# УВОД

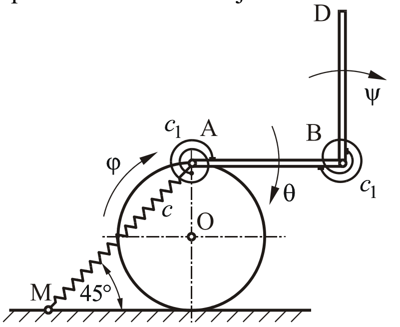
**Осцилације** представљају промене стања система које се потпуно или делимично понављају у једнаким или различитим временским интервалима. Сагласно разноврсности физичких појава и периодичности промена одговарајућих стања материјалних тела, осцилације могу да имају различиту физичку природу. Најједноставнија физичка појава је **механичко кретање**, па је природно очекивати да су прва сазнања о осцилацијама заснована на посматрању периодичних кретања тела. Немогуће је поуздано тврдити када је човек почео свесно да користи и примењује своја сазнања о осцилацијама, али је сигурно да су оне одавно биле присутне у његовој искуственој делатности. У прилог томе, довољно је сазнање колико дубоко у прошлост сеже појава првих музичких инструмената. Поуздано се може тврдити да су почетке савремене науке о осцилацијама утемељили Галилеј (Galileo Galilei,1564-1642), Њутн (Sir Isaac Newton,1643-1727) и Хајгенс (Christian Hyigens,1629-1695) проучавајући кретање клатна. Са развојем механике развијала се и теорија осцилација, као посебан део динамике материјалних система. Према томе, без обзира на посебност осцилаторних кретања, теорија осцилација механичких система почива на основним законима динамике.

И поред разноврсности физичке природе осцилаторних процеса, њихова заједничка особина је **периодичност**, што омогућава да се, за њихово описивање, користи јединствен математички апарат. Математичко моделирање физичких појава представља њихову идеализацију због немогућности да се тачно и у потпуности сагледају и узму у обзир све њихове особине и утицаји. **Диференцијалне једначине** у динамици представљају идеализовану слику кретања, при чему се води рачуна да се њиховим решавањем добију резултати који задовољавају одређене критеријуме тачности, тј. да се одступања од експеримената и мерења налазе у задовољавајућим границама. Често су и тако идеализовани модели веома сложени за решавање и анализу, па се, тамо где је то оправдано, приступа даљој идеализацији занемаривањем величина чији утицај на понашање модела није значајан. Једну од таквих идеализација чине ***линеарни системи***, тј. системи чије је понашање описано линеарним диференцијалним једначинама са константним коефицијентима. Осцилације описане таквим једначинама имају назив ***линеарне осцилације***, иако је у употреби чест назив и ***мале осцилације***, што је у складу са поступком **линеаризације** диференцијалних једначина. Теорија линеарних осцилација је веома развијена а одговарајући математички апарат је доста једноставан и омогућава да се, детаљно и често до коначних решења, анализира дати линеарни модел. У техничкој пракси велики број проблема може да се на задовољавајући начин реши применом линеарне теорије. Међутим, у неким проблемима линеаризација нема смисла, јер може да представља грубу идеализацију разматраног процеса и да ствара суштински искривљену слику о понашању система, односно могу да се јаве неприхватљиве грешке, не само квантитативног, него и квалитативног карактера. Може чак да се деси да се линеаризацијом осцилаторног система добијају једначине са непериодичним решењима и сл..

**Број степена слободе кретања** система је такође последица идеализације система. Сва тела су мање или више деформабилна. Тела чије деформације немају видан утицај на кретање система можемо сматрати идеално крутим. Тела чије деформације не могу да се занемаре, а масе су им занемарљиве у односу на масе осталих тела (нпр. модел еластичне опруге), имају битног утицаја на кретање система. У тим случајевима број степена слободе система је **коначан** и кретање је описано системом обичних диференцијалних једначина.

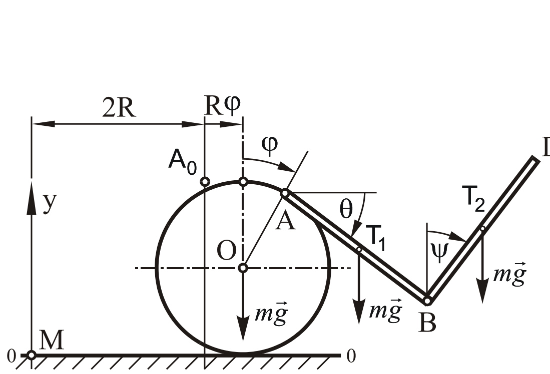
**Пример**(механички систем са три степена слободе):

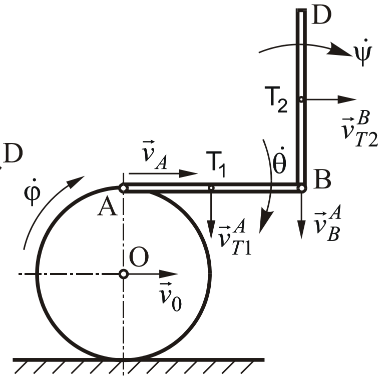
-равнотежни положај: -вектор генералисаних координата:




$$\mathbf{q} = [q^1 q^2 q^3]^T = [\varphi \theta \psi]^T$$

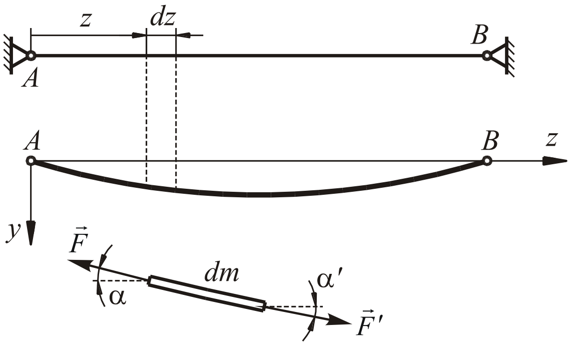
-произвољни положај: -брзине у равнотежном положају:




Уколико се ни масе ни деформације појединих тела не могу занемарити, систем има **бесконачан** број степена слободе кретања (системи са непрекидно расподељеним параметрима), а његово кретање описано је **парцијалним** диференцијалним једначинама.

**Пример**(осцилације затегнуте струне):




$$y = y(z,t) = ?$$

-диференцијална једначина:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \qquad \left( c^2 = \frac{\sigma}{\rho} \right)$$

-почетни услови:

$$t_0 = 0, \quad y(z,0) = f(z), \quad \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = \Phi(z)$$

-контурни услови:

$$y(0,t) = 0 \quad , \qquad y(l,t) = 0$$

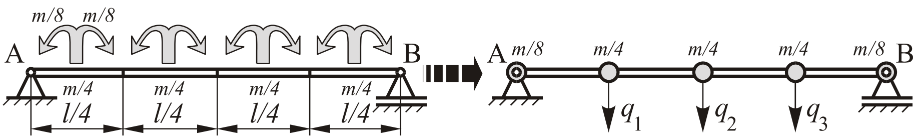
-коначна једначина:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n' \cos(\omega_n t) + B_n' \sin(\omega_n t) \right] \sin(k_n z) \;\; A_n' = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin\left( \frac{n\pi}{l} z \right) dz, \qquad B_n' = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \Phi(z) \sin\left( \frac{n\pi}{l} z \right) dz$$

Ове једначине, у случају осцилација сложенијих еластичних тела, веома су тешке за решавање и анализу, па се приступа изналажењу одговарајућег **дискретизованог** модела са коначним бројем степена слободе, са таквим распоредом маса и крутости, који гарантује да добијена решења дају задовољавајућу слику о понашању основног модела.

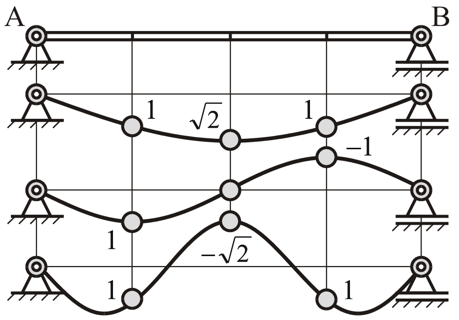
**Пример**(попречне осцилације просте греде):

-редукција маса:




$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}=0 \qquad \left(c^2=\frac{EI_x}{\rho A}\right) \qquad \boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{q}=\mathbf{0}$$

-облици осциловања:




Овај метод, без обзира што дискретизација даје приближну слику основног модела, има велики практични значај, јер је развој рачунарске технике омогућио да се, коришћењем метода **матричног** рачуна, решавају проблеми осцилација са великим бројем степена слободе кретања.

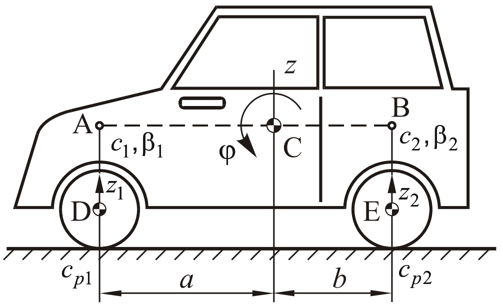
Осцилације представљају периодичне промене стања у односу на неко средње стање. Осцилације механичких система представљају периодично кретање у односу на један утврђени положај система и настају дејством сила које теже да систем доведу у тај положај (***реституционе силе*** или *силе успостављања*). Услед тога, такве силе зависе од положаја система у односу на тај утврђени положај. Показује се да, међу силама које зависе од положаја система, особину реституције имају **потенцијалне** силе. Према томе, да би механички систем вршио осцилаторно кретање, неопходно је да у конфигурационом простору постоји поље потенцијалних сила и изолован положај у односу на који ће систем да се креће осцилаторно. Укупна потенцијална енергија, при томе, представља збир свих потенцијалних енергија којима располаже разматрани систем. Ако, у идеалном случају, на механички систем делују само потенцијалне силе систем је конзервативан (механичка енергија је константна), па се осцилације таквог система називају ***осцилације конзервативних система*** (у уџбеницима је чест назив и ***слободне непригушене осцилације***).

Реално, конзервативни системи не постоје, јер су тела увек изложена дејству отпора кретању, због чега долази до појаве губитака механичке енергије система, односно до њеног претварања у друге облике енергије или до њеног преношења на друге системе. Према томе, конзервативни системи представљају идеализацију остварену занемаривањем неконзервативних сила, уколико одређени критеријуми тачности оправдавају такав поступак. У противном, утицај неконзервативних сила се мора узети у обзир. Отпори кретању настају услед контакта са спољњом средином и услед узајамног деловања елемената система, тако да силе отпора могу бити спољашње и унутрашње. Најчешће су то силе сувог и вискозног трења. Њиховим деловањем осцилације се делимично или потпуно пригушују, тако да имају назив ***пригушене осцилације.***

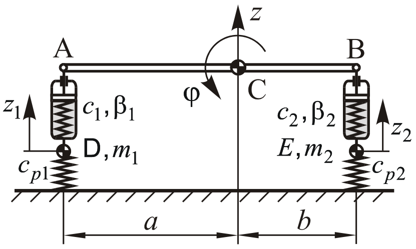
Линеаризацијом система са конзервативним (потенцијалним) силама и неконзервативним силама пригушења добијају се аутономне линеарне диференцијалне једначине, тј. линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима па такви системи имају назив и ***аутономни линеарни системи***.

**Пример** (осцилације закоченог возила у вертикалној равни):

Генералисане координате: z-вертикално померање центра маса, $\varphi$-угао ротације огибљеног дела возила, $z_1$ и $z_2$- вертикална померања центра маса предње и задње осовине. Познати су: маса $m$ и момент инерције $J_{Cy}=J$ огибљеног дела, дужине $a$ и $b$, неогибљене масе $m_1$ и $m_2$ предњих и задњих точкова са осовином, еквивалентне крутости $c_1$ и $c_2$ код предњег и задњег моста, еквивалентне крутости $c_{p1}$ и $c_{p2}$ пнеуматика предњих и задњих точкова, као и еквивалентни коефицијенти пригушења $\beta_1$ и $\beta_2$ предњих и задњих амортизера.




Објекат који осцилује




Механички модел (у равнотежном положају)

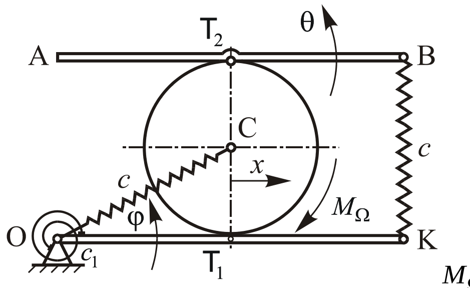
$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_1+\beta_2 & -a\beta_1+b\beta_2 & -\beta_1 & -\beta_2 \\ -a\beta_1+b\beta_2 & \beta_1 a^2+\beta_2 b^2 & a\beta_1 & -b\beta_2 \\ -\beta_1 & a\beta_1 & \beta_1 & 0 \\ -\beta_2 & -b\beta_2 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_1a+c_2b & -c_1 & -c_2 \\ -c_1a+c_2b & c_1a^2+c_2b^2 & ac_1 & -bc_2 \\ -c_1 & ac_1 & c_{p1}+c_1 & 0 \\ -c_2 & -bc_2 & 0 & c_{p2}+c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \varphi \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=0.$$

Математички модел-диференцијалне једначине у матричном облику

***Неаутономни*** *линеарни системи* настају ако је, поред реституционих и отпорних сила, систем изложен дејству ***принудних*** *сила,* тј. неконзервативних сила које експлицитно зависе од времена. У линеарној теорији осцилација разматрају се углавном принудне силе које уз одређена ограничења имају особину периодичности. Осцилације под дејством принудних сила имају назив ***принудне осцилације,*** а, зависно од тога да ли на систем поред потенцијалних сила делују и отпорне силе, деле се на ***принудне непригушене*** и ***принудне пригушене*** *осцилације*.

**Пример** (принудне непригушене осцилације):

-равнотежни положај:




$M_\Omega = M_0 \sin\Omega t$

-диференцијалне једначине:

$$\begin{bmatrix} \frac{121}{6}mR^2 & -\frac{11}{2}mR & \frac{4}{3}mR^2 \\ -\frac{11}{2}mR & \frac{11}{2}m & 0 \\ \frac{4}{3}mR^2 & 0 & \frac{4}{3}mR^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1-3mgR & 3mg & 0 \\ 3mg & \frac{4}{5}c-\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 4cR^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -M_0 \\ \frac{M_0}{R} \\ 0 \end{bmatrix}\sin\Omega t.$$

Како је већ наглашено, услови да постоје осцилације механичког система су да у конфигурационом простору постоји поље потенцијалних сила и положај у односу на који ће систем да периодично мења положај под дејством потенцијалних сила. Показује се, на основу реституционих особина потенцијалних сила, да је то **положај стабилне равнотеже конзервативног система**. Према томе, метод за проучавање осцилација обухвата претходно утврђивање положаја равнотеже у пољу потенцијалних сила а потом испитивање његове стабилности (појам ***стабилност положаја равнотеже*** подразумева особину положаја равнотеже да је у њему стање равнотеже система стабилно), што теорију осцилација уско повезује са теоријим стабилности кретања. На тај начин, положај стабилне равнотеже конзервативног система представља централну тачку у конфигурационом простору у односу на коју се разматра осцилаторно кретање система.

## СТАБИЛНОСТ РАВНОТЕЖЕ МЕХАНИЧКОГ СИСТЕМА

У конфигурационом простору положај система је одређен генералисаним координатама $q_j$ ( $j = 1,2,...,s$ ), где је $s$ број степена слободе система. *Положај равнотеже* је такав положај у коме ће систем мировати (бити у стању равнотеже) све време, ако се у њему налазио у неком тренутку $t_0$ и ако су тада све његове брзине биле једнаке нули. Према томе, ако је систем изложен деловању генералисаних сила $Q_j(q_1, q_2,...,q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2,...,\dot{q}_s)$ $(j = 1,2,\ldots,s)$, услови равнотеже механичког система су

$$Q_j(q_1, q_2,...,q_s; 0,0,...,0) = 0 \qquad ( j = 1,2,....,s ). \qquad (1.1)$$

Уколико су $q_j = q_j^*$ реална решења овог система једначина она одређују положаје могуће равнотеже механичког система у конфигурационом простору. Према томе, ако постоје реална решења једначина (1.1), односно ако у конфигурационом простору постоји положај равнотеже система, одређен координатама $q_j^*$, стање равнотеже система је

$$q_j = q_j^*, \quad \dot{q}_j = 0, \quad \forall t \geq t_0 . \qquad (1.2)$$

Потребан услов да постоји осцилаторно кретање механичког система је да у датом конфигурационом простору постоји положај стабилне равнотеже система, тј. положај равнотеже у коме је стање равнотеже система стабилно. Међутим, једначине (1.1) представљају статичке услове равнотеже и на основу њих не могу да се донесу никакви закључци о стабилности тако добијених положаја равнотеже. О стабилности положаја равнотеже може да се суди само на основу понашања система у његовој околини. Ако је положај равнотеже стабилан кретање система у његовој околини може, под одређеним условима, да буде и осцилаторно. Због тога је, за разматрање осцилаторног кретања, неопходно претходно установити положај стабилне равнотеже система.

### 1.1 Дефиниције стабилности стања равнотеже

Ако се због једноставности, не угрожавајући општост, "почетак" генералисаног координатног система постави у равнотежни положај ( $q_j^* = 0$ ), стање равнотеже (1.2) је

$$q_j = 0, \quad \dot{q}_j = 0, \quad \forall t \geq t_0 . \qquad (1.1.1)$$

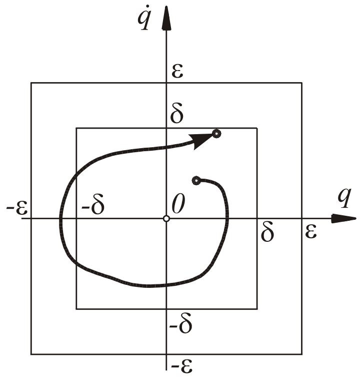
Ремећењем стања равнотеже систем се доводи у стање кретања, одређеног променљивим величинамапоремећајима: $q_j(t), \dot{q}_j(t)$. Понашање система у поремећеном стању зависи од тога да ли је положај равнотеже стабилан или не, па је природно да се о стабилности положаја равнотеже система суди на основу његовог поремећеног стања. У теорији стабилности најчешће се користи Љапуновљева (Александр Михайлович Ляпунов,1857- 1918) дефиниција стабилности кретања, која је овде наведена као дефиниција стабилности стања равнотеже.

*Дефиниција 1. Стање равнотеже* $q_j = 0, \dot{q}_j = 0$ $(j = 1,2,....,s)$ *је стабилно ако, за произвољне* $\varepsilon$ *и* $t_0$, *постоји* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, *тако да су, за свако поремећено стање* $q_j(t), \dot{q}_j(t)$, *испуњени услови*:

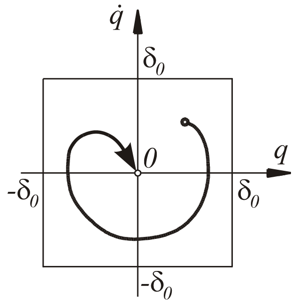
$$|q_j(t)| < \varepsilon, |\dot{q}_j(t)| < \varepsilon, \; |q_j(t_0)| < \delta, |\dot{q}_j(t_0)| < \delta, \; t \in [t_0, \infty). \qquad (1.1.2)$$

На основу овакве дефиниције стабилности стања равнотеже закључује се да ће, за све време при довољно малим почетним поремећајима $q_j(t_0), \dot{q}_j(t_0)$, систем вршити кретање у некој малој унапред датој околини положаја стабилне равнотеже, имајући при томе произвољно мале брзине.

На сл.1.1 дат је приказ дефиниције стабилности стања равнотеже система са једним степеном слободе кретања. Фазни простор (простор стања) система са једним степеном слободе је дводимензиони, тако да је стање система представљено положајем тачке у координатном систему $qO\dot{q}$ са координатним почетком $O(0,0)$, који представља стање равнотеже система. Ако је стање равнотеже стабилно тада, за дату област $\varepsilon$ (одређену квадратом странице $2\varepsilon$ ), може да се одреди област $\delta$ (одређена квадратом странице $2\delta$ ), тако да ће се свако кретање, које у тренутку $t_0$ започиње унутар области $\delta$, за све време вршити унутар области $\varepsilon$ .




*Слика 1.1*




*Слика 1.2*

Као посебан случај стабилности положаја равнотеже издваја се *асимптотска стабилност* дефинисана на следећи начин:

<u>*Дефиниција 2.*</u> *Стање равнотеже* $q_j = 0, \dot{q}_j = 0 \quad (j = 1,2,...,s)$ *је асимптотски стабилно ако постоји вредност* $\delta_0 > 0$ *таква да је:*

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_j(t) = 0\,; \qquad \left|q_j(t_0)\right| < \delta_0, \qquad \left|\dot{q}_j(t_0)\right| < \delta_0 . \qquad (1.1.3)$$

Према оваквој дефиницији положај равнотеже је асимптотски стабилан ако, при довољно малим почетним одступањима од положаја равнотеже и малим почетним брзинама, при неограниченом порасту времена, сва одступања и све брзине теже нули, тј. систем тежи стању равнотеже.

Треба приметити да је асимптотска стабилност стања равнотеже посебан случај опште стабилности, јер услови дати у *дефиницији 2* задовољавају услове дате у *дефиницији 1*. На сл.1.2 дата је интерпретација асимптотске стабилности где сва кретања, која почињу у $\delta_0$ околини (одређеној квадратом странице $2\delta_0$), асимптотски приближавају систем координатном почетку, тј. стању мировања.

Услови стабилности (1.1.2) и асимптотске стабилности (1.1.3) стања равнотеже идентични су условима стабилности и асимптотске стабилности стационарног кретања система, при чему промењљиве величине $q_j$ и $\dot{q}_j$ представљају поремећаје у односу на стање разматраног стационарног кретања.

У складу са наведеним дефиницијама, стабилност положаја равнотеже утврђује се на основу коначних једначина кретања добијених решавањем диференцијалних једначина кретања система. У сложенијим проблемима, нарочито нелинеарним, добијање коначних решења и њихово испитивање је веома тешко и често немогуће. Због тога су посебно интересантни критеријуми стабилности положаја равнотеже који не захтевају претходно решавање диференцијалних једначина кретања.

### 1.2 Стабилност равнотеже конзервативног система

Један од првих познатих критеријума стабилности положаја равнотеже представља Торичелијев (Evangelista Torricelli, 16081647) принцип, према коме ће положај равнотеже система тела у пољу теже бити стабилан ако у њему тежиште тог система заузима најнижи могући положај. Лагранж (Joseph Louis conte de Lagrange, 1736-1813) је овај принцип уопштио за случај произвољних потенцијалних сила и у свом делу *Аналитичка механика* (1788) формулисао теорему која представља критеријум стабилности положаја равнотеже конзервативног система. Међутим, строги доказ ове теореме први је дао Лежен Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859), тако да се ова теорема у литератури јавља под различитим називима (најчешће: Лагранжова теорема, Лежен Дирихлеова теорема, Лагранж-Дирихлеова теорема). У овој књизи користиће се назив Лагранж-Дирихлеова теорема.

<u>*Лагранж-Дирихлеова теорема*</u>. *Положај конзервативног система са холономним стационарним везама у коме потенцијална енергија има изоловани минимум, представља положај стабилне равнотеже система.*

Ова теорема даје само довољан услов стабилности равнотеже конзервативног система, јер не даје могућност да се суди о томе да ли је равнотежа стабилна или нестабилна ако потенцијална енергија нема минимум у положају равнотеже. Међутим постоје теореме (нпр. Љапуновљеве теореме о нестабилности), које овде неће бити наведене, а које дају одговор и на то питање и обезбеђују да се Лагранж-Дирихлеова теорема користи као критеријум стабилности равнотеже конзервативног система. За примену Лагранж-Дирихлеове теореме је битно да потенцијална енергија представља аналитичку функцију и да зависи од свих генералисаних координата система. Према томе, испитивање стабилности равнотеже система своди се на испитивање минимума функције

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, ...., q_s)\,, \qquad (1.2.1)$$

која представља потенцијалну енергију система са стационарним везама. У овом случају на систем делују потенцијалне силе:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \qquad (j = 1,2,\ldots.,s), \tag{1.2.2}$$

тако да услови равнотеже имају облик:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots.,s). \tag{1.2.3}$$

Број ових услова је довољан за одређивање свих могућих положаја равнотеже конзервативног система. Истовремено, они представљају потребне услове екстремума првог реда, па се даљи поступак испитивања стабилности равнотеже, сагласно Лагранж-Дирихлеовој теореми, заснива на испитивању карактера тог екстремума помоћу извода вишег реда.

### 1.2.1 Стабилност равнотеже конзервативног система са једним степеном слободе

Положај система са једним степеном слободе одређен је једном генералисаном координатом, па је потенцијална енергија функција једне промењљиве, тј.

$$\Pi = \Pi(q). \tag{1.2.4}$$

Из потребног услова екстремума:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \tag{1.2.5}$$

добија се, зависно од облика једначине, једна или више вредности координате $q^*$ ,односно један или више могућих положаја равнотеже. Положај, у коме је други извод потенцијалне енергије позитиван, тј.

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=q^*} > 0, \tag{1.2.6}$$

представља, према Лагранж-Дирихлеовој теореми, положај стабилне равнотеже система. Ако је у положају равнотеже други извод потенцијалне енергије негативан, тј. ако потенцијална енергија има максималну вредност, положај равнотеже је нестабилан. Ако је у положају равнотеже други извод потенцијалне енергије једнак нули, о изолованом минимуму потенцијалне енергије, односно о стабилности разматраног положаја равнотеже, може се судити на основу знака извода вишег реда. Међутим, овај случај излази из оквира линеарне теорије тако да ће, у даљем разматрању, услови (1.2.5) и (1.2.6) представљати критеријум стабилности положаја равнотеже конзервативног система са једним степеном слободе.

### 1.2.2 Стабилност равнотеже конзервативног система са више степена слободе

Разматрање стабилности равнотеже конзервативног система са више степена слободе, према Лагранж-Дирихлеовој теореми, своди се на испитивање минимума потенцијалне енергије (1.2.1) као функције више промењљивих у општем случају. Развијањем функције (1.2.1) у ред у околини могућег положаја равнотеже $(q_j = q_j^*)$ добија се

$$\begin{aligned}\Pi = \Pi\,(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_s^*) + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_* (q_j - q_j^*) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j\,\partial q_k}\right)_* (q_1 - q_j^*)(q_k - q_k^*) + \cdots,\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

што се, с обзиром на (1.2.3) и задржавањем на члановима другог реда, своди на

$$\Pi = \Pi\,(q_1^*, q_2^*, \ldots q_s^*) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} C_{jk}(q_j - q_j^*)(q_k - q_k^*), \tag{1.2.8}$$

где су

$$C_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j\,\partial q_k}\right)_*. \tag{1.2.9}$$

Са $(\ )_*$ означено је да су величине у загради израчунате у положају равнотеже.

Понашање функције (1.2.1) у околини тачке $q_j^* \; (j=1,2,\ldots,s)$ одговара понашању њене апроксимације функцијом другог реда (1.2.8). Према томе, ако функција (1.2.8) има изоловани минимум у тачки $q_j^*$, u истој тачки изоловани минимум има и функција (1.2.1). Обрнута тврдња не важи у општем случају. Функција (1.2.8) у тачки $q_j^* \; (j=1,2,\ldots,s)$ испуњава потребне услове екстремума (1.2.3), а карактер тог екстремума зависи искључиво од коефицијената (1.2.9). Функција (1.2.8) има минимум у тачки $q_j^*$ ако матрица, формирана од коефицијената (1.2.9) у облику

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix} \qquad (1.2.10)$$

има особину да су сви њени главни дијагонални минори позитивни, тј.

$$c_{11} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{31} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0. \qquad (1.2.11)$$

Ови услови су, у теорији квадратних форми, познати под називом *Силвестеров критеријум* (James Joseph Sylvester,1814-1897) и они ће, као и коефицијенти $c_{jk}$, бити детаљније разматрани у следећем поглављу ове књиге.

Према томе, тачка $q_j^*$ представљаће положај стабилне равнотеже конзервативног механичког система у конфигурационом простору, ако су испуњени услови (1.2.3) и (1.2.11). Приметимо, да се ови услови, за системе са једним степеном слободе, своде на услове (1.2.5) и (1.2.6).