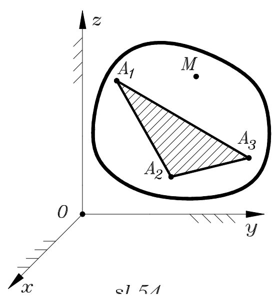
# Kinematika tela

## Osnovni pojmovi kinematike tela

Položaj tela u prostoru je određen ako je određen položaj svake njegove tačke. Za određivanje položaja tačaka tela koristi se izabrani koordinatni sistem. Koordinate svih tačaka tela nisu nezavisne. Veze između njih su, u ovom slučaju, nepromenljivo rastojanje. Umesto određivanja položaja svih tačaka tela, moguće je odrediti i položaj tela u odnosu na izabrani koordinatni sistem. Nezavisni parametari koji jednoznačno određuju položaj posmatranog tela u odnosu na izabrani koordinatni sistem nazivaju se generalisane koordinate. Najmanji broj nezavisnih generalisanih koordinata predstavlja broj stepeni slobode kretanja.




$$(x_M - x_1)^2 + (y_M - y_1)^2 + (z_M - z_1)^2 = \overline{A_1 M}^2,$$
$$(x_M - x_2)^2 + (y_M - y_2)^2 + (z_M - z_2)^2 = \overline{A_2 M}^2,$$
$$(x_M - x_3)^2 + (y_M - y_3)^2 + (z_M - z_3)^2 = \overline{A_3 M}^2.$$

Iz ovih jednačina mogu se odrediti koordinate $x_M$, $y_M$ i $z_M$, proizvoljno izabrane tačke *M*, zbog čega se kaže da je položaj tela u prostoru određen ako je poznat položaj bilo koje tri njegove nekolinearne tačke.

Međutim, svih devet koordinata uočenih nekolinearnih tačaka $A_1$, $A_2$ i $A_3$ nisu međusobno nezavisne jer se između njih mogu uspostaviti relacije koje govore o nepromenljivosti uzajamnog rastojanja, tj.

$$\begin{aligned}\overline{A_1 A_2}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,\\ \overline{A_2 A_3}^2 &= (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2,\\ \overline{A_3 A_1}^2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2.\end{aligned} \tag{3.1}$$

To znači da je broj nezavisnih koordinata koje određuju položaj posmatranog tela dat sa *9-3=6*.

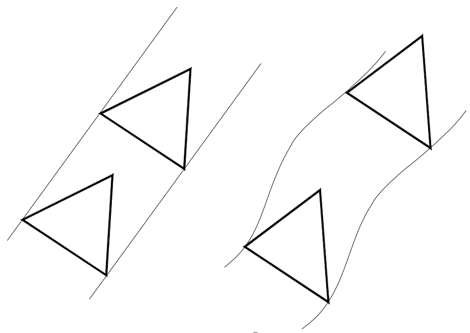
Osnovni zadaci kinematike tela su:

1.) određivanje kretanja tela u odnosu na izabrani koordinatni sistem;
2.) proučavanje kinematičkih karakteristika tela i
3.) određivanje kretanja i proučavanje karakteristika kretanja pojedinih tačaka tela.

U kinematici tela posebno će biti razmatrane sledeće vrste kretanja:

- translatorno,
- obrtanje oko nepokretne ose,
- ravno,
- obrtanje oko nepokretne tačke (sferno) i
- opšte kretanje.

## Translatorno kretanje tela



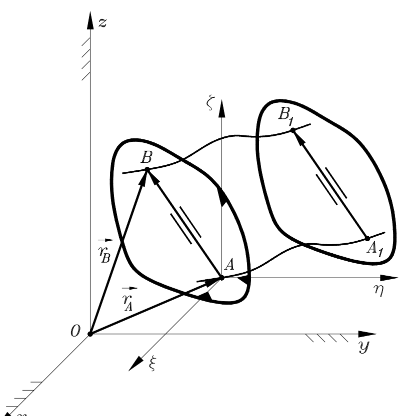

Telo vrši translatorno kretanje ako proizvoljno izabrana duž, koja spaja dve tačke tela, u svakom trenutku ostaje paralelna sama sebi. Razlikuju se:

a) pravolinijska translacija i

b) krivolinijska translacija..

## Određivanje kretanja i karakteristika kretanja pojedinih tačaka tela koje vrši translatorno kretanje

Neka su uočene dve proizvoljne tačke $A$ i $B$ posmatranog tela koje vrši translatorno kretanje. Njihovi položaji, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$, određeni su vektorima položaja




$$\vec{r}_A(t) = x_A(t)\vec{i} + y_A(t)\vec{j} + z_A(t)\vec{k},$$

$$\vec{r}_B(t) = x_B(t)\vec{i} + y_B(t)\vec{j} + z_B(t)\vec{k},$$

Položaj tačke $B$ u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$, koji je kruto vezan za telo u proizvoljnoj tački $A$ izabranoj za pol, određen je vektorom $\overrightarrow{AB} = \xi_B\vec{i} + \eta_B\vec{j} + \zeta_B\vec{k}$, pa je

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB},$$

$$x_B = x_A(t) + \xi_B$$
$$y_B = y_A(t) + \eta_B \,.$$
$$z_B = z_A(t) + \zeta_B$$

Iz prethodnog proizilazi da su jednačine kretanja tela koje vrši translatorno kretanje u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ date sa

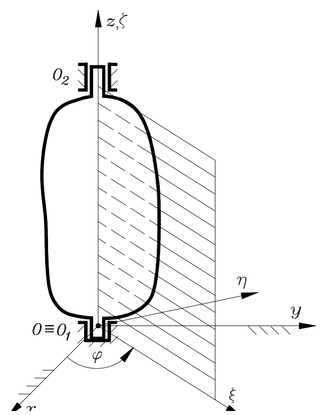
$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad z_A = z_A(t). \qquad (3.5)$$

Kinematičke karakteristike pojedinih tačaka tela koje vrši translatorno kretanje su

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A, \qquad \vec{V}_B = \vec{V}_A,$$
$$\dot{\vec{V}}_B = \dot{\vec{V}}_A, \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

## Obrtanje tela oko nepokretne ose

Telo vrši obrtanje (rotaciju) oko nepokretne ose ako su mu bar dve tačke nepomične tokom kretanja. Takođe, sve tačke tela koje se nalaze na orijentisanoj pravoj kroz te dve nepomične tačke ostaju nepomične u toku kretanja. Ta orijentisana prava naziva se osa obrtanja ili osa rotacije.




Položaj pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u bilo kom trenutku vremena određen je uglom $\varphi$ koji grade, na primer, nepokretna ravan *Oxz* i pokretna ravan $O\xi\zeta$. To znači da telo koje se obrće oko nepokretne ose ima jedan stepen slobode kretanja, pod uslovom da je osa obrtanja određena. Ovaj ugao se naziva ugao obrtanja. Ugao obrtanja može da se izrazi i preko broja obrtaja *N*, tj.

$$\varphi = 2\pi N .$$

Funkcionalna zavisnost

$$\varphi = \varphi( t ),$$

naziva se jednačina obrtanja tela oko nepokretne ose.

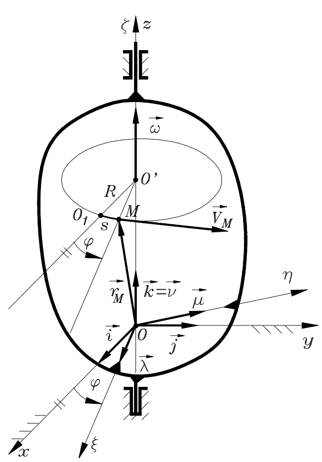
## Ugaona brzina tela koje se obrće oko nepokretne ose.

Ugaona brzina tela koje se obrće oko nepokretne ose karakteriše promenu ugla obrtanja. Uočavaju se dva položaja tela koji se razlikuju za konačan priraštaj ugla $\Delta\varphi$. Neka se telo iz položaja koji je određen uglom $\varphi$ u trenutku *t*, pomeri za vreme $\Delta t$ u položaj određen uglom $\varphi + \Delta\varphi$. Srednja ugaona brzina tela koje se obrće oko nepokretne ose *Oz* za posmatrani interval vremena $\Delta t$ određena je sa

$$( \omega_z )_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} .$$

Ugaona brzina tela u datom trenutku predstavlja graničnu vrednost srednje ugaone brzine kada posmatrani interval vremena $\Delta t$ teži nuli

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} , \qquad \omega_z = \dot{\varphi} .$$



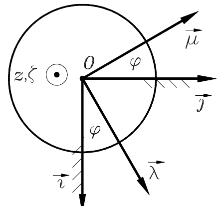

Ugaonoj brzini tela može se dati i vektorski smisao. Uočava se tačka *M* čiji je položaj

$$\vec{r}_M = \xi_M \vec{\lambda} + \eta_M \vec{\mu} + \zeta_M \vec{\nu} ,$$

Koristeći definiciju brzine tačke dobija se

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \xi_M \dot{\vec{\lambda}} + \eta_M \dot{\vec{\mu}} .$$

U cilju određivanja izvoda $\dot{\vec{\lambda}}$ i $\dot{\vec{\mu}}$ mogu se jedinični vektori $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$ pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ izraziti preko jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ nepokretnog koordinatnog sistema *Oxyz*




$$\vec{\lambda} = cos\varphi\,\vec{i} + sin\varphi\,\vec{j},$$
$$\vec{\mu} = -sin\varphi\,\vec{i} + cos\varphi\,\vec{j}.$$

Diferenciranjem po vremenu, sledi

$$\dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi}\,(-sin\varphi\,\vec{i} + cos\varphi\,\vec{j}),$$
$$\dot{\vec{\mu}} = -\dot{\varphi}\,(cos\varphi\,\vec{i} + sin\varphi\,\vec{j}).$$
$$\dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi}\vec{\mu}, \qquad \dot{\vec{\mu}} = -\dot{\varphi}\vec{\lambda}.$$

S druge strane, jedinični vektori $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$ mogu se korišćenjem definicije vektorskog proizvoda izraziti u obliku

$$\vec{\lambda} = \vec{\mu}\times\vec{\nu}, \qquad \vec{\mu} = \vec{\nu}\times\vec{\lambda}, \qquad \dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi}(\vec{\nu}\times\vec{\lambda}), \qquad \dot{\vec{\mu}} = \dot{\varphi}(\vec{\nu}\times\vec{\mu})$$
$$\vec{V} = \dot{\varphi}\vec{\nu}\times(\xi_M\vec{\lambda} + \eta_M\vec{\mu} + \zeta_M\vec{\nu})$$

Vektor $\dot{\varphi}\vec{\nu}$ predstavlja vektor ugaone brzine, tj.

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{\nu},$$

tako da se dobija Ojlerova formula za određivanje brzine tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose u obliku

$$\vec{V}_M = \vec{\omega}\times\vec{r}_M.$$

Izvodi jediničnih vektora mogu se napisati u obliku

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega}\times\vec{\lambda}, \qquad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega}\times\vec{\mu}.$$

## Brzina tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose

Brzina tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose može de se odredi i na sledeći način: neka je u početnom trenutku ($t_o = 0$) $\varphi_o = 0$, tj. pokretan koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ i nepokretan koordinatni sistem *Oxyz* u početnom trenutku se poklapaju. Ako je $O_1$ početak lučne koordinate *s* na toj poznatoj putanji tako da se porast lučne koordinate (pozitivan smer u tom koordinatnom sistemu) poklapa sa pozitivnim smerom računanja ugla $\varphi$, tada važi

$$s = \overset{\frown}{O_1M} = R\varphi(t), \quad V_T = \dot{s} = \frac{d}{dt}(R\varphi) = R\dot{\varphi}, \quad V_T = R\omega_z.$$

## Ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko nepokretne ose

Neka se telo iz položaja koji je određen uglom $\varphi$ u trenutku *t* pomeri za vreme $\Delta t$ u položaj određen uglom $\varphi + \Delta\varphi$. Srednje ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko nepokretne ose *Oz* za posmatrani interval vremena $\Delta t$ određeno je sa

$$(\varepsilon_z)_{sr} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t},$$

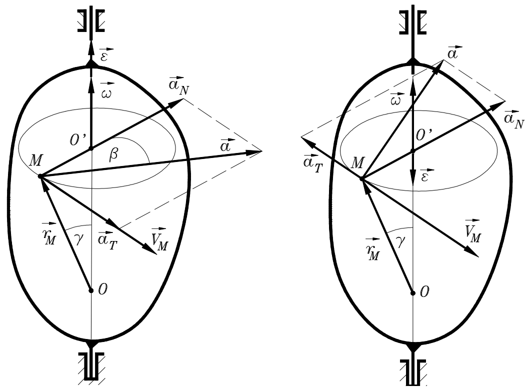
a ugaono ubrzanje tela u datom trenutku

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Vektor ugaonog ubrzanja tela koje se obrće oko nepokretne ose je

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{\nu} = \dot{\omega}_z\vec{\nu} = \varepsilon_z\vec{k}.$$

## Ubrzanje tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose



Ubrzanje tačke $M$ tela koje se obrće oko nepokretne ose može se odrediti na više načina. Ako je poznat zakon promene lučne koordinate, tangencijal–no ubrzanje tačke $M$ tela može se odrediti kao

$$a_T = \dot{V}_T = \frac{d}{dt}(R\omega_z) = R\varepsilon_z ,$$

$$|a_T| = R\varepsilon .$$

Normalno ubrzanje tačke $M$ tela može se odrediti kao

$$a_N = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 ,$$

a ukupno ubrzanje tačke $M$ tada je određeno sa

$$a_M = \sqrt{a_T^{\,2} + a_N^{\,2}} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} , \quad tg\beta = \frac{a_T}{a_N} = \frac{\varepsilon_z}{\omega_z^{\,2}} .$$

Ubrzanje tačke $M$ tela koje se obrće oko nepokretne ose može se dobiti i kao

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_M = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_M) , \qquad \vec{a}_M = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_M$$

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times \vec{V}_M , \qquad \vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M) .$$

$$\vec{a}_T = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M , \quad \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{V}_M = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M) ,$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_T + \vec{a}_N .$$