Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - прва недеља

Београд, 2025.
NR

Матрица трансформације Вектор положаја може се изразити у односу на непокретни координатни систем $Oxyz$ и покретни координатни систем $O\xi\eta\zeta$.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu} \,/\cdot\vec{i} \,/\cdot\vec{j} \,/\cdot\vec{k}$$

Множењем са ортовима (јединичним векторима) непокретног координатног система $Oxyz$, одређујемо пројекције на тај коорд. сис.

$$\begin{aligned} x &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{i} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{i} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{i} \\ y &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{j} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{j} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{j} \\ z &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{k} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{k} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{aligned}$$

Матрични запис претходно добијених једначина:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{i} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{k} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

где је $[A]$ матрица трансформације координата из покретног координатног система $O\xi\eta\zeta$ у непокретни координатни систем $Oxyz$.

Скаларни производ два орта (јединична вектора) једнак је косинусу угла између њих:

$$\vec{\lambda}\cdot\vec{i} = |\vec{\lambda}|\cdot|\vec{i}|\cdot\cos\left(\vec{\lambda},\vec{i}\right) = \cos\left(\vec{\lambda},\vec{i}\right)$$

Дакле, матрица трансформације је:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\left(\vec{\lambda},\vec{i}\right) & \cos\left(\vec{\mu},\vec{i}\right) & \cos\left(\vec{\nu},\vec{i}\right) \\ \cos\left(\vec{\lambda},\vec{j}\right) & \cos\left(\vec{\mu},\vec{j}\right) & \cos\left(\vec{\nu},\vec{j}\right) \\ \cos\left(\vec{\lambda},\vec{k}\right) & \cos\left(\vec{\mu},\vec{k}\right) & \cos\left(\vec{\nu},\vec{k}\right) \end{bmatrix}$$

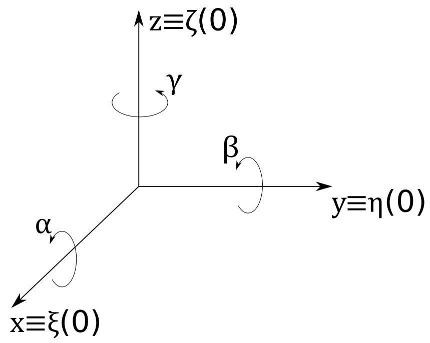
Задатак 1 Одредити матрицу трансформације координата из покретног координатног система $O\xi\eta\zeta$ у непокретни координатни систем $Oxyz$, када се покретни координатни систем обрће око:

а) осе Ox за угао $\alpha = 30^\circ$,

б) осе Oy за угао $\beta = 45^\circ$,

в) осе Oz за угао $\gamma = 60^\circ$, као што је приказано на Сл. 1.

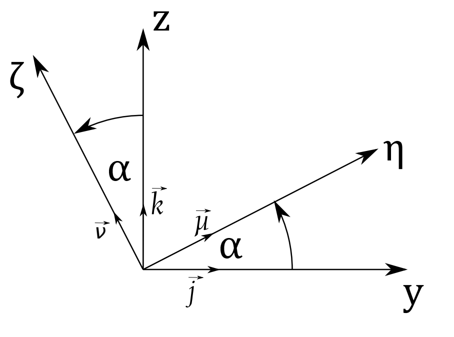
Сматрати да се одговарајуће осе покретног и непокретног координатног система у референтној конфигурацији ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 0^\circ$) појединачно поклапају.



Слика 1

Решење:

а) Након ротације за угао α око осе Ox, у равни Oyz можемо уочити нови положај покретног координатног система $O\xi\eta$ у односу на непокретни координатни систем Oxy и одговарајуће углове између јединичних вектора (јединични векотри $\vec{i}$ и $\vec{\lambda}$ се поклапају и леже у равни управној на посматрану раван, а смер је одређен правилом десне руке тј. смер је ка посматрачу):



Слика 2

Према томе, матрица трансформације је:

$$[A_{x_\alpha}] = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos\alpha & \cos(90^\circ+\alpha) \\ \cos 90^\circ & \cos(90^\circ-\alpha) & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$[A_{x_\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

б) Ротација око осе Oy извршена је у позитивном математичком смеру за угао β. Према томе, матрица трансформације је:

$$[A_{x_\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\left[A_{y_\beta}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

в) Ротација око осе Oz извршена је у позитивном математичком смеру за угао γ. Према томе, матрица трансформације је:

$$\left[A_{z_\gamma}\right] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

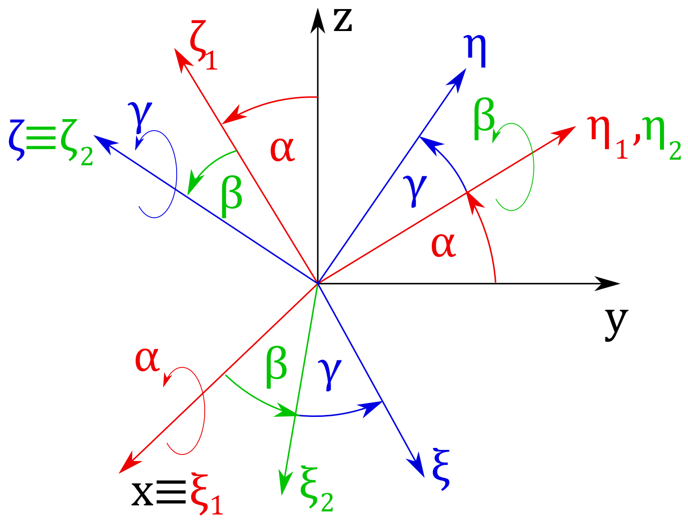
$$\left[A_{z_\gamma}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*** уколико је нека ротација у негативном математичком смеру, резултат косинуса угла се не мења због симетричности косинусне функције, док резултат синусне функције мења знак, нпр. уколико би ротација око осе Oy била у негативном математичком смеру, тада би матрица трансформације имала облик:

$$\left[A_{y_{-\beta}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

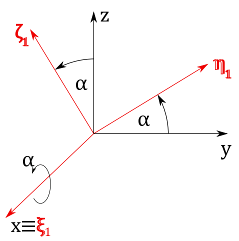
Задатак 2 Израчунати матрицу трансформације за случај да се тело обрће око одговарајућих оса покретног координатног система $O\xi\eta\zeta$ сукцесивно. Нека се прва ротација врши око осе Ox за угао $\alpha = 30^\circ$, друга око осе $O\eta_1$ за угао $\beta = 45^\circ$, а трећа око осе $O\zeta_2$ за угао $\gamma = 60^\circ$. Уводи се претпоставка да се координатни системи $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ у почетном положају поклапају.

$$Oxyz \xrightarrow{\alpha} O\xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow{\beta} O\xi_2\eta_2\zeta_2 \xrightarrow{\gamma} O\xi\eta\zeta$$



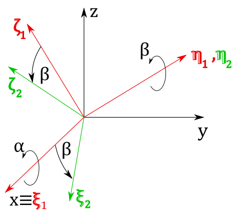
Слика 3

Решење:



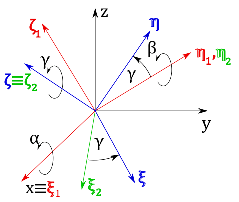
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_{x_\alpha}] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{x_\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix} = \left[A_{\eta_{1_\beta}}\right] \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left[A_{\eta_{1_\beta}}\right] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \left[A_{\zeta_{2_\gamma}}\right] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\left[A_{\zeta_{2_\gamma}}\right] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_{x_\alpha}] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix}$$

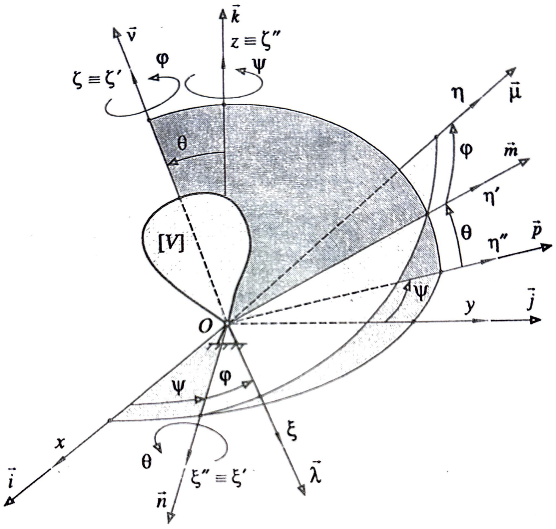
$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix} = \left[A_{\eta_{1_\beta}}\right] \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \left[A_{\zeta_{2_\gamma}}\right] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_{x_\alpha}] \left[A_{\eta_{1_\beta}}\right] \left[A_{\zeta_{2_\gamma}}\right] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0,3536 & -0,6124 & 0,7071 \\ 0,9268 & 0,1268 & -0,3536 \\ 0,1268 & 0,7803 & 0,6124 \end{bmatrix}$$

Задатак 3: Матрица трансформације координата за случај сферног кретања крутог тела чији положај одређују Ојлерови углови
Израчунати матрицу трансформације $[A]$ за случај да се тело $[V]$ обрће око одговарајућих оса покретног координатног система $O\xi\eta\zeta$, сукцесивно. Нека се прва ротација врши око осе Oz за угао $\psi = 30°$, друга око чворне осе On за угао $\theta = 45°$, а трећа око осе $O\zeta$ за угао $\varphi = 60°$. Уводи се претпоставка да се координатни системи $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ у почетном положају поклапају.



Слика 4

Решење:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \left[A_{z_\psi}\right] \begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{Bmatrix} = \left[A_{\xi''_\theta}\right] \begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix} = \left[A_{\zeta'_\varphi}\right] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \left[A_{z_\psi}\right] \left[A_{\xi''_\theta}\right] \left[A_{\zeta'_\varphi}\right] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\left[A_{z_\psi}\right] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[A_{\xi''_\theta}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\left[A_{\zeta'_\varphi}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0,1268 & -0,9267 & 0,3535 \\ 0,7803 & -0,1268 & -0,6123 \\ 0,6123 & 0,3535 & 0,7071 \end{bmatrix}$$