# НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

- Диференцирање: $F(x)$ – дато, $F'(x) = ?$

  нпр. $F(x) = \sin x \Rightarrow F'(x) = \cos x$

- Обрнути проблем – интеграција (тражење ф-је познатог извода):

  $f(x) = F'(x)$ – дато, $F(x) = ?$

  нпр. $F'(x) = \cos x \overset{?}{\Rightarrow} F(x) = \sin x$

  $F(x) = \sin x \Rightarrow F'(x) = \cos x$

  $F_1(x) = \sin x + 1 \Rightarrow F'(x) = \cos x$

  $F_C(x) = \sin x + C \Rightarrow F'(x) = \cos x$

- Ако је $F'(x) = f(x)$, онда је $F(x)$ примитивна функција ф-је $f(x)$.

- Ако је $F(x)$ једна примитивна ф-ја ф-је $f(x)$, онда су све примитивне ф-је ф-је $f(x)$ облика $F(x) + C$, где је $C \in \mathbb{R}$ произвољна константа

- Скуп свих примитивних ф-ја ф-је $f(x)$ означава се са $\int f(x)\,dx$ и зове се неодређени интеграл ф-је $f(x)$.

- Пишемо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

  нпр. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

- $\int$ – интегрални знак; $x$ – променљива интеграције;

  $f$ – подинтегрална ф-ја, интегранд;

  $f(x)\,dx$ – подинтегрални израз, елемент интеграције

## Таблица интеграла

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg x + C$

## Правила интеграције

- $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$
- $\left(\int f(x) dx\right)' = \frac{d}{dx}\left(\int f(x) dx\right) = f(x)$
- $\int d(F(x)) = F(x)$
- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \quad \alpha \neq 0$ – хомогеност
- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ – адитивност

• Напомена: $\int dx = x + C$; $\int 0\,dx = C$ (не 0)

1. $\int (6x^2 - 3x + 7)\,dx = 6\int x^2 dx - 3\int x\,dx + 7\int dx =$

$= 6\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 3\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 7(x + C_3) =$

$= 2x^3 + 6C_1 - \frac{3x^2}{2} - 3C_2 + 7x + 7C_3 = 2x^3 - \frac{3x^2}{2} + 7x + C$

мора написати на крају

2. $\int \left(2x^2 + \frac{3}{x} - \sin x\right) dx = \frac{2x^3}{3} + 3\ln|x| + \cos x + C$

3. $\int \left(\frac{1}{2}e^x - 2\cos x + 3x^{-1/2}\right) dx = \frac{1}{2}e^x - 2\sin x + 6\sqrt{x} + C$

4. $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x}\,dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C$

5. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^3+x^2-3x-3}{x^2}\,dx = \cancel{\frac{1}{3}\int \left(x^2+x-3-\frac{3}{x}\right)dx =}$

$\cancel{= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x - 3\ln|x|\right) + C} \quad = \frac{1}{3}\int \left(x + 1 - \frac{3}{x} - \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{= 3\cdot x^{-2}}\right) dx =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x - 3\ln|x| - 3\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

6. $\int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,dx = \int \frac{2 - x + 2x^{1/2} - x^{3/2}}{x^2}\,dx =$

$= \int \left(2x^{-2} - x^{-1} + 2x^{-3/2} - x^{-1/2}\right) dx =$

$= 2\,\frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + 2\,\frac{x^{-1/2}}{-1/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \cancel{-\frac{2}{x} - \ln|x| - 4\sqrt{x}}$

$= -\frac{2}{x} - \ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C$

7. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^{1/2}-1}{x^{1/3}}\,dx = \int \left(x^{1/6} - x^{-1/3}\right)dx =$

$= \frac{x^{7/6}}{7/6} - \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{3}{2}x^{2/3} + C$

8. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$

9. $\int (1+\sqrt{x})^4\,dx = \int \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^{4-k} (\sqrt{x})^k\,dx =$

$= \int \Big(\binom{4}{0} 1^4 (x^{1/2})^0 + \binom{4}{1} 1^3 (x^{1/2})^1 + \binom{4}{2} 1^2 (x^{1/2})^2 + \binom{4}{3} 1^1 (x^{1/2})^3 +$

$+ \binom{4}{4} 1^0 (x^{1/2})^4\Big)\,dx = \int \left(1 + 4x^{1/2} + 6x + 4x^{3/2} + x^2\right)dx$

$= x + 4\frac{x^{3/2}}{3/2} + 6\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^3}{3} + C =$

$= x + \frac{8}{3}x^{3/2} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{5/2} + \frac{1}{3}x^3 + C.$

10. $\int (1+\sqrt{x})^{1000}\,dx = \int \underbrace{\sum_{k=0}^{1000}}_{\binom{1000}{k}} 1^{1000-k} (\sqrt{x})^k\,dx = \underbrace{\sum_{k=0}^{1000}}_{\binom{1000}{k}} \int x^{k/2}\,dx$

$= \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} \frac{x^{k/2+1}}{k/2+1} + C = 2\sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} \frac{x^{k/2+1}}{k+2} + C$

11. $\int \frac{dx}{2^x} = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{\frac{1}{2^x}}{\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$

12. $\int 3^{-x}\,dx = \int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C$

13. $\int \frac{2^{x+1} + 3^{x-1}}{6^x} dx = \int \frac{2 \cdot 2^x + \frac{1}{3} 3^x}{6^x} dx = 2 \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$

$= -\frac{2}{3^x \ln 3} - \frac{1}{3 \cdot 2^x \ln 2} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tg x - ctg x + C$

15. $\int tg^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tg x - x + C$

16. $\int \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \, dx = \int \sqrt{x \sqrt{x \cdot x^{1/2}}} \, dx = \int \sqrt{x \sqrt{x^{3/2}}} \, dx = \int \sqrt{x \cdot x^{3/4}} \, dx =$

$= \int \sqrt{x^{7/4}} \, dx = \int x^{7/8} dx = \frac{x^{15/8}}{15/8} + C = \frac{8}{15} x^{15/8} + C$

17. $\int \sqrt[6]{x^5 \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x}}} \, dx = \int \sqrt[6]{x^5 \sqrt[4]{x^3 \cdot x^{1/2}}} \, dx = \int \sqrt[6]{x^5 \sqrt[4]{x^{7/2}}} \, dx =$

$= \int \sqrt[6]{x^5 \cancel{\sqrt[4]{\ }} \cdot x^{7/8}} \, dx = \int \sqrt[6]{x^{47/8}} \, dx = \int x^{47/48} dx =$

$= \frac{x^{95/48}}{95/48} + C = \frac{48}{95} x^{95/48} + C$