Uvod u u mehaniku robota

Kratak istorijat,osnovne postavke

Može se reći da robotika ima svoje početke još u doba renesanse. Oko 1500 godine Leonardo da Vinci izradio je mehaničkog lava u čast Luja XII. Kada je kralj ušao u dvoranu za prijem u Milanu, lav se pokrenuo, rastvorio grudni koš I kralju pokazao grb Francuske. Takvi mehanički automati postali su aktuelni sledeća četiri veka, pa ipak, teko početkom XX veka reč “ROBOT” je ušla u engleski jezik kada je 1923 godine prevedena češka drama RUR (Rossumovi univerzalni roboti) filozofa Karela Čapeka. Izraz “ROBOT” izveden je od češke reči *robota* koja znači prisilan rad. Iako bi tvorevine u drami danas pre bile nazvane androidima nego robotima, ta je pogrešna upotreba reči i do danas ostala univerzalna.

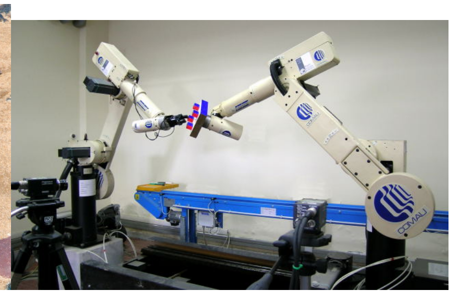
U široj literaturi se može naći da se reč robot se tumači kao čovekoliki automat, pooslušan i inteligentan ali bezlična mašina ili automatizovan uređaj koji obavlja funkcije koje su obično namenjene čoveku.Preciznije određenje robota se može naći u stručnoj literaturi koja se odnosi na ovu problematiku tako na primer, američki institit za robote (Robot Institute of America - RIA) je definisao robot kao *reprogramabilni multifunkcionalni manipulator projektovan da pomera materijal, delove, alate ili specijalne uređaje korišćenjem različitih programa kretanja pri izvršavanju različitih zadataka.*

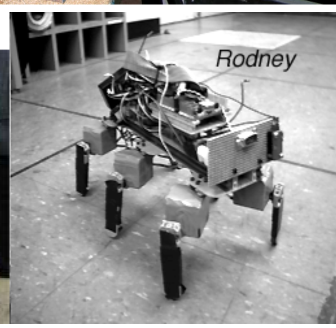
Neki primeri robotskih sistema

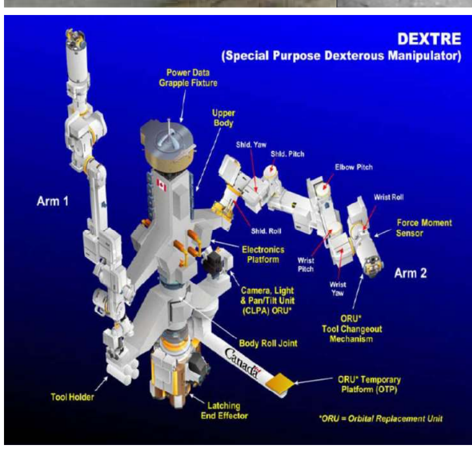
SCARA roboti

ABB roboti

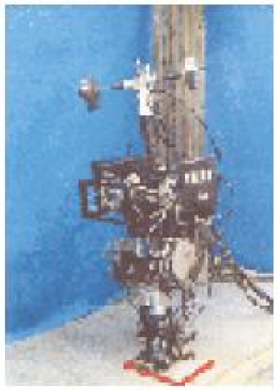
Serpentine manipulator Penelope 5



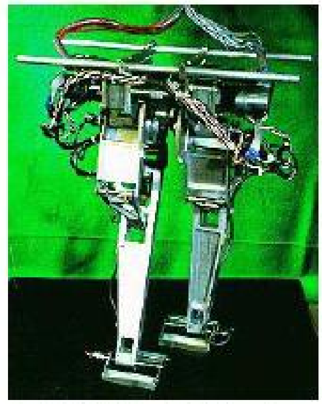




Primeri bipedalnih i humanoidnih robota



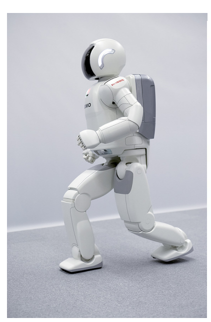
Универзитет Васеда, бипедални робот WL-10RV1



MELTRAN II , Tsukuba, Japan

Na Univerzitetu Vaseda (Waseda University, Japan) prvi bipedalni robot je razvijen još 1969 godine, gde je prvi prototip iz familije WL robota je bio WL-5. U Laboratoriji za mašinstvo u Cukubi (*Mechanical Engineering Laboratory Tsukuba, Japan*) razvijen je MELTRAN. Honda je razvila P2 (1996 god.) i model koji je usledio kasnije, P3 (1998), su nastali u Hondinom istraživačkom centru (Honda Wako Research Center). U klasi *Personal Robot-a* na tržištu se pojavio ASIMO robot. Ovaj robot je u stanju da se autonomno kreće kroz nepoznato okruženje, sposoban je da silazi niz stepenice i strme ravni, u stanju je da razume pokrete ljudi i da do izvesnog stepena ima komunikaciju sa njima. Takodje, korporacija Tojota je napravila Kavadu HRP-2P. U Evropi je na Tehničkom fakultetu u Minhenu razvijen humanoidni robot Džoni, koji je u stanju da zaobilazi prepreke i planira putanje kretanja zasnovane na kamerama koje mu omogućavaju 3D pregled okoline.

Хондини роботи P2 и P3



Asimo

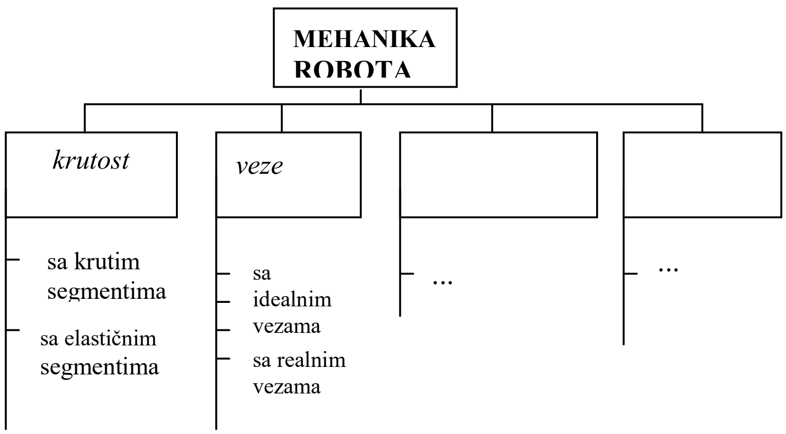
Кавада HRP-2P

Osnovne postavke mehanike robota

Robotika predstavlja multidiscliplinarnu nauku koja se bavi istraživanjem, razvojem, projektovanjem i primenom robotskih sistema . Ona se oslanja kako na prirodne nauke (matematiku, mehaniku) tako i na ostale grane primenjene nauke kao što su mašinstvo, elektrotehnika, kompjuterske nauke itd.)

Posebno je ovde od interesa proučavati robotske sisteme sa stanovišta *mehanike* odnosno *teorije mehanizama* odnosno govorimo o ***mehanici robota.***

Mehanika robota $\rightarrow$ kinematika + dinamika



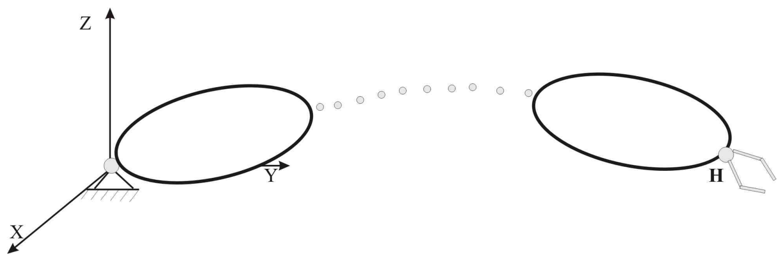
Proizvoljan skup konačnog broja materijalnih tela je *dinamički sistem.*

Robotski sistem (RS) je mehanički objekat (*sistem)* koji pripada sistemu tela (ali ne proizvoljno) i to sistemu krutih (ili elastičnih) tela. Dalje, RS je neprozvoljan skup tela i to vezanih tako da obrazovan kinematički par određene klase. Te veze nazivamo zglobovima odnosno predstavljaju relacije između tela koje ograničavaju broj stepeni slobode (SS) datog robotskog sistema.One se mogu napisati u analitičkom obliku i to za svaku vezu.Veze su pri tom takve da uočena dva segmenta RS predstavljaju kinematički sistem neke klase.Prema tome,

Robotski sistem predstavlja sistem tela vezanih zglobovima pri čemu između tela postoji kinematički par određene klase.

Manipulator izvršava tačno određeni zadatak.

Robot može izvršavati više zadataka odnosno poseduje odgovarajući oblik veštačke inteligencije.Minimalno sadrži tri segmenta.

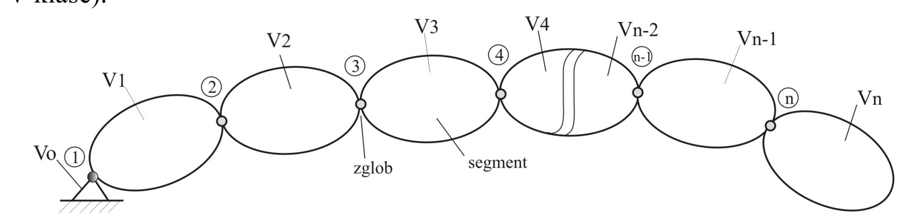


Ako je telo slobodno ima 6 stepeni slobode. Konačne jednačine kretanja nultog segmenta H (*opšte kretanje*)

$$x_H = x_H(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$
$$y_H = y_H(t), \quad \theta = \theta(t)$$
$$z_H = z_H(t), \quad \psi = \psi(t)$$

kompletno pozicioniranje i orijentacija 6ss

Robotski sistem mora da ima 6 ss u opštem slučaju (6 segmenata sa zglobovima V klase).



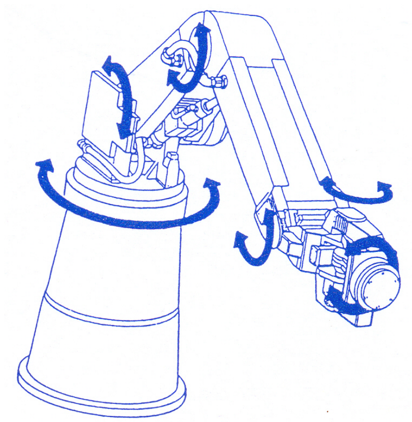
Za robot se kaže da ima *n* stepeni slobode gde broj stepeni slobode predstavlja broj nezavisnih parametara koji jednoznačno određuju položaj uočenog robotskog sistema. Ovde je sa *n* označen broj stepeni slobode mehanizma manipulacionog robota, a sa *m*, (max=6) broj stepeni slobode vrha hvataljke i neka je potrebni broj stepeni slobode za izvršenje manipulacionog zadataka jednak (*mz*). Uočavaju se sledeći slučajevi:

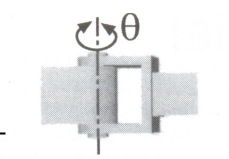
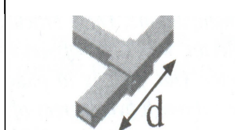
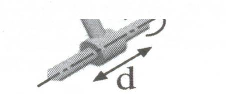
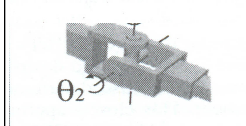
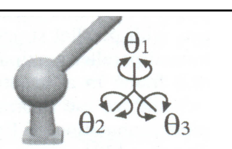
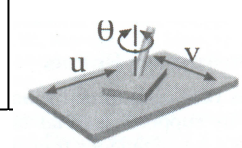
- robot je neredundantan ako je *m*=*n* za sve moguće položaje manipulacionog robota.

- robot je redundantan ako je $n > m$ pri čemu se tu razlikuje:

ako robot ima više od 6 stepeni slobode sigurno je redundantan; isto tako ako je $n > m$ za sve moguće položaje robota takođe je redundantan robot. U nekim položajima (singularnim) robot nije u mogućnosti da upotrebi jedan ili više stepeni slobode odnosno ("gubi" te stepene slobode), za koji inače važi *m*=*n* u tim položajima $n > m$. Robot je redundantan u odnosu na manipulacioni zadatak ako važi *m*>*mz* , pa i u slučaju robota kod koga je *m*=*n*.

U tabeli su predstavljeni jednostavniji kinematički parovi i to V, IV i III klase.Uočava se da segmente robotskog mehanizma povezuju četiri kinematička para V klase, (četiri rotaciona zgloba) i na kraju jedan IV klase, (Kardanov zglob).Kinematičkom paru V klase odgovara jedan stepen slobode dok kinematičkom paru IV klase odgovara dva stepena slobode.



klasa kinem. para	broj stepeni slobode		
V	1		
IV	2		
III	3		

Uvodi se parametar veze $\xi_i, \bar{\xi} = 1 - \xi_i$, $i = 1, 2, ..., n$

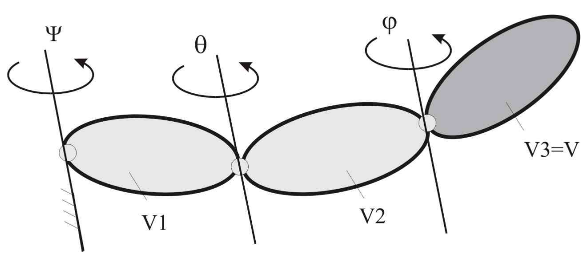
$$\xi_i = \begin{cases} 1, & i - ti\ zglob\ je\ prizmatican \\ 0, & i - ti\ zglob\ je\ cilindricni \end{cases}, \quad i = 1, 2, ..., n \quad \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ ... \\ \bar{\xi}_n \end{Bmatrix} \in R^{n \times 1}, \quad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{Bmatrix} \in R^{n \times 1}$$

$$\bar{\xi}_i = \begin{cases} 1, & i - ti\ zglob\ je\ cilindricni\ (R) \\ 0, & i - ti\ zglob\ je\ prizmatican\ (T) \end{cases}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$primer \quad \{\xi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad Robotski\ sistem\ ima\ strukturu \quad RTRR$$

Bez obzira na veze uvek vršimo dekompoziciju kinematičkih parova (I,II,III,IV) na kin. parove V klase.

Primer *sfernog zgloba* (uvode se dva fiktivna tela V1, V2,nulte mase, dok je V3=V tako da su segmenti vezani kin. parovima V klase)



Kinematički lanci

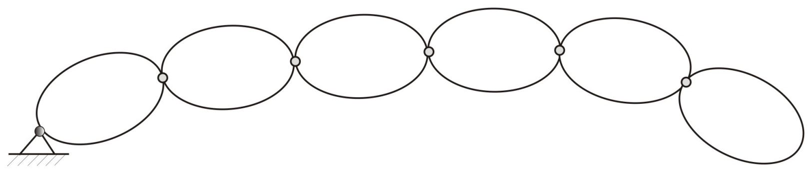
smatramo da su sve veze u okviru lanca predstavljene kin. parovima V klase

n- broj segmenata , n_{ss} - broj stepeni slobode datog lanca

Otvoreni kin. lanac je onaj ako za proizvoljno izabrani segment u lancu možemo doći od nepomičnog postolja samo jednim putem (a da taj put prolazi kroz bilo koji segment samo jednom.

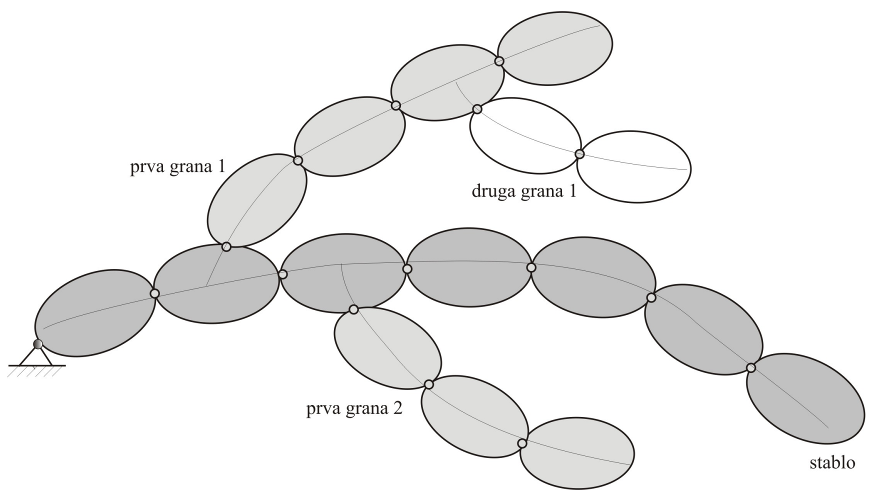
Zatvoreni kin.lanac – ako postoji bar jedan segment do kojeg se može doći na bar dva različita puta.

a) kinematički lanac bez grananja (*i on predstavlja naš osnovni model*)



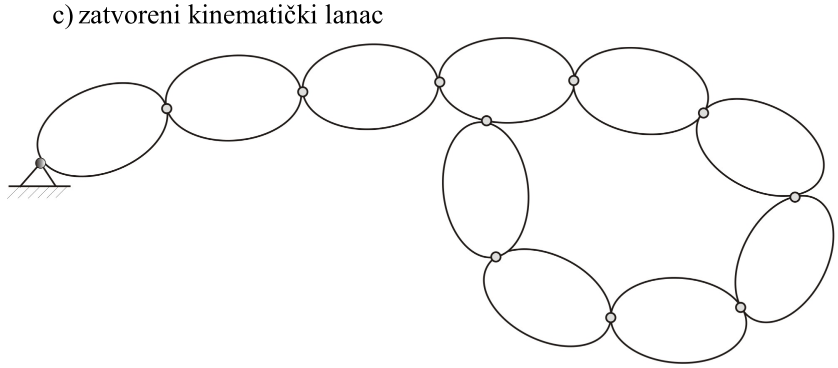
U slučaju otvorenog kin. lanca bez grananja $n_{ss} = n$

b) kinematički lanac sa grananjem sa strukturom drveta

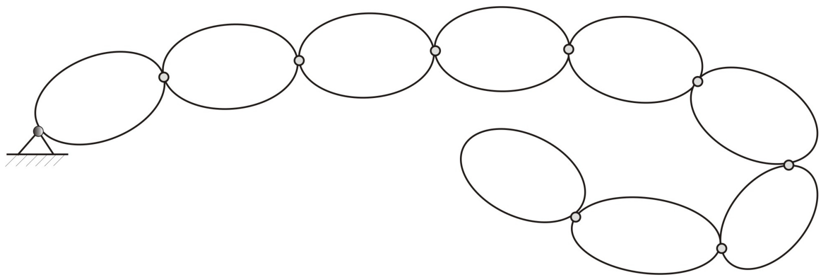


I u slučaju otvorenog kin. lanca sa grananjem takodje je $n_{ss} = n$ (pod uslovom kin. parova V klase)

c) zatvoreni kinematički lanac



Kod zatvorenog kin.lanca je $n_{ss} \neq n$.Zatvoreni lanac presecamo tako da on postaje , u opštem slučaju otvoreni kin. lanac sa grananjem.



$n_{ssotvor} = n$

Pošto smo narušili vezu, moraju biti zadovoljene sledeće relacije:

$f^{\nu}(q^1, q^2, ..., q^9) = 0, \quad \nu = 1, 2, ..., l, \quad l_{\mathbf{max}} = 5$, $\boldsymbol{l}$ - broj dopunskih veza

$n_{ss} = n_{ssotvor} - l$ broj stepeni slobode zatvorenog kin. lanca.

Pošto dva susedna tela (V_{i-1}) i (V_i), povezani zglobom (*i*), čine kinematički par V -te klase koji dopušta jedan stepen slobode kretanja segmenta (V_i) u odnosu na segment (V_{i-1}), za Langranževe koordinate otvorenog kinematičkog lanca predstavljene su skupom pomenutih koordinata q^i: $\left(q^1, q^2, ..., q^n\right)$.

Drugim rečima,za generalisane koordinate q^i biramo:

-translatorno pomeranje segmenata (V_i) u odnosu na (V_{i-1})

-ugaono pomeranje segmenata (V_i) u odnosu na (V_{i-1})

Pri tome koordinata q^i je relativna koordinata i to *unutrašnja.*

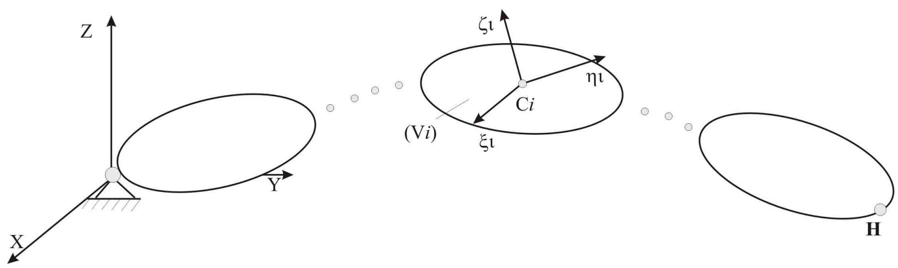
$\left(q^1, q^2, ..., q^n\right) \rightarrow$ *unutrašnje koordinate*

za razliku od $x_H, y_H, z_H, \varphi, \theta, \psi$ koje predstavljaju apsolutne koordinate i one predstavljaju tzv.

$\left(x_H = \overline{q}^1, ..., \varphi = \overline{q}^6\right) \rightarrow$ *spoljašnje koordinate*

Proizvoljna i referentna konfiguracija

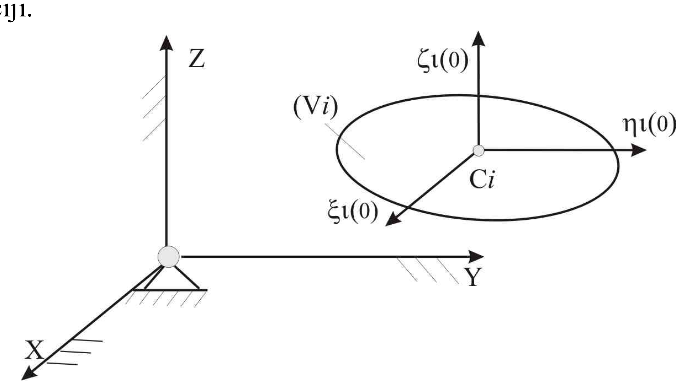
U cilju odredjivanja konfiguracija kinematičkog lanaca uvodimo nepomični pravougli Dekartov koordinatni sistem *Oxyz* (vidi narednu sliku) i *n* lokalnih koordinatnih sistema, takodje pravouglih Dekartovih. Na primer, lokalni koordinatni sistem $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ vezan je za telo (V_i) $(i = 1, 2, ..., n)$, tačka C_i predstavlja centar inercije tela (V_i). U nekoj konfiguraciji otvorenog kinematičkog lanca odgovarajuće ose lokalnih koordinatnih sistema paralelne



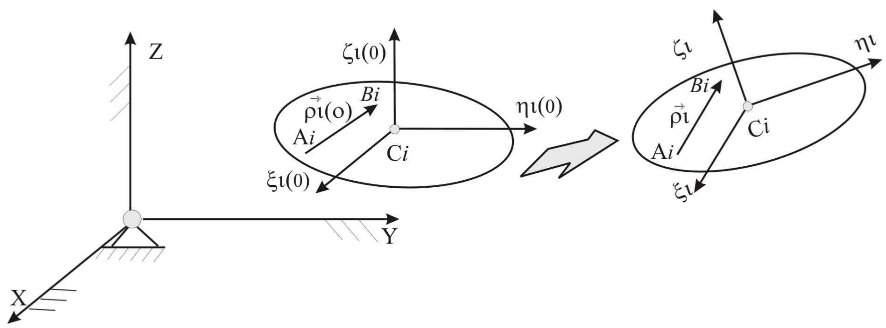
su odgovarajućim osama nepokretnog koordinatnog sistema. Tu konfiguraciju nazivamo *referentnom* i u njoj obično uzimamo da su koordinate koje odredjuju konfiguraciju lanca jednake nuli (iako to nije obavezno). Za tu konfiguraciju koju ćemo označavati sa (*0*) dakle važi:

$$C_{i\xi_{i(0)}} \parallel Ox,\ C_{i\eta_{i(0)}} \parallel Oy,\ C_{i\zeta_{i(0)}} \parallel Oz,\ \ i=1,2,...,n \ ,$$

gde $C_i\xi_{i(0)}\eta_{i(0)}\zeta_{i(0)}$ predstavlja lokalni koordinatni sistem tela (V_i) u referentnoj konfiguraciji.



Neka je vektor $\vec{\rho}_i = \overrightarrow{A_i B_i}$, pri čemu je $|\vec{\rho}_i(0)| = |\vec{\rho}_i|$ (uslov krutosti), pri čemu važi $A_i, B_i \in (V_i)$ i predstavlja sledeću funkciju Langranževih (nezavisnih generalisanih) koordinata: $\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_i\left(q^1, q^2, ..., q^n\right)$.

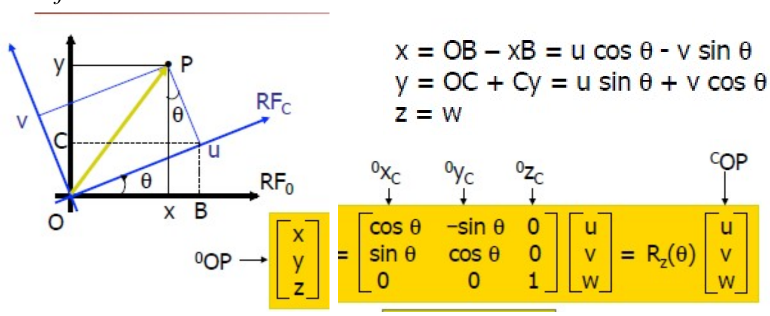


Za koliko se obrnuo vektor $\vec{\rho}_i$ u odnosu na $\vec{\rho}_i(0)$ tj. Oxyz, za toliko se i vezani koordinatni sistem $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ obrnuo u odnosu na $C_i\xi_{i(0)}\eta_{i(0)}\zeta_{i(0)}$, odnosno postoji matrica transformacije $\left[A_{i,0}\right]$ na osnovu koje se uočava da je:

$$\left\{\vec{\rho}_i\right\} = \left[A_{i,0}\right]\left\{\vec{\rho}_{i(0)}\right\}$$

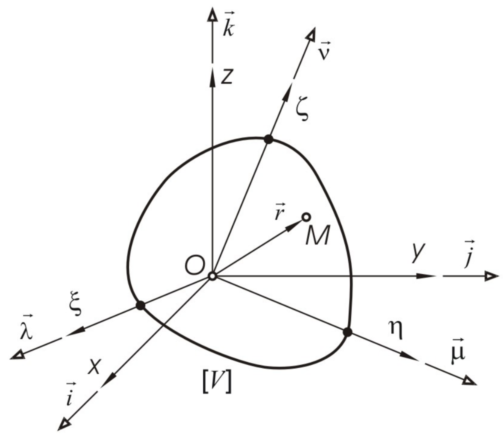
2.Ortogonalne transformacije koordinata

2D slucaj



2.1 Definicija ortogonalnih matrica transformacija

Razmotrimo dva pravougla Dekartova koordinatna sistema: nepomični sistem *Oxyz* i pokretni sistem $O\xi\eta\zeta$ vezan za kruto telo [*V*] (sl.2.1). Jedinični vektori $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ orijentišu ose *Ox*,*Oy*,*Oz* koordinatnog sistema *Oxyz*, a jedinični vektori $\vec{\lambda},\vec{\mu},\vec{\nu}$ orijentišu ose $O\xi,O\eta,O\zeta$ koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$. Očigledno je da sfernim kretanjem koordinatni sistem *Oxyz* možemo dovesti do poklapanja sa koordinatnim sistemom $O\xi\eta\zeta$.



Slika 2.1

Vektor položaja $\vec{r}$ proizvoljne tačke M sa koordinatama $M(x,y,z)$ odnosno $M(\xi,\eta,\zeta)$, može se napisati u obliku:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{2.1}$$

ili:

$$\vec{r} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}. \tag{2.2}$$

Projektovanjem vektorske jednačine (2.2) na ose koordinatnog sistema $Oxyz$, dobijamo vezu između koordinata tačke M u sledećoj formi:

$$\begin{aligned} x &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{i} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{i} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{i}, \\ y &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{j} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{j} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{j}, \\ z &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{k} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{k} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{k}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ili, u matričnom zapisu:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}, \tag{2.4}$$

gde je:

$$[A] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{i} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{k} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Matrica $\left[A\right] \in R^{3\times 3}$ predstavlja matricu transformacije koordinata tačke M iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u koordinatni sistem $Oxyz$. Ukoliko matricu transformacije (2.5) napišemo u obliku:

$$\left[A\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

jasno je da veličine α_{ij} $(i,j=1,2,3)$ predstavljaju kosinuse uglova između dve odgovarajuće ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema. Tako je, na primer,

$$\alpha_{21} = \vec{\lambda}\cdot\vec{j} = \cos\angle(\vec{\lambda},\vec{j}). \tag{2.7}$$

Pošto kolone matrice $[A]$ predstavljaju koordinate jediničnih vektora $\vec{\lambda},\vec{\mu},\vec{\nu}$ izražene u nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} &= \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{21}\vec{j} + \alpha_{31}\vec{k}, \\ \vec{\mu} &= \alpha_{12}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} + \alpha_{32}\vec{k}, \\ \vec{\nu} &= \alpha_{13}\vec{i} + \alpha_{23}\vec{j} + \alpha_{33}\vec{k}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

sledi da je:

$$\det[A] = (\vec{\lambda}\times\vec{\mu})\cdot\vec{\nu} = 1. \tag{2.9}$$

Samim tim, matrica transformacije $[A]$ je nesingularna.

Elementi matrice $[A]$ nisu međusobno nezavisni jer, na osnovu (2.8) i uslova ortogonalnosti i normiranosti vektora $\vec{\lambda},\vec{\mu},\vec{\nu}$, između koeficijenata α_{ij} postoje sledeće veze:

$$\begin{aligned} f^1 &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 - 1 = 0, \\ f^2 &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 - 1 = 0, \\ f^3 &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^3 - 1 = 0, \\ f^4 &= \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0, \\ f^5 &= \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0, \\ f^6 &= \alpha_{13}\alpha_{11} + \alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{33}\alpha_{31} = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pokazuje se da drugih relacija oblika (2.10) nezavisnih od (2.10) nema i da je:

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{11}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{12}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{13}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{21}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{22}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{23}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{31}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{32}} & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_{33}} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{11}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{12}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{13}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{21}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{22}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{23}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{31}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{32}} & \frac{\partial f^6}{\partial \alpha_{33}} \end{bmatrix} = 6, \quad (2.11)$$

odakle sledi da su samo tri koordinate matrice transformacije (2.6) nezavisne. Očigledno je da te tri koordinate ne mogu da se nalaze u istoj koloni ili istoj vrsti.

Nesingularnost matrice $[A]$ dozvoljava da se odredi transformacija inverzna transformaciji:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

gde je:

$$[A][A]^{-1} = [I] \quad ([I] \in R^{3\times 3} \text{ - jedinična matrica}). \quad (2.13)$$

Ako se vektorska jednačina (2.1) projektuje na ose koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, dobijaju se relacije:

$$\begin{aligned} \xi &= x\vec{\lambda}\cdot\vec{i} + y\vec{\lambda}\cdot\vec{j} + z\vec{\lambda}\cdot\vec{k}, \\ \eta &= x\vec{\mu}\cdot\vec{i} + y\vec{\mu}\cdot\vec{j} + z\vec{\mu}\cdot\vec{k}, \\ \zeta &= x\vec{\nu}\cdot\vec{i} + y\vec{\nu}\cdot\vec{j} + z\vec{\nu}\cdot\vec{k}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

ili, u matričnoj formi:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

gde je:

$$[B] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\lambda}\cdot\vec{k} \\ \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} \\ \vec{\nu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Matrica $[B] \in R^{3\times 3}$ predstavlja matricu transformacije koordinata tačke M iz koordinatnog sistema $Oxyz$ u koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$. Iz (2.5) i (2.16) sledi da je:

$$[B] = [A]^T \Leftrightarrow [A] = [B]^T. \quad (2.17)$$

Prva relacija u (2.17) omogućava da se izraz (2.15) napiše u obliku:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \tag{2.18}$$

što u kombinaciji sa relacijom (2.12) daje:

$$([A]^{-1} - [A]^T) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 0. \tag{2.19}$$

Pošto koordinate x,y,z imaju proizvoljnu vrednost, izvodi se sledeći zaključak:

$$[A]^{-1} = [A]^T, \tag{2.20}$$

odnosno:

$$[B] = [A]^T \iff [A] = [B]^T. \tag{2.21}$$

Prema relaciji (2.21), lako se pokazuje da je:

$$[A][A]^{-1} = [B]^T[B] \Rightarrow [B]^{-1} = [B]^T. \tag{2.22}$$

Transformacija (2.4) sa osobinama (2.9) i (2.20) naziva se ortogonalna transformacija. Transformacija inverzna ortogonalnoj, u skladu sa (2.22), takođe je ortogonalna.

2.2Dualni objekti

Vektoru $\vec{a}$ čije su koordinate u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem:

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \tag{2.23}$$

može se pridružiti matrica:

$$[a^d] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Veličine $\{\vec{a}\}$ i $[a^d]$ nazivaju se dualnim objektima pri čemu je $[a^d]$ dualni objekat (drugog reda) objekta $\{\vec{a}\}$ (prvog reda). Važi i obrnuto: $\{\vec{a}\}$ je dualni objekat objekta $[a^d]$. Na dalje ćemo, jasnoće radi, dualnim objektom nazivati isključivo veličinu $[a^d]$ koja je, očigledno, antisimetrična:

$$[a^d]^T = -[a^d]. \tag{2.25}$$

Uočimo da je:

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} -a_3^2 - a_2^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & -a_3^2 - a_1^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

što se može napisati u obliku:

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

odakle se neposredno dobija:

$$[a^d]^2 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad a_3) - a^2 [I], \tag{2.28}$$

odnosno:

$$[a^d]^2 = \{\vec{a}\}(\vec{a}) - a^2 [I], \tag{2.29}$$

gde je $[I] \in R^{3\times 3}$ - jedinična matrica, $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Daljim stepenovanjem dualnog objekta celim pozitivnim brojem, dobija se:

$$[a^d]^3 = -a^2 [a^d], \tag{2.30}$$

jer je:

$$[a^d]\{\vec{a}\} = [a^d] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.31}$$

Takođe je:

$$\begin{aligned} &[a^d]^4 = -a^2 [a^d]^2, \\ &[a^d]^5 = -a^2 [a^d]^3 \Rightarrow [a^d]^5 = a^4 [a^d], \\ &[a^d]^6 = a^4 [a^d]^2, \\ &[a^d]^7 = -a^6 [a^d], \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.32}$$

tako da važi sledeća opšta formula:

$$\begin{aligned} &[a^d]^{2i-1} = (-1)^{i-1} a^{2i-2} [a^d], \\ &[a^d]^{2i} = (-1)^{i-1} a^{2i-2} [a^d]^2, \; i = 1,2,3,\dots \end{aligned} \tag{2.33}$$

Specijalno, ako je $\vec{a} = \vec{e}$, gde je $\vec{e}$ jedinični vektor, dobija se:

$$[e^d]^{2i-1} = (-1)^{i-1}[e^d],$$
$$[e^d]^{2i} = (-1)^{i-1}[e^d]^2,\ i = 1,2,3,\ldots \tag{2.34}$$

2.2.1 VEKTORSKI PROIZVOD I DUALNI OBJEKAT

Neka je dat vektor $\vec{b}$ čije su koordinate u odnosu na sistem $Oxyz$:

$$\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.35}$$

Vektorski proizvod vektora (2.23) i (2.35) biće:

$$\{\vec{a}\times\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{Bmatrix}. \tag{2.36}$$

Pošto je:

$$[a^d]\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{Bmatrix}, \tag{2.37}$$

sledi da je:

$$\{\vec{a}\times\vec{b}\} = [a^d]\{\vec{b}\}. \tag{2.38}$$

Vektorski proizvod je antisimetričan:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}, \tag{2.39}$$

tako da je:

$$\{\vec{a}\times\vec{b}\} = -[b^d]\{\vec{a}\}, \tag{2.40}$$

odnosno, na osnovu relacija (2.38) i (2.40):

$$[a^d]\{\vec{b}\} = -[b^d]\{\vec{a}\}. \tag{2.41}$$

3.Rodrigov obrazac,Rodrigova matrica transformacije

Kruto telo $[V]$ obrće se oko nepomične tačke O tako što vrši jednu konačnu rotaciju oko ose $O\tau$ orijentisane jediničnim vektorom $\vec{e}$ za ugao φ. Pri tome proizvoljna tačka M krutog tela prelazi iz početnog položaja M_0 u krajnji položaj M_1 (sl. 3.2). Vektori položaja početnog i krajnjeg položaja tačke M su:

$$\vec{r}_0 = \vec{OM}_0,\ \vec{r}_1 = \vec{OM}_1. \tag{3.3}$$

Očigledno je da će se početni i krajnji položaj tačke M nalaziti na krugu $[l]$ koji ležu u ravni upravnoj na osu konačne rotacije $O\tau$. Poluprečnik ovog kruga h određen je rastojanjem tačke M u početnom položaju M_0 od ose $O\tau$. Uvedimo tri međusobno ortogonalna jedinična vektora $\vec{s}, \vec{p}, \vec{e}$ na sledeći način:

$$\vec{p} = \frac{\vec{e} \times \vec{r}_0}{\left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|}, \ \vec{s} = \vec{p} \times \vec{e} = -\frac{\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}_0)}{\left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|}. \tag{3.4}$$

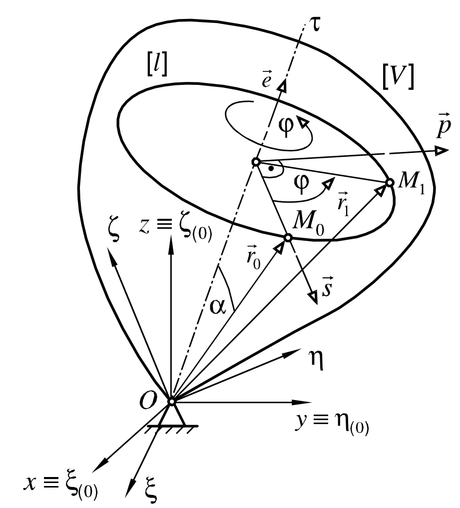
Pošto je:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + M_0\vec{M}_1, \ M_0\vec{M}_1 = (\overline{CM_1}\cos\varphi - \overline{CM_0})\vec{s} + (\overline{CM_1}\sin\varphi)\vec{p} \tag{3.5}$$

i, osim toga:

$$\overline{CM_0} = \overline{CM_1} = \left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|, \tag{3.6}$$

sledi da je:



Slika 3.2

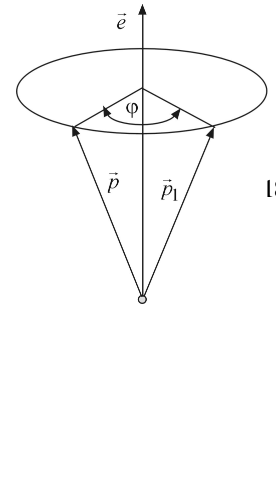
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - \left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|(1-\cos\varphi)\vec{s} + \left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|(\sin\varphi)\vec{p}, \tag{3.7}$$

odnosno, s obzirom na (3.4):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (1-\cos\varphi)\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}_0) + (\sin\varphi)\vec{e} \times \vec{r}_0. \tag{3.8}$$

Izraz (3.8) koji utvrđuje vezu između vektora položaja tačke M u početnom i krajnjem položaju naziva se Rodrigovim obrascem.

Primer. *Poznat je vektor* $\vec{p} = (1 \ \ 0 \ \ 2)^T$. *Odrediti vektor* $\vec{p}_1$ *koji se dobija rotacijom vektora* $\vec{p}$ *oko ose*



koja je određena jediničnim vektorom $\vec{e} = \left(1/\sqrt{3} \quad -1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3}\right)^T$*, za ugao* $\varphi = 60^\circ$.

Na osnovu Rodrigovog obrasca ima se:

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + (1 - \cos\varphi)\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{p}) + (\sin\varphi)\vec{e} \times \vec{p} \tag{3.7}$$

gde su:

$$\vec{e} \times \vec{p} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right),\ \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{p}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = -\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{i} + 2\vec{k} + \left(1 - \cos(\pi/3)\right)\left(-\vec{j} - \vec{k}\right) + \sin(\pi/3)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\right) = -\vec{j} + 2\vec{k} = \left(0 \quad -1 \quad 2\right)^T$$

Neka su Dekartove koordinate tačke M u njenom početnom i krajnjem položaju:

$$\{\vec{r}_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix},\ \{\vec{r}_1\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \tag{3.9}$$

Relacija (3.8) može se napisati u obliku:

$$\{\vec{r}_1\} = [A_r]\{\vec{r}_0\}, \tag{3.10}$$

gde je sa:

$$[A_r] = [I] + (1 - \cos\varphi)[e^d]^2 + (\sin\varphi)[e^d], \tag{3.11}$$

označena tzv. Rodrigova matrica. Matrice koje figurišu u izrazu (3.11) imaju sledeću formu:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ [e^d] = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

pri čemu su sa e_x, e_y, e_z označene projekcije jediničnog vektora $\vec{e}$ na ose nepomičnog koordinatnog sistema $Oxyz$.