Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

МЕХАНИКА РОБОТА

Проф. Михаило Лазаревић,

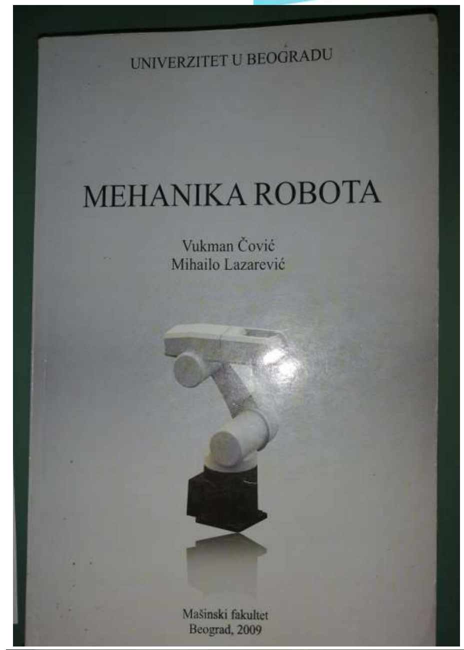
Машински факултет,Универзитет у Београду

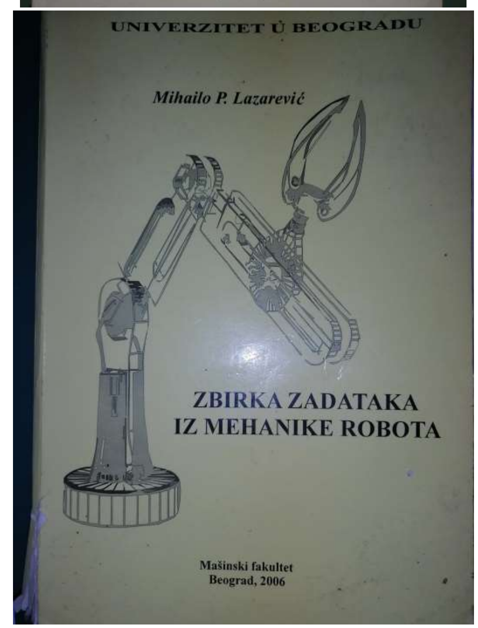
Posebno je ovde od interesa proučavati robotske sisteme sa stanovišta *mehanike* odnosno *teorije mehanizama* odnosno govorimo o ***mehanici robota.***

Mehanika robota $\rightarrow$ kinematika + dinamika

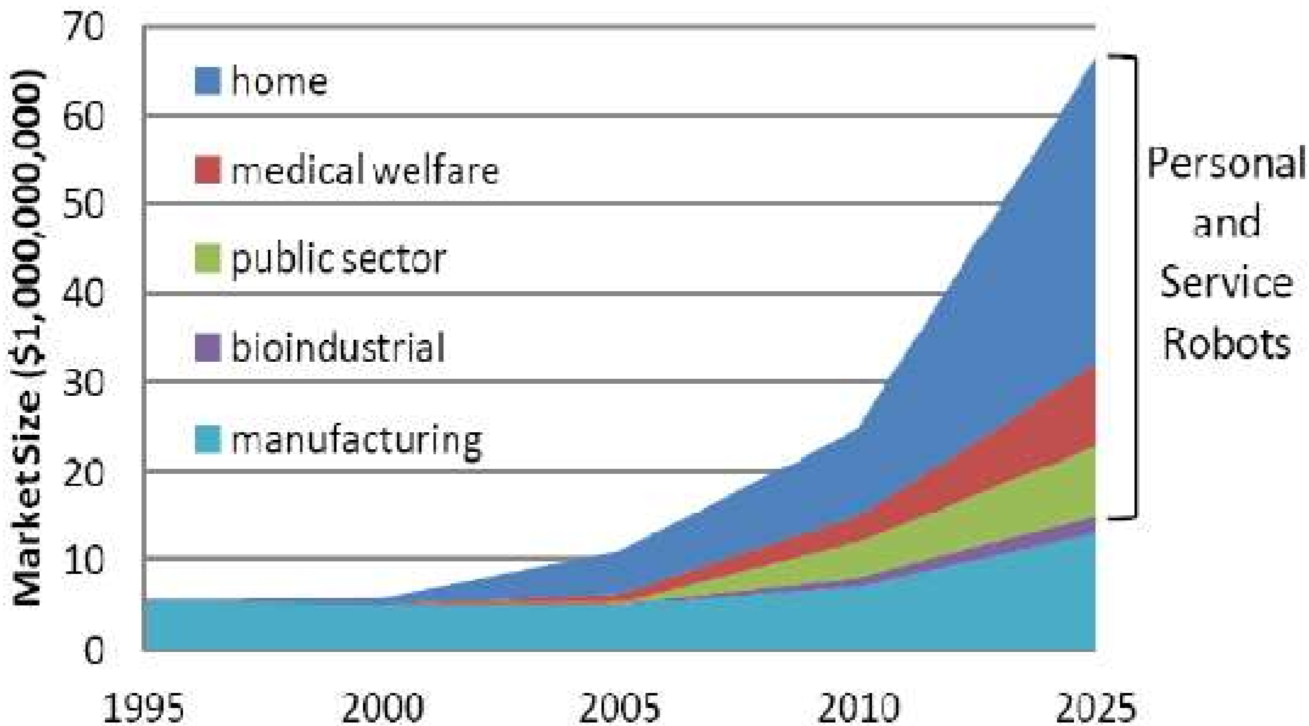
MEHANIKA ROBOTA

- *krutost*
  - sa krutim segmentima
  - sa elastičnim segmentima
- *veze*
  - sa idealnim vezama
  - sa realnim vezama
- …
- …





Globalni trzisni potencijal robotike



computer numerically controlled machines (CNC)

1950

mechanical telemanipulators

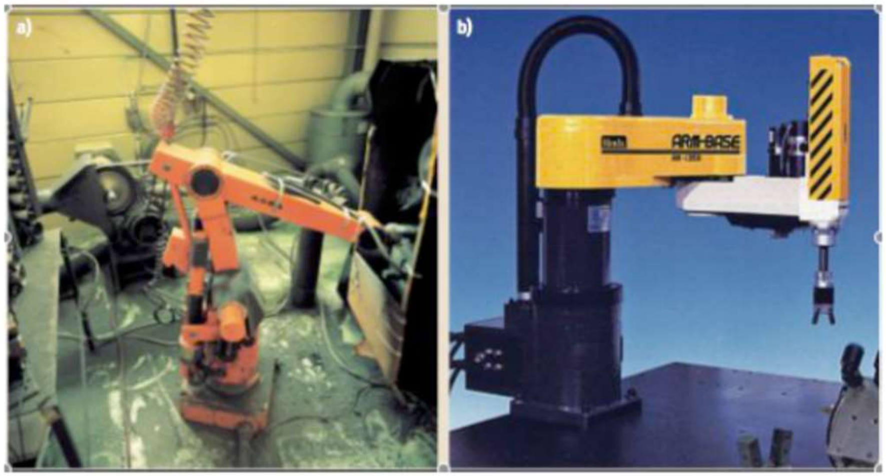
robot manipulators

1970
Unimation PUMA

- with respect to the ancestors
  - flexibility of use
  - adaptability to a priori unknown conditions
  - accuracy in positioning
  - repeatability of operation

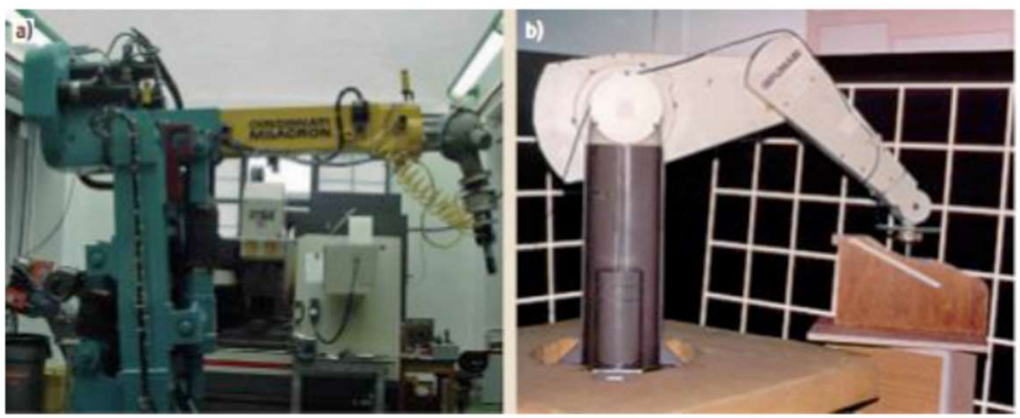
Robot manipulators

ASEA IRB-6
(1973)
first robot
all-electric-drives



Hirata AR-300
(1978)
first SCARA
robot

Cincinnati
Milacron T3
(1974)
first micro-
computer
controlled
robot

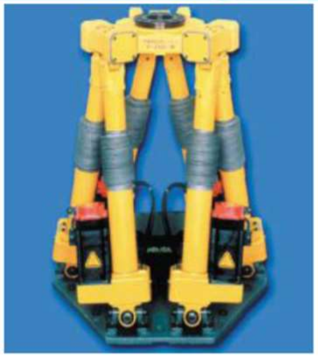


Unimation
PUMA 560
(1979)
6R with
human-like
dexterity

Robot manipulator kinematics

Kuka 150_2
(series 2000)
open kinematic chain
(rigid bodies
connected by joints)

Comau
Smart H4
closed kinematic chain



Fanuc
F-200iB
parallel kinematics

SCARA-type robots

Mitsubishi RP
(repeatability 5 micron,
payload 5 kg)

Mitsubishi RH
(workspace 850 mm,
velocity 5 m/s)

Bosch Turbo

SCARA (Selective Compliant Arm for Robotic Assembly)

- 4 degrees of freedom (= joints): 3 revolute + 1 prismatic (vertical) axes
- compliant in horizontal plane for micro-assembly and pick-and-place

POLJOPRIVREDA / PROIZVODNJA

POLJOPRIVREDA / PROIZVODNJA

projekat univerzalne robotske platforme HORTIBOT, Aarhus University, Danska

MEDICINA
rehabilitacioni robot u sali za fizikalnu terapiju

MEDICINA
hirurški robot u operacionoj sali

ŽIVOTNI PROSTOR
od kancelarije do kuhije u pametnim zgradama

ŽIVOTNI PROSTOR
trajektorija kretanja robotskog usisivača prašine

BEZBEDNOST / PRIRODNE KATASTROFE

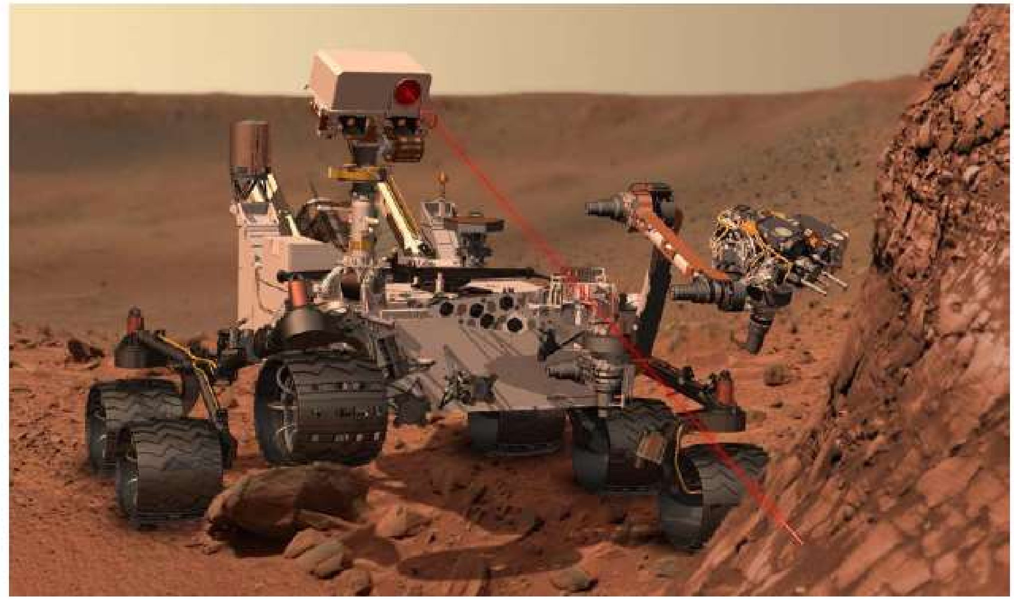
.... zemljotres, požar, eksplozije, poplave, cunami, ...

CYBERSPACE ROBOTICS

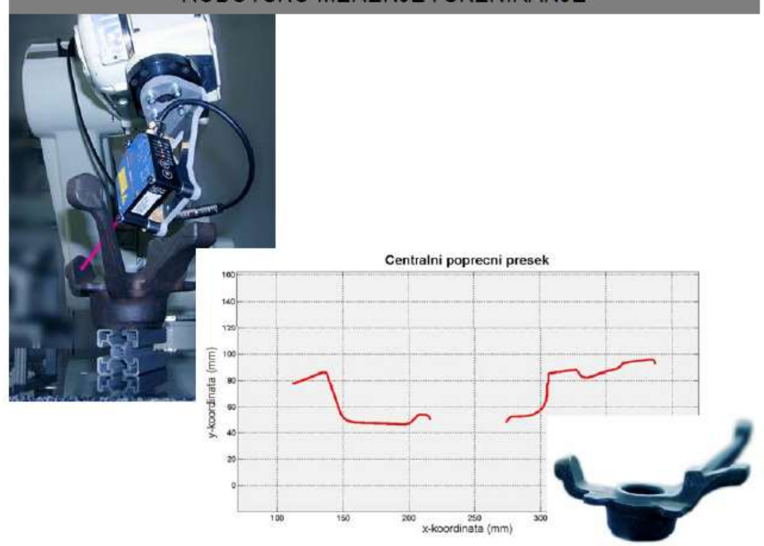
roboti koji postoje u apstraktnom informacionom prostoru Interneta

ISTRAŽIVANJE

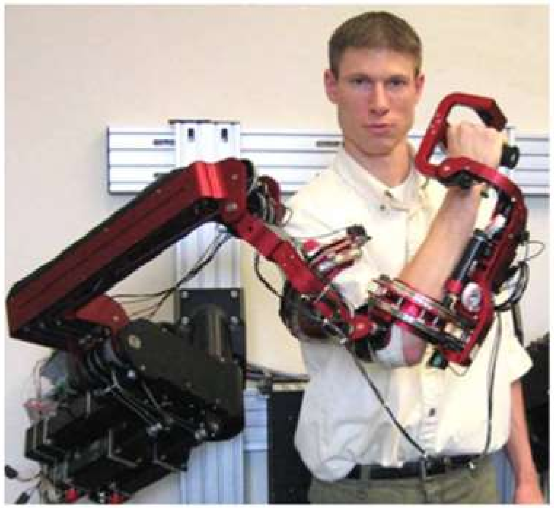
istraživanje svemira, okeana, ...

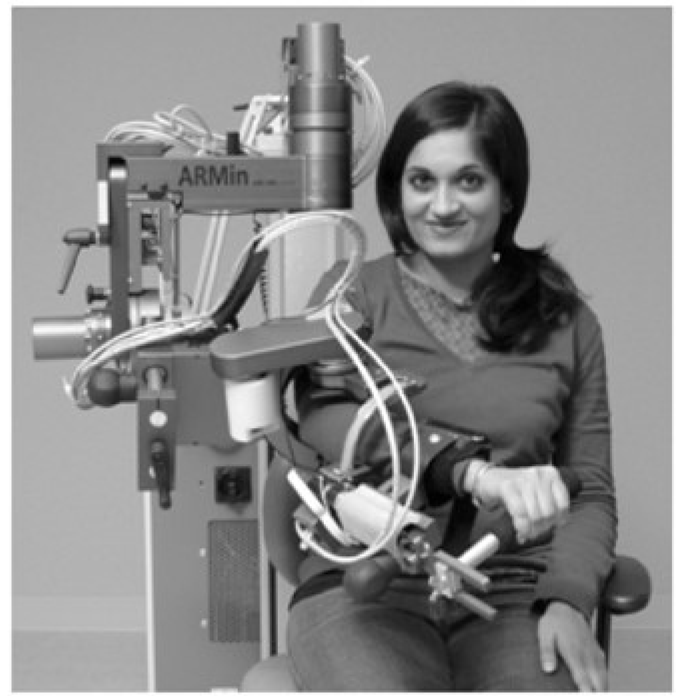


ROBOTSKO MERENJE i SKENIRANJE



Егзоскелетони





. (a) CADEN-7 [30]; (b) RUPERT IV [37]; (c) ARMin III [18].

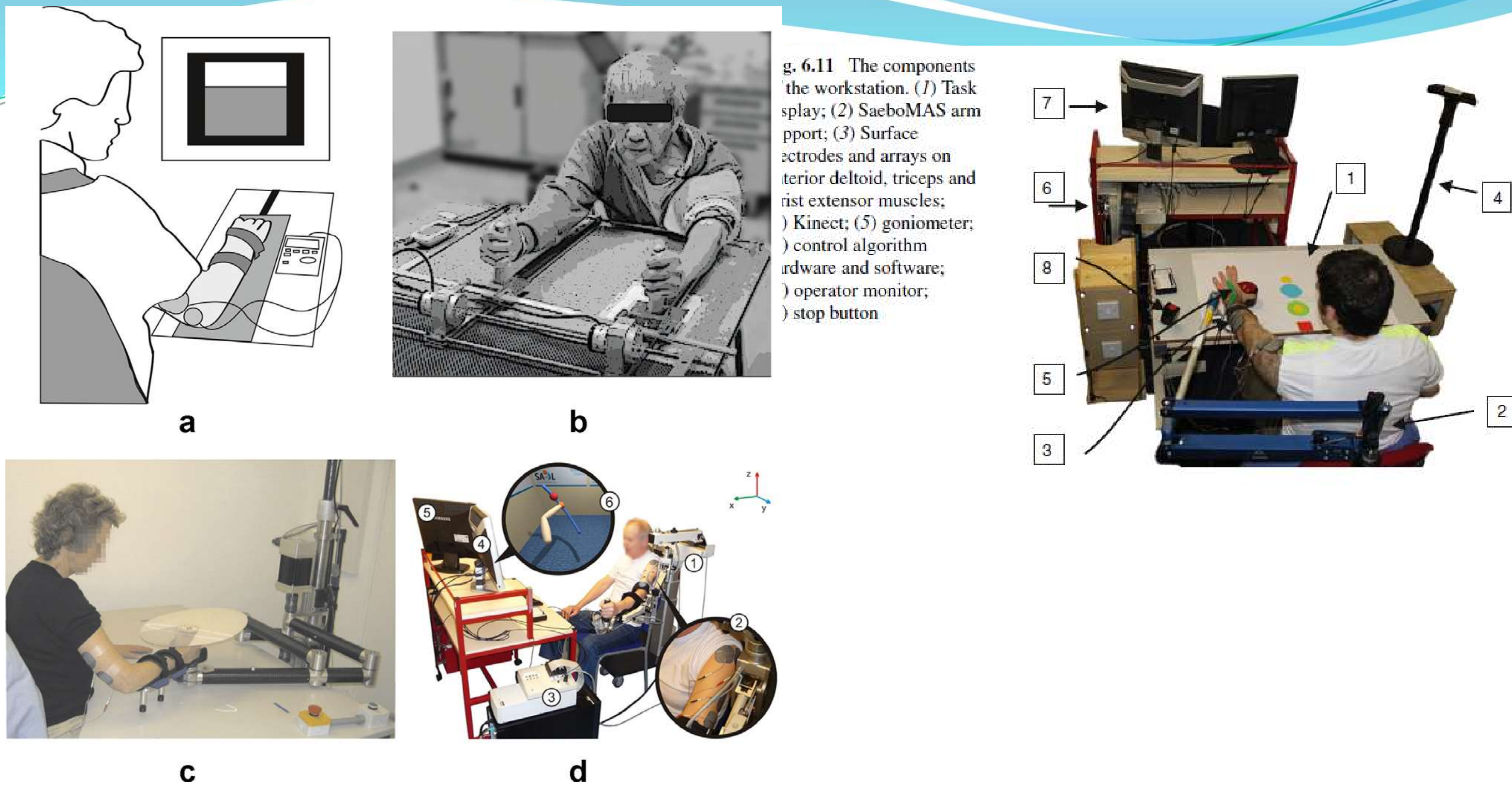
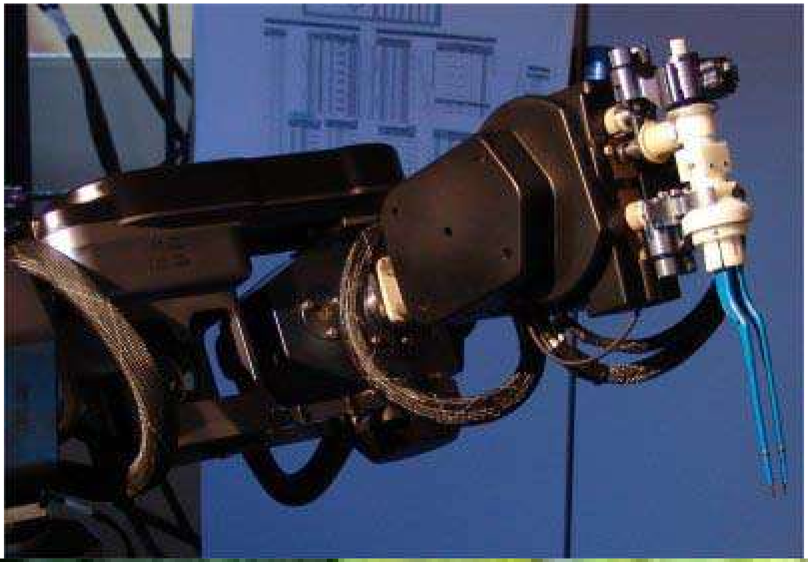
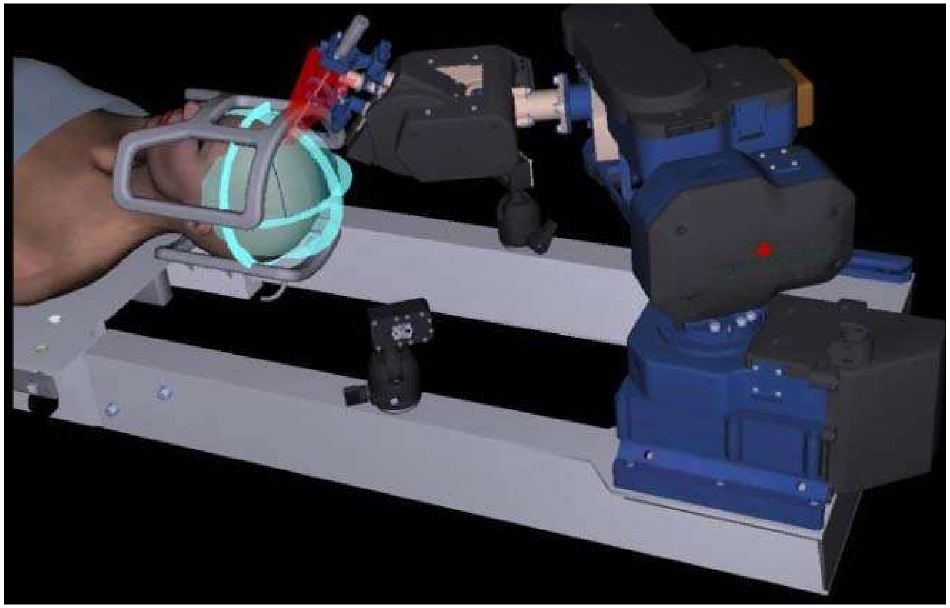


Fig. 3. Hybrid robotic rehabilitation system for reaching movements. (a) SMART device combined with FES (figure adapated from [28]). (b) BAT training based on two parallel bar and FES (figure adapted from [29]). (c) Planar end-effector work- station combined with FES [30,33] . (d) Unconstrained 3D workstation based on ArmeoSpring exoskeleton [31] .

Neuro Arm Robot –први хируршки робот у МРИ окружењу

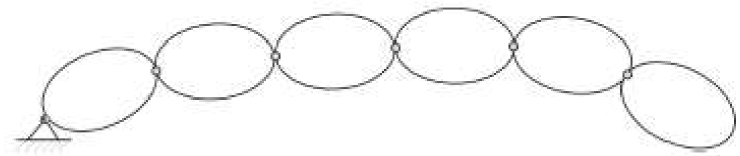




Кинематички ланци

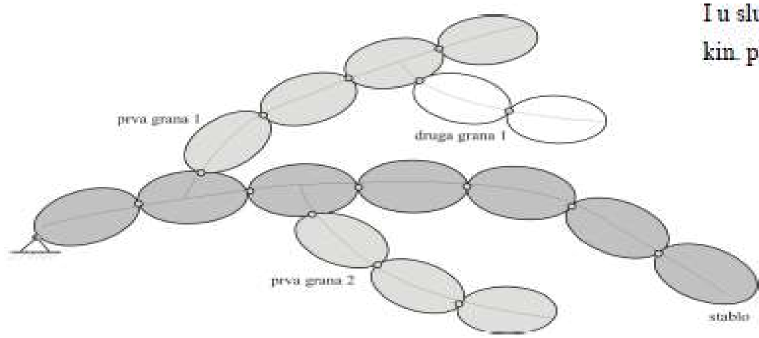
- **Отворен кинематички ланац без гранања**

a) kinematički lanac bez grananja (*i on predstavlja naš osnovni model*)



U slučaju otvorenog kin. lanca bez grananja $n_{ss} = n$

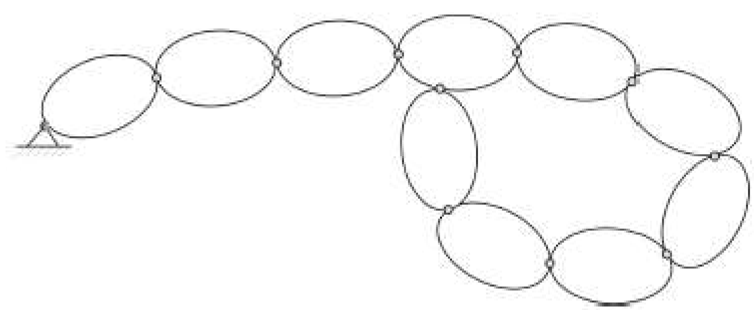
- **Кинематички ланац са гранањем са структуром тополошког дрвета**



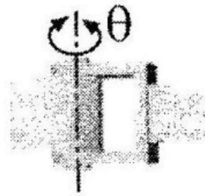
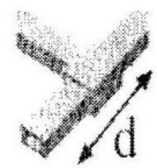
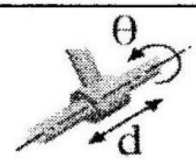
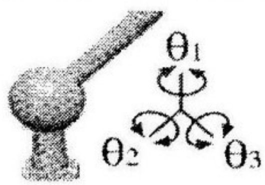
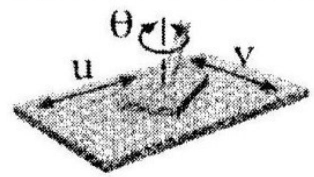
I u slučaju otvorenog kin. lanca sa grananjem takodje je $n_{ss} = n$ (pod uslovom kin. parova V klase)

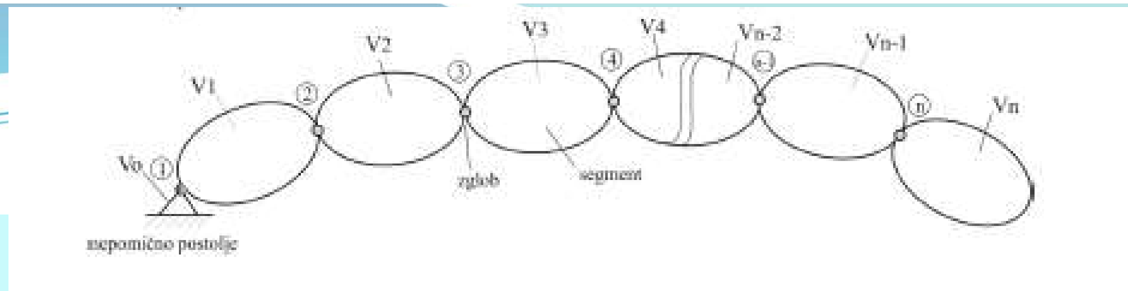
- **Затворени кинематички ланац**

Kod zatvorenog kin.lanca je $n_{SS} \neq n$ .Zatvoreni lanac presecamo tako da on postaje , u opštem slučaju otvoreni kin. lanac sa grananjem.

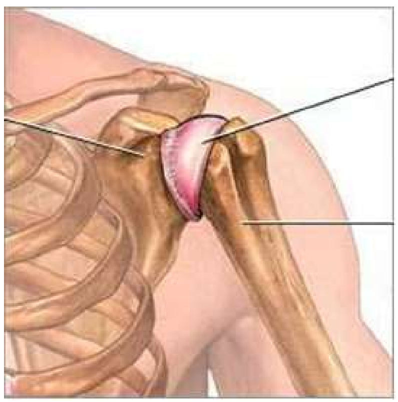


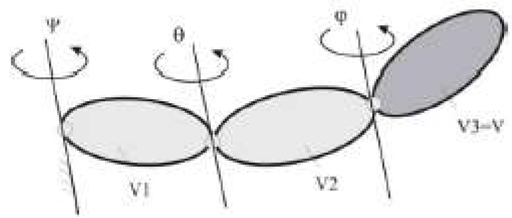
Примери кинематских парова

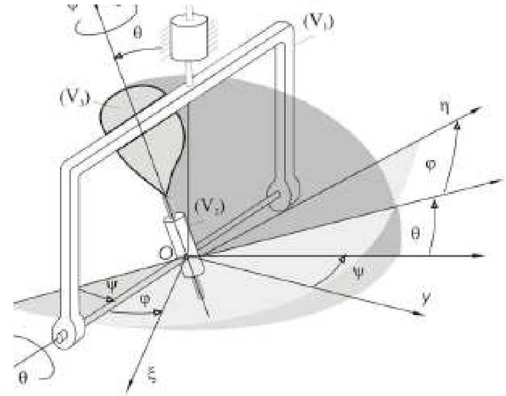
klasa kinem. para	broj stepeni slobode		
V	1		
IV	2		
III	3		



Primer dekompozije

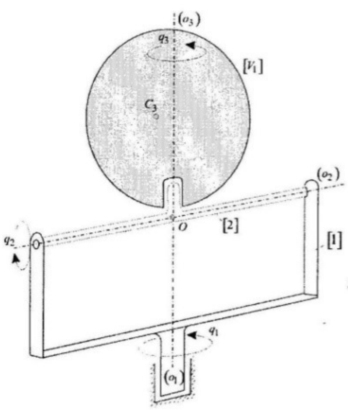


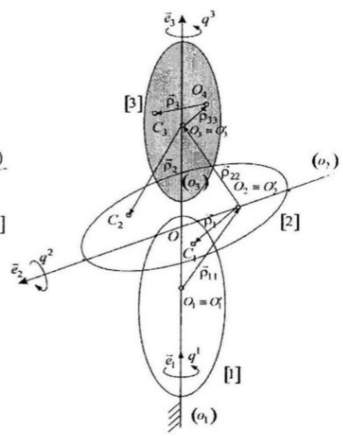




sl.12

$$[A]=\begin{bmatrix} c\psi c\phi\text{-}s\psi c\theta s\phi & -c\psi\, s\phi - s\psi\, c\theta\, c\phi & s\psi\, s\theta \\ s\psi c\phi\text{-}c\psi c\theta s\phi & -s\psi\, s\phi - c\psi\, c\theta\, c\phi & -c\psi\, s\theta \\ s\theta s\phi & s\theta\, c\phi & c\theta \end{bmatrix}$$

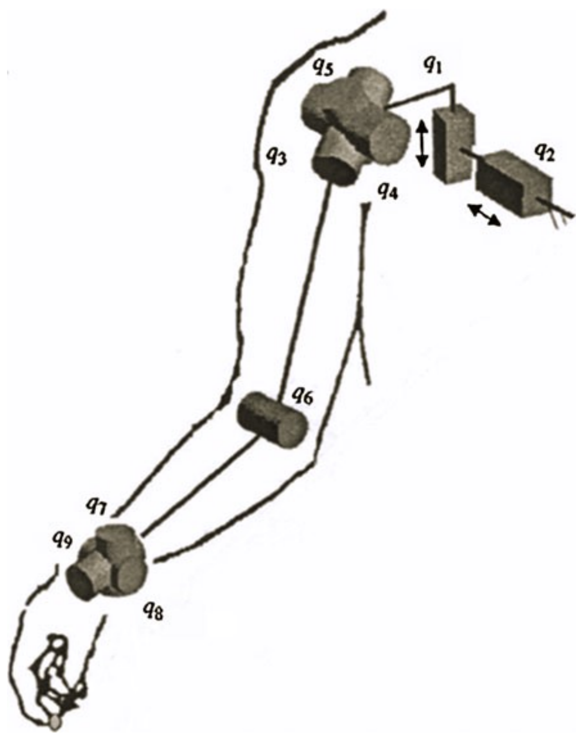


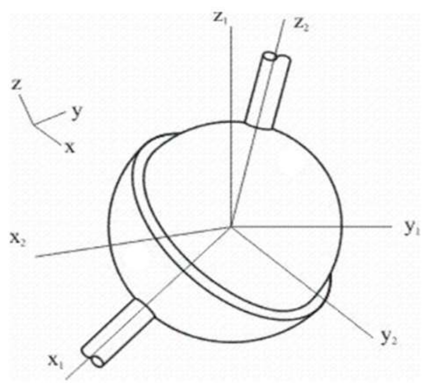


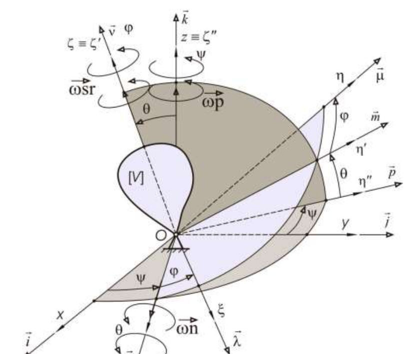
9 DoFs (7 rotations and 2 translations)

- wrist (флексија/екстензија, пронација/супинација, радијална/улнарна девијација)
- elbow (флексија/екстензија)
- shoulder(флексија/екстензија, абдукција/адукција, медијална/латерална

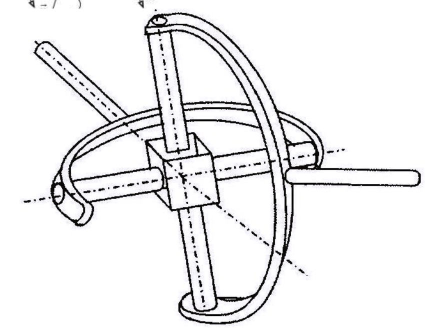
-Shoulder: spherical joint –decomposition fictive segment without mass with 3 DoFs





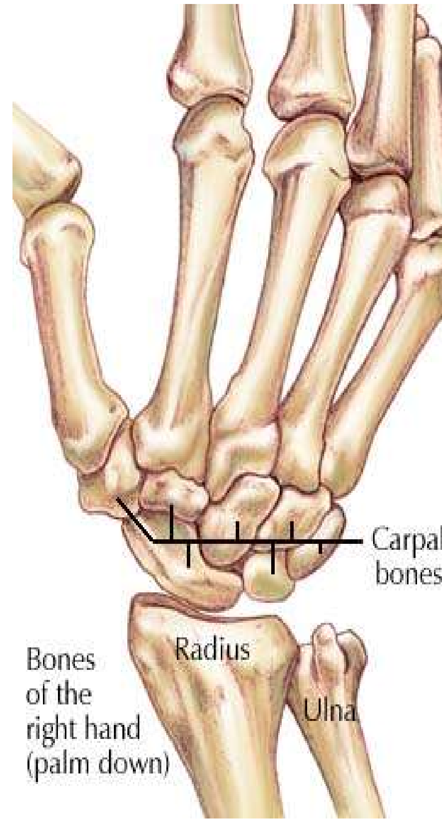


Wrist joint: Cardan-**Hooke** ,
(за 2 Dofs)

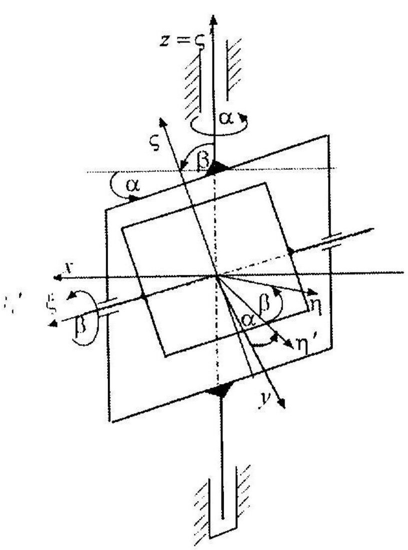


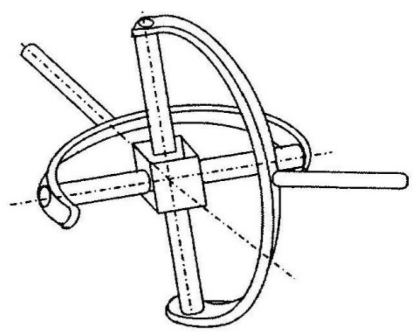
Декомпозиција зглобова

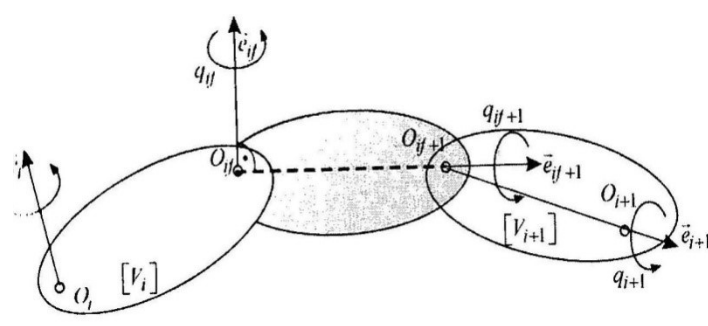
- Ручни зглоб
  - Кардано-Хуков зглоб
    2сс

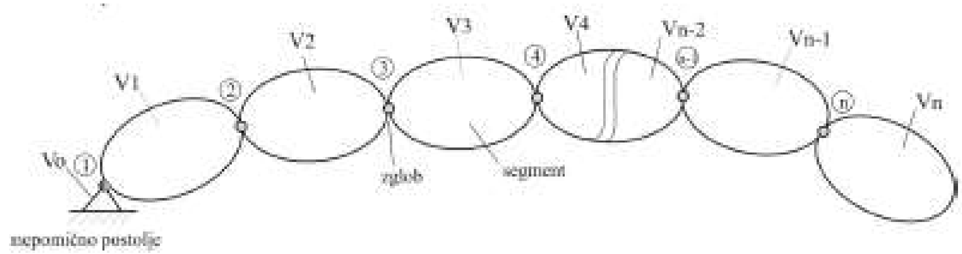


$$[A]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\cos\beta\sin\alpha & \sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha & \cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$









Uvodi se parametar veze $\xi_i, \overline{\xi} = 1 - \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \ i - ti \ zglob \ je \ prizmatican \\ 0, \ i - ti \ zglob \ je \ cilindricni \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \begin{Bmatrix} \overline{\xi}_1 \\ \overline{\xi}_2 \\ \ldots \\ \overline{\xi}_n \end{Bmatrix} \in R^{n \times 1}, \quad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{Bmatrix} \in R^{n \times 1}$$

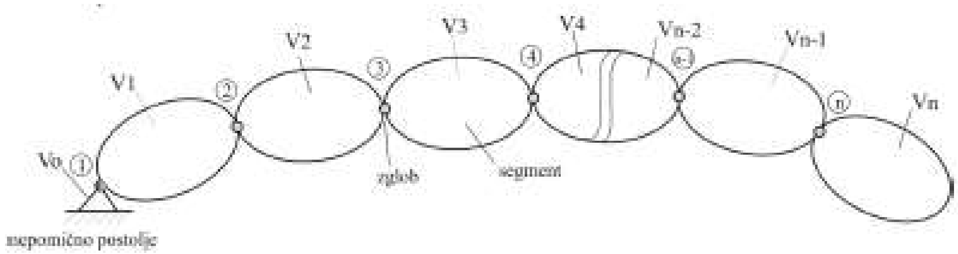
$$\overline{\xi}_i = \begin{cases} 1, \ i - ti \ zglob \ je \ cilindricni \ (R) \\ 0, \ i - ti \ zglob \ je \ prizmatican \ (T) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$primer \quad \{\xi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad Robotski \ sistem \ ima \ strukturu \quad RTRR$$

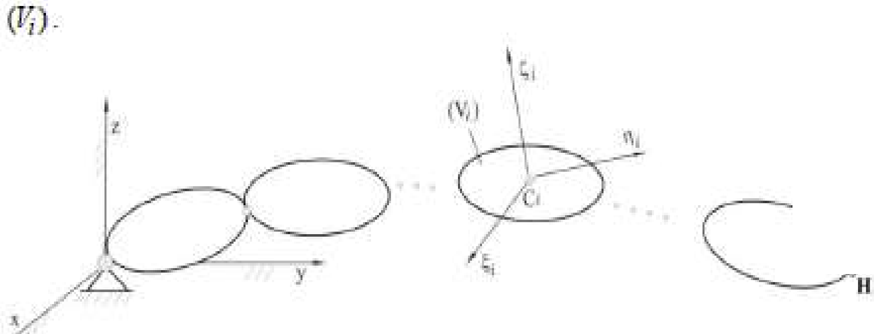
Улазни параметри система крутих тела:

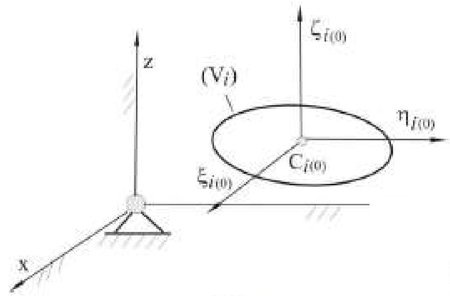
- Број степени слободе $n_{ss} = n$
- Структура и типови веза *holonomne skleronomne veze.*
- Геометрија система
- Распоред маса

Konfiguraciju *osnovnog sistema tela* $(q^1,\ldots,q^n)$

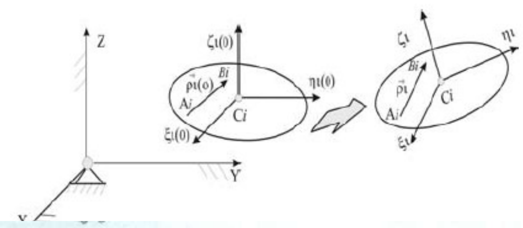


Референтна конфигурација

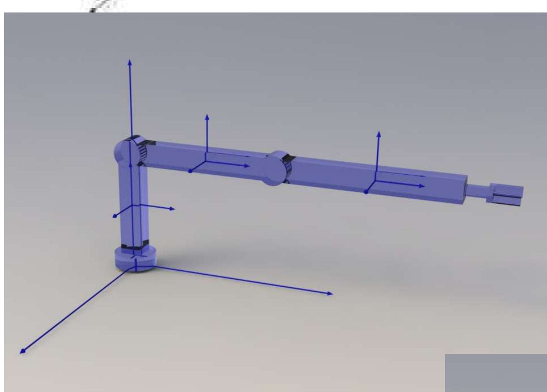


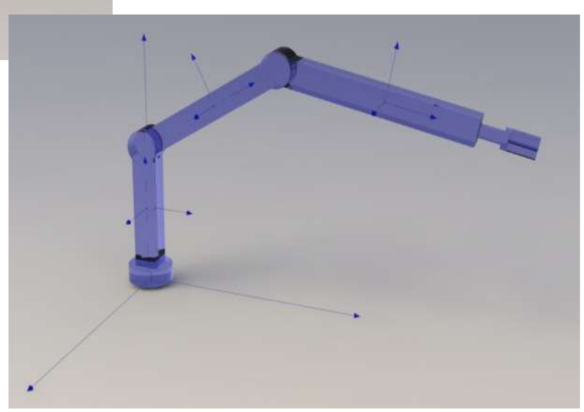


sl.18

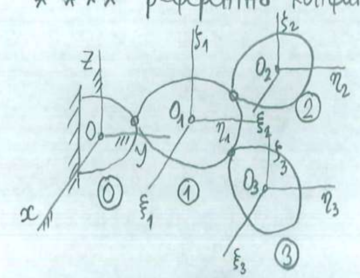


$$\{\bar{\rho}_i\} = [A_{i,0}]\{\bar{\rho}_{i(0)}\}$$





*** референтна конфигурација

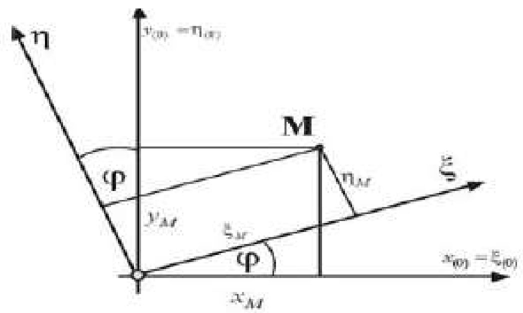


Референтна конфигурација: све генералисане координате су једнаке нули, тј. $q^1=0$, $q^2=0$, $q^3=0$ односно осе локалних координатних система $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ су паралелне са осама непокретног система $Oxyz$.

координате вектора $\vec{u}$ у систему везаном за тело (сегмент) (i):

$\{\vec{u}^{(i)}\}$ – матрица колона, $(\vec{u}^{(i)})$ – матрица врста; $(\vec{u}^{(i)}) = \{\vec{u}^{(i)}\}^T$

Ортогоналне трансформације координата



$$x_M = \xi_M \cos\varphi - \sin\varphi\,\eta_M,$$

$$y_M = \xi_M \sin\varphi + \cos\varphi\,\eta_M$$

ротација око Oz

$$\begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \end{Bmatrix} = [A]_{2D} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \\ \varsigma_M \end{Bmatrix} = [A]_{3D} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \\ \varsigma_M \end{Bmatrix}$$

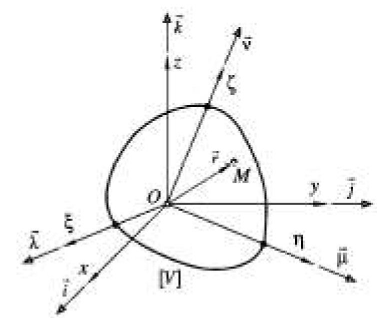
Ортогоналне трансформације координата

$\vec{r}_{Oxyz} = [A]\vec{r}_{O\xi\eta\varsigma}$ или у развијеном облику

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{Bmatrix}$$

Матрица трансформације $[A]$ представља ортогоналну матрицу тј. важи

$$[A] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{i} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{k} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix}, [A]^{-1} = [A]^T$$



Примери одређивања матрица трансформације

$$x = \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{i} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{i} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{i},$$
$$y = \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{j} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{j} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{j},$$
$$z = \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{k} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{k} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{k},$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{i} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{k} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$f^1 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 - 1 = 0,$$
$$f^2 = \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 - 1 = 0,$$
$$f^3 = \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^3 - 1 = 0,$$
$$f^4 = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0,$$
$$f^5 = \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0,$$
$$f^6 = \alpha_{13}\alpha_{11} + \alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{33}\alpha_{31} = 0.$$

$$\alpha_{21} = \vec{\lambda}\cdot\vec{j} = cos\angle(\vec{\lambda},\vec{j})$$

$$\det[A] = (\vec{\lambda}\times\vec{\mu})\cdot\vec{\nu} = 1$$

matrica transformacije [*A*] je nesingularna

- Matrica [A] predstavlja *matricu transformacije* koordinata tačke *M* iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u koordinatni sistem *Oxyz*.

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix},$$

$$\xi = x\vec{\lambda}\cdot\vec{i} + y\vec{\lambda}\cdot\vec{j} + z\vec{\lambda}\cdot\vec{k},$$
$$\eta = x\vec{\mu}\cdot\vec{i} + y\vec{\mu}\cdot\vec{j} + z\vec{\mu}\cdot\vec{k},$$
$$\zeta = x\vec{\nu}\cdot\vec{i} + y\vec{\nu}\cdot\vec{j} + z\vec{\nu}\cdot\vec{k},$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

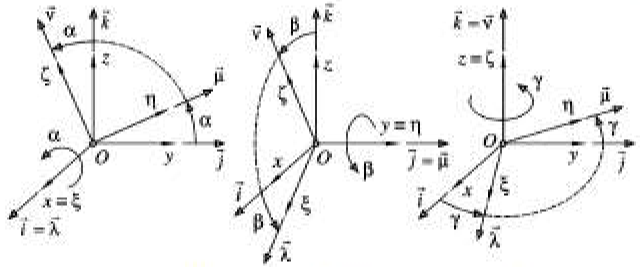
$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^{T} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$[B] = [A]^T \Leftrightarrow [A] = [B]^T.$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\lambda}\cdot\vec{k} \\ \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} \\ \vec{\nu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix}.$$

$$[A]^{-1} = [A]^T,$$

$$[A][A]^{-1} = [B]^T[B] \Rightarrow [B]^{-1} = [B]^T.$$

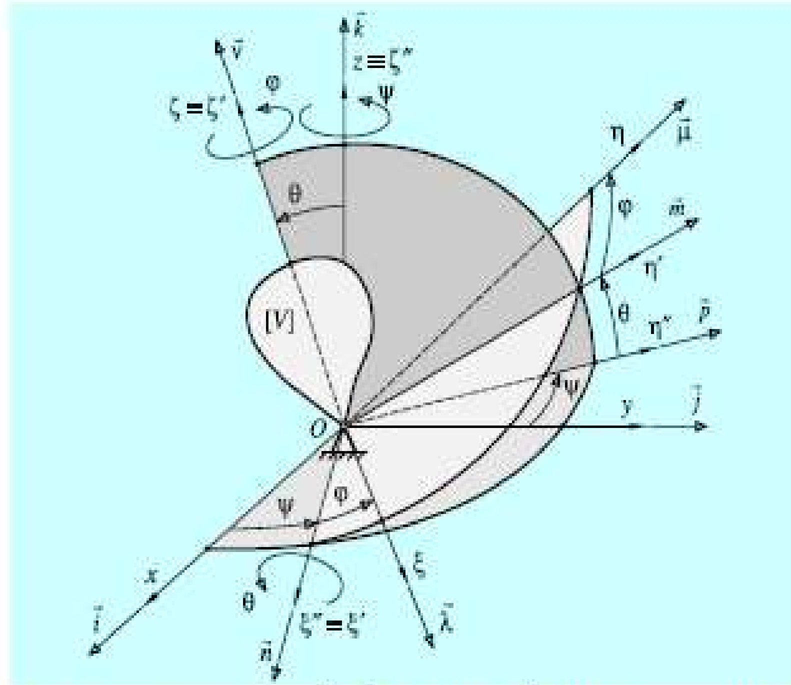


$$
\left[A_{x,\alpha=30^\circ}\right]=\begin{bmatrix}\cos 0 & \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2)\\ \cos(\pi/2) & \cos\alpha & \cos(\pi/2+\alpha)\\ \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2-\alpha) & \cos\alpha\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}
$$

$$
\left[A_{y,\beta=45^\circ}\right]=\begin{bmatrix}\cos\beta & \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2-\beta)\\ \cos(\pi/2) & \cos 0 & \cos(\pi/2)\\ \cos(\pi/2+\beta) & \cos(\pi/2) & \cos\beta\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}
$$

$$
\left[A_{z,\gamma=60^\circ}\right]=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \cos(\pi/2+\gamma) & \cos(\pi/2)\\ \cos(\pi/2-\gamma) & \cos\gamma & \cos(\pi/2)\\ \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2) & \cos 0\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

Матрица трансформације координата за случај сферног кретања крутог тела чији положај одређују Ојлерови углови



Нека круто тело [V] врши сферно кретање у односу на тачку *O* која представља координатни почетак Декартовог координатног система $O\xi\eta\zeta$ везаног за круто тело. У референтној конфигурацији назначеној индексом (0) описани координатни систем поклапа са непокретним координатним системом *Oxyz* Узимајући да је произвољна конфигурација

1ротација ψ

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_\psi] \begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{Bmatrix}, [A_\psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 ротација θ

$$\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{Bmatrix} = [A_\theta] \begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix}, \quad [A_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3 ротација φ

$$\begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix} = [A_\varphi] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}, \quad [A_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Из претходних израза директно следи да је:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix},$$

где је одговарајућа матрица

$[A] = [A_\psi][A_\theta][A_\varphi]$

и она представља матрицу трансформације координата тачке M датих у координатном систему $O\xi\eta\zeta$ у координатни систем $Oxyz$.

Трансформација координата вектора $\vec{a}$ датог у локалном коорд. систему i-тог тела ($\{a^{(i)}\}$ из j-тог је дата са:

$$\{a^{(i)}\} = [A_{i,j}]\{a^{(j)}\}, \qquad [A_{i,j}]^{-1} = [A_{j,i}]^T$$

$$\vec{e}_\psi = \vec{k} \Rightarrow \{\vec{e}_\psi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{n} \Rightarrow \{\vec{e}_\theta\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{v} \Rightarrow \{\vec{e}_\varphi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Пример сложених матрица трансформације:

$$\begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix} = [A_{r0,1}][A_{r1,2}]\dots[A_{rn-1,n}] \begin{Bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \\ \varsigma_n \end{Bmatrix} =$$

$$[A_{ro,k}] = [A_{r0,1}][A_{r1,2}]\dots[A_{rn-1,n}]$$

Дуални објекти

- Придружујемо специјалну матрицу

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow [a^d] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- антисиметрична

$$[a^d]^T = -[a^d] \qquad [a^d]^2 = \{\vec{a}\}(\vec{a}) - a^2[I]$$

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} -a_3^2 - a_2^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & -a_3^2 - a_1^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \vec{e}$$

$$[e^d]^{2i-1} = (-1)^{i-1}[e^d],$$
$$[e^d]^{2i} = (-1)^{i-1}[e^d]^2, \; i = 1,2,3,\ldots$$

- Векторски производ и дуални објект

$$\left.\begin{aligned} \{\vec{a}\times\vec{b}\} &= \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix} \\ [a^d]\{\vec{b}\} &= \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{\vec{a}\times\vec{b}\} = [a^d]\{\vec{b}\}$$

$$[a^d]\{\vec{b}\} = -[b^d]\{\vec{a}\}$$

- Одредити дуалне објекте $[e^d]$, $[e^d]^2$, $[e^d]^5$, $[e^d]^6$ јединичног вектора $\vec{e}_z = \vec{k} = (0\ 0\ 1)^T$.

$$[e_z^d] = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [e_z^d]^2 = \begin{bmatrix} -e_3^2-e_2^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & -e_3^2-e_1^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & -e_1^2-e_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[e^d]^{2i-1} = (-1)^{i-1}[e^d], \qquad [e^d]^{2i} = (-1)^{i-1}[e^d]^2; \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$[e_z^d]^5 = [e_z^d]^{2\cdot 3-1} = (-1)^{3-1}[e_z^d] = [e_z^d] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i = 3$$

$$[e_z^d]^6 = [e_z^d]^{2\cdot 3} = (-1)^{3-1}[e_z^d]^2 = [e_z^d]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i = 3$$