapavoj površi

2.- Lagranževe jednačine prve vrste za slučaj kretanja tačke po glatkoj liniji u 3D-euklidskom prostoru

Primer. – Po unutrašnjoj površi glatkog cilindra, poluprečnika osnove R kreće se teška tačka M mase m. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(R,0;H)$ i imala početnu brzinu intenziteta v_0 usmerenu na dole, tako da sa izvodnicom cilindra gradi ugao $\alpha=60°$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.



Jednačina prave kružne cilindrične površi čija je osa osa Oz DKS $Oxyz$ je:

$$x^2+y^2-R^2=0. \qquad (1)$$

Izvodnice ove površi paralelne osi Oz, pa je njen presek sa bilo kojom ravni paralelnoj sa ravni Oxy: $z=Const$, kružnica sa centrom na osi Oz (tačka O') i poluprečnika R, u toj ravni.

Upoređivanjem (1) sa jednačinom površi u DKS $Oxyz$: $f(x,y,z)=0$, sledi da je funkcija veze $f=f(x,y,z)$:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-R^2, \qquad (2)$$

pa je reakcija veze, sila $\vec{N}$, koja deluje u proizvoljnom položaju $M(x,y,z)$ tačke na ovoj površi, na tačku:

$$\vec{N}=\lambda \operatorname{grad} f \Rightarrow \vec{N}=2\lambda(t)x\vec{i}+2\lambda(t)y\vec{j} \qquad (3)$$

Odgovarajuće diferencijalne jednačine kretanja tačke M su:

$$m\vec{a}=\vec{N}+\vec{G} \Rightarrow m\vec{a}=\lambda \operatorname{grad} f+m\vec{g} \Rightarrow m\ddot{x}=2\lambda(t)x \qquad (4)$$

$$m\ddot{y}=2\lambda(t)y \qquad (5)$$

$$m\ddot{z}=-mg \qquad (6)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Oz nije funkcija Lagranžeovog množitelja veze $\lambda=\lambda(t)$ i može se integraliti nezavisno od dif. jednačina (4) i (5).

Za početne uslove tačke M u odnosu na osu Oz: $z(0)=H$ i $\dot{z}(0)=v_{0z}=-v_0\cos\alpha$, rešenje jednačine (6) glasi:

$$z=z(t)=-\frac{gt^2}{2}-tv_0\cos\alpha+H \qquad (6')$$

Rešavanje sistema jednačina (1), (4) i (5) zajedno sa pomoćnim jednačinama:

$$\frac{df}{dt}=0 \Rightarrow 2x\dot{x}+2y\dot{y}=0 \Rightarrow x\dot{x}+y\dot{y}=0 \qquad (7)$$

$$i \quad \frac{d^2f}{dt^2}=0 \Rightarrow 2(x\ddot{x}+y\ddot{y}+\dot{y}^2+\dot{x}^2)=0 \Rightarrow x\ddot{x}+y\ddot{y}=-(\dot{y}^2+\dot{x}^2) \qquad (8)$$

svodi se na dva koraka.

U prvom koraku jednačinu (4) treba pomnožiti sa x, jednačinu (5) sa y i tako dobijene jednačine sabrati:

$$(4)\cdot x+(5)\cdot y \Rightarrow m(x\ddot{x}+y\ddot{y})=2\lambda(t)(x^2+y^2). \qquad (9)$$

Kako je iz (1): $x^2+y^2=R^2$, a iz (8) $x\ddot{x}+y\ddot{y}=-(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$, jednačina (9) dobija oblik:

$$\boxed{\dot{x}^2+\dot{y}^2=-\frac{2\lambda(t)}{m}R^2} \qquad (10)$$

U drugom koraku jednačinu (4) treba pomnožiti sa $\dot{x}$, jednačinu (5) sa $\dot{y}$ i tako dobijene jednačine sabrati:

$$(4)\cdot\dot{x}+(5)\dot{y} \Rightarrow m(\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}) = 2\lambda(t)(\dot{x}x+y\dot{y}) \qquad (11)$$

Kako je prema (7): $\dot{x}x+\dot{y}y=0$ i kako je:

$$\ddot{x}\dot{x} = \frac{d\dot{x}\cdot\dot{x}}{dt} \Rightarrow \boxed{\ddot{x}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dt^2}}$$

i analogno tome: $\boxed{\ddot{y}\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{y}^2}{dt}}$,

to se (11) može napisati u obliku:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=0 \Rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2 = const \qquad (12)$$

Veličina $\dot{x}^2+\dot{y}^2$ predstavlja $\overbrace{\text{projekcije}}^{\text{kvadrat intenziteta}}$ vektora brzine $\vec{v}$ tačke M na ravan upravnu na osu Oz (ravan Oxy), $\vec{v}_{xy}$, tj. : $|\vec{v}_{xy}|^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2$, pa iz (12) sledi:

$$|\vec{v}_{xy}|^2 = const \Rightarrow |\vec{v}_{xy}|^2 = |\vec{v}_{0xy}|^2 \text{ i } |\vec{v}_{0xy}| = v_0 \sin\alpha,$$

tj: $\boxed{\dot{x}^2+\dot{y}^2 = v_0^2\sin^2\alpha}$ (13)

Na osnovu jednačina (10) i (13) dobija se:

$$-2\frac{\lambda(t)}{m}R^2 = v_0^2\sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{\lambda(t) = -\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2R^2}} \qquad (14)$$

Pošto je određena funkcija $\lambda=\lambda(t)$ ($\lambda(t)=const$) diferencijalne jednačine kretanja tačke u pravcima osa Ox i Oy postaju:

$$(4) \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{R^2}x \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x = 0, \qquad (15)$$

$$(5) \Rightarrow m\ddot{y} = -\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{R^2}y \Rightarrow \ddot{y}+\omega^2 y = 0, \qquad (16)$$

gde je: $\boxed{\omega^2 = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{R^2}} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_0\sin\alpha}{R}}$

Opšta rešenja (15) i (16) su:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \quad \text{i} \quad y = C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t,$$

a partikularna rešenja za početne uslove:

$x_0 = x(0) = R$ i $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = 0$

i $y_0 = y(0) = R$ i $\dot{y}_0 = \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha$,

$\boxed{x(t) = R\cos\omega t}$ i $y = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\sin\omega t$, tj: $\boxed{y = R\sin\omega t}$

Pogledati zadatak 3.3 i zadatak 3.5 iz knjige „Mehanika - Dinamika tačke", Mitrović Z., Golubović Z., Simonović M.