ЛИНЕАРИЗАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА

Кретање механичког система са коначним бројем степена слободе у конфигурационом простору генералисаних координата q_j описано је Лагранжовим једначинама друге врсте:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}+Q_j \quad (j=1,2,....,s)\,, \qquad (2.1)$$

где су: T - кинетичка енергија, Π - потенцијална енергија система а Q_j - генералисане непотенцијалне силе. За системе са стационарним везама, кинетичка енергија је функција генералисаних координата q_j и свих генералисаних брзина $\dot{q}_j$ а потенцијална енергија је функција свих генералисаних координата.

Поступак линеаризације диференцијалних једначина (2.1) врши се развијањем у степене редове, у околини положаја стабилне равнотеже, чланова:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},\quad \frac{\partial T}{\partial q_j},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j},\quad Q_j \qquad (2.2)$$

и одбацивањем нелинеарних чланова у сваком реду.

Линеарност диференцијалних једначина (2.1), односно њених чланова (2.2), захтева да кинетичка и потенцијална енергија буду квадратне форме одговарајућих промењљивих величина q_j и $\dot{q}_j$. Према томе, ако су диференцијалне једначине (2.1) нелинеарне, уместо њихове непосредне линеаризације, довољно је кинетичку и потенцијалну енергију развити у одговарајуће степене редове у околини положаја стабилне равнотеже, са тачношћу до чланова другог степена

2.1 Особине квадратних и билинеарних форми

Нека су x_α промењљиве величине и нека су $k_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,2,....,n)$ неки константни реални бројеви, тада скаларна функција:

$$U=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}k_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \qquad (2.1.1)$$

представља хомогену квадратну форму промењљивих величина x_α. Ако се уведу матрице: вектор $\mathbf{x}$ (матрица колона), транспоновани вектор $\mathbf{x}^\mathbf{T}$ (матрица врста) и квадратна матрица $\mathbf{K}$, тј.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}^\mathbf{T}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn}\end{bmatrix}, \qquad (2.1.2)$$

хомогена квадратна форма (2.1.1) може да се напише у облику:

$$U=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}, \qquad (2.1.3)$$

односно

$$U = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{x}\,. \tag{2.1.4}$$

Хомогене квадратне форме према свом знаку могу бити: дефинитне, семидефинитне и индефинитне.

Форма (2.1.4) је *дефинитна* ако је једнака нули само када су све промењљиве x_α једнаке нули, односно кад је $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, а има сталан знак кад је $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Форма је *позитивно дефинитна* ако је:

$$U = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ U > 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \end{cases}, \tag{2.1.5}$$

а негативно дефинитна ако је:

$$U = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ U < 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \end{cases}. \tag{2.1.6}$$

Форма је *семидефинитна* ако не мења знак, а може бити једнака нули и кад вектор $\mathbf{x}$ није једнак нули. Форма је *ненегативно семидефинитна* ако је $U \geq 0$, а *непозитивно семидефинитна* ако је $U \leq 0$. Форма је *индефинитна* ако је промењљивог знака.

Скаларна функција

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} k_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta\,, \tag{2.1.7}$$

где су $k_{\alpha\beta}$ реални константни бројеви, је билинеарна форма величина x_α и y_α. Увођењем матричних ознака:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \tag{2.1.8}$$

билинеарна форма (2.1.7) може да се изрази у облику:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{2.1.9}$$

Ако је $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, билинеарној форми (2.1.9) одговара квадратна форма

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} k_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta\,. \tag{2.1.10}$$

На основу дефиниције (2.1.7), односно (2.1.9), билинеарна форма има следеће особине:

1. $K(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = K(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + K(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$ (2.1.11)

2. $K(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = K(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda K(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ($\lambda -$ скалар). (2.1.12)

3. Ако је матрица коефицијената билинеарне форме симетрична, тј. ако је $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\mathbf{T}}$, тада је:

   $$K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = K(\mathbf{b}, \mathbf{a}). \tag{2.1.13}$$

4. Ако је матрица коефицијената билинеарне форме симетрична тада је билинеарна форма коњуговано комплексних вектора $\mathbf{z}$ и $\bar{\mathbf{z}}$ реалан број, тј.:

   $$K(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \in R\,, \tag{2.1.14}$$

   где је R скуп реалних бројева. Ова особина непосредно следи на основу особина 1.,2.,3. Наиме, ако су:

   $$\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}, \qquad \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{x} - i\mathbf{y}\,,$$

   где су: $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ реални вектори а i имагинарна јединица, тада је

   $$K(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = K(\mathbf{x} + i\mathbf{y}, \mathbf{x} - i\mathbf{y}),$$

односно, на основу особина 1. и 2.,

$$K(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})=K(\mathbf{x},\mathbf{x})+iK(\mathbf{y},\mathbf{x})-iK(\mathbf{x},\mathbf{y})-i^2K(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Одавде, с обзиром на особину 3. као и на $i^2=-1$, следи:

$$K(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})=K(\mathbf{x},\mathbf{x})+K(\mathbf{y},\mathbf{y})\Rightarrow K(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})\in R \qquad (2.1.15)$$

5. Ако је матрица коефицијената билинеарне форме позитивно дефинитна тада је билинеарна форма коњуговано комплексних вектора $\mathbf{z}$ и $\bar{\mathbf{z}}$, за $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$,реалан позитиван број, тј.

$$K(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})\in R^+ \qquad (2.1.16)$$

где је R^+ скуп реалних позитивних бројева. Ово је непосредна последица особине 4., на основу чега је билинеарна форма коњуговано комплексних вектора, са позитивно дефинитном матрицом, збир две позитивно дефинитне квадратне форме. Ако је комплексни вектор $\mathbf{z}$ различит од нуле тада су и реални вектори $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ или бар један од њих различити од нуле, тако да на основу дефиниције позитивно дефинитних форми, из (2.1.15) непосредно следи (2.1.16).

Кинетичка и потенцијална енергија линеарних система су квадратне форме, па се може наслутити значај наведених особина билинеарних форми у даљим разматрањима.

2.2 Потенцијална енергија линеарног система. Силвестеров критеријум

Нека је установљен положај стабилне равнотеже система и нека је у њега постављен "почетак" генералисаног координатног система тако да генералисане координате q_j представљају померања система у односу на положај равнотеже $q_j=0$ $(j=1,\ldots,s)$. Потенцијална енергија система је функција генералисаних координата одређена до произвољне адитивне константе, тј.:

$$\Pi=\Pi(q_1,q_2,....,q_s)=f(q_1,q_2,....,q_s)+C_0 \qquad (2.2.1)$$

где је C_0 произвољна константа. Развијањем потенцијалне енергије у околини положаја стабилне равнотеже у ред добија се:

$$\Pi=\Pi(0,0,....,0)+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}\right)_0 q_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j\partial q_k}\right)_0 q_j q_k+O_3. \qquad (2.2.2)$$

где $(\;)_0$ означава да је вредност функције у загради израчуната у положају стабилне равнотеже, а O_3 остатак са члановима вишег реда од два. Избором произвољне константе C_0 из (2.2.1) тако да је у положају стабилне равнотеже потенцијална енергија једнака нули, тј:

$$\Pi(0,0,....,0)=f(0,0,....,0)+C_0=0$$

и узимањем у обзир услова равнотеже:

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}\right)_0=0 \quad (j=1,2,\ldots,s), \qquad (2.2.3)$$

уз одбацивање остатка O_3 као мале величине вишег реда, из (2.2.2) се добија

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j\partial q_k}\right)_0 q_j\,q_k, \qquad (2.2.4)$$

што се, увођењем ознака

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j\,\partial q_k}\right)_0=c_{jk}, \qquad (2.2.5)$$

може написати у облику

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}c_{jk}\,q_j\,q_k. \qquad (2.2.6)$$

На тај начин извршена је апроксимација потенцијалне енергије једном хомогеном квадратном формом генералисаних координата q_j са константним коефицијентима c_{jk}, који представљају друге изводе потенцијалне енергије у положају равнотеже. Одговарајуће генералисане потенцијалне силе су линеарне функције генералисаних координата, тј:

$$Q_{\Pi j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{s} c_{jk}\, q_k \quad (j = 1,2,...,s). \tag{2.2.7}$$

У том смислу потенцијална енергија (2.2.6) представља потенцијалну енергију линеарног система. У положају равнотеже њена вредност је идентички једнака нули и идентички су испуњени услови равнотеже (потребни услови екстремума), тј.:

$$\Pi(0,0,....,0) \equiv 0, \quad Q_{\Pi j}(0,0,....,0) = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 \equiv 0, \quad (j = 1,2,..,s), \tag{2.2.8}$$

Коефицијенти c_{jk} имају назив *коефицијенти крутости* (у литератури су чести и називи: коефицијенти генералисаних крутости, коефицијенти квазиеластичности и сл.), а матрица која је формирана од коефицијената крутости на следећи начин:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix}, \tag{2.2.9}$$

има назив *матрица крутости*. С обзиром на (2.2.5), коефицијенти крутости имају особину $c_{jk} = c_{kj}$ $\forall j,k \in (1,2,....,s)$, тако да је матрица крутости симетрична, тј.

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}, \tag{2.2.10}$$

где је $\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ транспонована матрица крутости. Нека је $\mathbf{q}$ вектор колона генералисаних координата, а $\mathbf{q}^{\mathbf{T}}$ његов транспоновани вектор, тада потенцијална енергија (2.2.6) може да се изрази у облику

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\,\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix}. \tag{2.2.11}$$

а вектор генералисаних потенцијалних сила (2.2.7)

$$\mathbf{Q}_{\Pi} = -\mathbf{C}\,\mathbf{q} \tag{2.2.12}$$

односно

$$\begin{bmatrix} Q_{\Pi 1} \\ Q_{\Pi 2} \\ \vdots \\ Q_{\Pi s} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix}. \tag{2.2.13}$$

У посебном случају када систем има један степен слободе његов положај одређен је генералисаном координатом q. Потенцијална енергија линеарног система са једним степеном слободе и одговарајућа генералисана сила су:

$$\Pi = \frac{1}{2}cq^2, \quad Q_{\Pi} = -cq, \tag{2.2.14}$$

где константа c, ако је положај равнотеже $q = 0$ стабилан, има позитивну вредност сагласно услову (1.9) и представља коефицијент крутости система.

Да би положај равнотеже линеарног система био стабилан, довољно је, сагласно Лаграж-Дирихлеовој теореми, да у околини положаја равнотеже потенцијална енергија (2.2.6) односно (2.2.11) има позитивну вредност, тј., да је потенцијална енергија линеарног система *позитивно дефинитна* квадратна форма. Према томе, критеријум за испитивање стабилности равнотеже линеарног система своди се на испитивање дефинитности хомогене квадратне форме са константним коефицијентима. У том циљу обично се користи теорема позната у линеарној алгебри као *Силвестеров критеријум* који се формулише на следећи начин:

Силвестеров критеријум. *Да би хомогена квадратна форма била позитивно дефинитна потребно је и довољно да су сви главни минори матрице њених коефицијената позитивни.*

Главни минори матрице крутости (2.2.9) су:

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_s = |\mathbf{C}| \qquad (2.2.15)$$

тако да је, према Силвестеровом критеријуму, потенцијална енергија (2.2.6) позитивно дефинитна квадратна форма ако су испуњени услови:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \ldots\ldots\ldots, \Delta_s > 0 \qquad (2.2.16)$$

2.3 Кинетичка енергија линеарног система

Положај материјалног система од n тачака одређен је векторима положаја $\vec{r}_i$ тих тачака који су, за холономне склерономне системе са s степена слободе, функције независних генералисаних координата q_j, тј:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots., q_s) \quad (i = 1,2,\ldots.,n). \qquad (2.3.1)$$

Услед тога апсолутне брзине тачака су:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \qquad (2.3.2)$$

Кинетичка енергија материјалног система представља, по дефиницији, збир кинетичких енергија свих тачака система, тј.:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \qquad (2.3.3)$$

односно, с обзиром на (2.3.2)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k. \qquad (2.3.4)$$

Увођењем ознака:

$$A_{jk} = A_{jk}(q_1, q_2, \ldots., q_s) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (j,k = 1,2,\ldots,s), \qquad (2.3.5)$$

кинетичка енергија добија облик

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{jk}(q_1, q_2, \ldots, q_s)\dot{q}_j \dot{q}_k \qquad (2.3.6)$$

Даљим поступком добија се

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left[A_{jk}(0,0,\ldots.0) + \sum_{l=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_l}\right)_0 q_l + \cdots\cdots\right]\dot{q}_j \dot{q}_k. \qquad (2.3.7)$$

односно

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{jk}(0,0,\ldots.,0)\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_l}\right)_0 q_l \dot{q}_j \dot{q}_k + \cdots \qquad (2.3.8)$$

што кинетичку енергију, развијену у околини положаја равнотеже у ред, представља као збир хомогених форми генералисаних координата и генералисаних брзина са константним кефицијентима. Задржавањем квадратне форме и одбацивањем свих осталих форми као малих величина вишег реда, уз увођење ознака:

$$A_{jk}(0,0,\ldots,0) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)_0 = a_{jk} \quad (j,k = 1,2,\ldots.,s), \qquad (2.3.9)$$

добија се кинетичка енергија линеарних система

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \,. \tag{2.3.10}$$

До овог израза се може доћи непосредно, претходном апроксимацијом апсолутних брзина (2.3.2) у околини положаја равнотеже, у облику:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(0,0,\ldots,0;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_s) = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)_0 \dot{q}_j \,. \tag{2.3.11}$$

Стављањем тако добијених вредности у израз за кинетичку енергију (2.3.3), уз употребу ознака (2.3.9), добија се кинетичка енергија линеарних система (2.3.10).

Коефицијенти a_{jk} називају се *коефицијенти инерције* линеарног система. С обзиром на (2.3.9) коефицијенти инерције имају особину симетрије тј. $a_{jk} = a_{kj}$. Одговарајућа матрица

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix} \tag{2.3.12}$$

назива се *матрица инерције* линеарног система. Увођењем вектора $\dot{\mathbf{q}}$ генералисаних брзина, кинетичка енергија (2.3.10) линеарних система може да се изрази на следећи начин:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_s\end{bmatrix}. \tag{2.3.13}$$

Кинетичка енергија (2.3.6) је функција свих генералисаних брзина и једнака је нули кад систем мирује, а различита је од нуле и позитивна кад се систем креће, тј.

$$T = \begin{cases} 0, & \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \\ T > 0, & \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \end{cases}. \tag{2.3.14}$$

Ове особине задржава и њена апроксимација за линеарни систем, тако да кинетичка енергија линеарног система (2.3.10) односно (2.3.13) представља позитивно дефинитну квадратну форму. Услед тога, матрица инерције (2.3.12), према Силвестеровом критеријуму, има особину да су сви њени главни минори позитивни.

Када на механички систем делују само потенцијалне силе, с обзиром на (2.2.7) и (2.2.12) диференцијалне једначине кретања (2.1) у линеаризованом случају имају облик

$$\sum_{k=1}^{s}\left(a_{jk}\ddot{q}_k + c_{jk}q_k\right) = 0 \quad (j = 1,\ldots,s), \tag{2.3.15}$$

односно

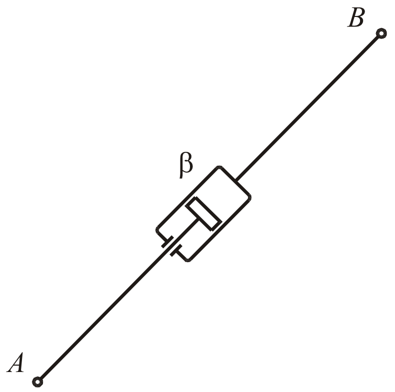
$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \tag{2.3.16}$$

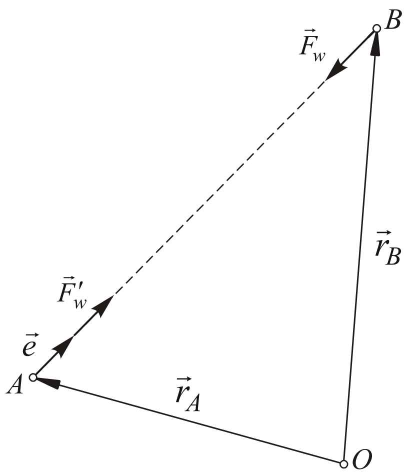
2.4 Силе отпора. Дисипативна функција линеарног система

У случају када на систем, поред потенцијалних, делују и силе отпора, Лагранжове једначине друге врсте имају облик:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_{wj} \quad (j = 1,\ldots,s), \tag{2.4.1}$$

где су Q_{wj} генералисане силе отпора. Силе отпора кретању механичког система могу бити спољашње и унутрашње. Линеарна теорија може успешно да разматра оне проблеме вискозног трења кад је сила сразмерна првом степену брзине. У општем случају, силе отпора настају као интерактивна дејства између појединих делова система супротстављајући се промени њиховог међусобног растојања и зависе од релативних брзина којима се та растојања мењају. На сл. 2.2а схематски је приказан пригушивач који реализује такво дејство, при чему се у тачкама *A* и *B* јавља пар сила отпора $\vec{F}_w$ и $\vec{F}'_w$ супротних смерова и једнаких интензитета (сл. 2.2б).





Слика 2.2а *Слика 2.2б*

Нека је $\vec{\rho}$ вектор положаја тачке B у односу на тачку A $(\vec{\rho} = \overrightarrow{AB})$, а $\vec{e}$ његов јединични вектор $(\vec{\rho} = \rho\vec{e})$ тада је:

$$\vec{u} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e} = \dot{\rho}\vec{e} \qquad (2.4.2)$$

вектор релативне брзине којом се мења растојање тачке B од тачке A. Нека је сила отпора

$$\vec{F}_w = -\beta\vec{u} = -\beta\dot{\rho}\vec{e} \qquad (2.4.3)$$

где позитивна константа β представља одговарајући коефицијент пригушења. Генералисане силе отпора могу да се одреде коришћењем израза за рад сила $\vec{F}_w$ и $\vec{F}'_w$ на могућим померањима њихових нападних тачака, тј.

$$\delta A(\vec{F}_w, \vec{F}'_w) = \vec{F}_w\delta\vec{r}_B + \vec{F}'_w\delta\vec{r}_A = \vec{F}_w\delta(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F}_w\delta\vec{\rho}\,. \qquad (2.4.4)$$

Пошто је:

$$\delta\vec{\rho} = \delta(\rho\vec{e}) = \delta\rho\vec{e} + \rho\delta\vec{e}\,, \quad \vec{e}\vec{e} = 1\,, \quad \delta(\vec{e}\vec{e}) = 0 \Rightarrow \vec{e}\,\delta\vec{e} = 0\,,$$

тада је, с обзиром на (2.4.3),

$$\delta A(\vec{F}_w, \vec{F}'_w) = -\beta\dot{\rho}\vec{e}(\delta\rho\vec{e} + \rho\delta\vec{e}) = -\beta\dot{\rho}\delta\rho\,. \qquad (2.4.5)$$

Нека је систем изложен дејству p таквих парова сила $\vec{F}_{w\alpha}, \vec{F}'_{w\alpha}$ $(\alpha = 1,\ldots,p)$, тада је укупни рад сила пригушења на могућим померањима:

$$\delta A_w = \sum_{\alpha=1}^{p}\delta A(\vec{F}_{w\alpha}, \vec{F}'_{wa}) = -\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_\alpha\dot{\rho}_\alpha\delta\rho_\alpha\,. \qquad (2.4.6)$$

Растојања ρ_α су функције генералисаних координата q_j, тј.

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(q_1, q_2, \ldots., q_s) \quad (\alpha = 1,2,\ldots.,p)$$

тако да се, применом правила варирања и диференцирања добија

$$\delta\rho_\alpha = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_j}\delta q_j\,, \quad \dot{\rho}_\alpha = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\,. \qquad (2.4.7)$$

Кад се ове вредности уврсте у израз (2.4.6) добија се

$$\delta A_w = -\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_\alpha\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_k\delta q_j\,. \qquad (2.4.8)$$

Променом редоследа операција сабирања и увођењем ознака

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_\alpha\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_k} = B_{jk} \qquad (2.4.9)$$

израз (2.4.8) добија облик

$$\delta A_w = -\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} B_{jk}\dot{q}_k \delta q_j . \qquad (2.4.10)$$

Варијације δq_j су међусобно независне и представљају генералисана могућа померања, па је рад генералисаних сила отпора Q_{wj} на могућим померањима:

$$\delta A_w = \sum_{j=1}^{s} Q_{wj}\delta q_j . \qquad (2.4.11)$$

Упоређивањем овог израза и (2.4.10) добијају се генералисане силе отпора

$$Q_{wj} = -\sum_{k=1}^{s} B_{jk}\dot{q}_k \quad (j = 1,\ldots,s) . \qquad (2.4.12)$$

Величине B_{jk} су, с обзиром на (2.4.9), функције генералисаних координата у општем случају, тако да генералисане силе, иако линеарно зависе од генералисаних брзина, нису линеарне функције. Да би једначине (2.4.1) биле линеарне потребно је линеаризовати и генералисане силе отпора. У том циљу довољно је у (2.4.12) развити у ред величине B_{jk} у околини положаја равнотеже, тј:

$$Q_{wj} = -\sum_{k=1}^{s}\left[B_{jk}(0,0,\ldots,0) + \sum_{l=1}^{s}\left(\frac{\partial B_{jk}}{\partial q_l}\right)_0 q_l + \cdots\cdots \right]\dot{q}_k$$

а затим одбацити све нелинеарне чланове, тако да се добија

$$Q_{wj} = -\sum_{k=1}^{s} b_{jk}\dot{q}_k \qquad (2.4.13)$$

где су

$$b_{jk} = B_{jk}(0,0,\ldots,0) = \sum_{\alpha=1}^{p}\beta_\alpha \left(\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_k}\right)_0 \quad (j,k = 1,2,\ldots,s) \qquad (2.4.14)$$

Константе b_{jk} називају се *коефицијенти пригушења* (или генералисани коефицијенти пригушења) линеарних система. Они имају особину симетрије $(b_{jk} = b_{kj})$. Симетрична матрица чији су елементи коефицијенти пригушења и која је формирана на следећи начин

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{bmatrix} \qquad (2.4.15)$$

назива се *матрица пригушења*. Генералисане силе (2.4.13) су линеарне функције генералисаних брзина са константним коефицијентима пригушења. Одговарајући вектор генералисаних сила пригушења је

$$\mathbf{Q}_w = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \qquad (2.4.16)$$

односно

$$\begin{bmatrix} Q_{w1} \\ Q_{w2} \\ \vdots \\ Q_{ws} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} . \qquad (2.4.17)$$

Скаларна функција

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_\alpha u_\alpha^2 \quad (u_\alpha = \dot{\rho}_\alpha) \qquad (2.4.18)$$

која, с обзиром на (2.4.7) и (2.4.9), има облик

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\beta_\alpha \frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_j\,\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} B_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k , \qquad (2.4.19)$$

представља такозвану *дисипативну функцију* система, познату под називом *Релијева функција* (John William Strutt, Lord Rayleigh, 1842-1919). Генералисане силе пригушења (2.4.12) могу да се изразе као

$$Q_{wj} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \tag{2.4.20}$$

Да би се на овај начин помоћу дисипативне функције добиле генералисане силе пригушења линеарних система (2.4.13), односно (2.4.16) потребно је дисипативну функцију (2.4.19) апроксимирати квадратном формом са константним коефицијентима, што се постиже када се промењљиви коефицијенти B_{jk} у (2.4.19) замене њиховим вредностима (2.4.14), израчунатим у положају стабилне равнотеже $(q_j = 0)$. Тако се добија дисипативна функција линеарних система у облику хомогене квадратне форме генералисаних брзина са константним коефицијентима

$$\Phi = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} b_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k\,. \tag{2.4.21}$$

Ова квадратна форма је ненегативно семидефинитна у општем случају, тј. може бити једнака нули и када је $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$. Семидефинитност је последица дефиниције (2.4.18). Наиме, релативне брзине $\vec{u}_\alpha$ могу бити једнаке нули и кад се систем креће. Оваква форма омогућава да се генералисане силе пригушења (2.4.13) линеарних система изразе у облику (2.4.20), тј:

$$Q_{wj} = -\sum_{k=1}^{s} b_{jk}\dot{q}_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad \vee \quad \mathbf{Q}_w = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \tag{2.4.22}$$

За линеарне системе, Лагранжове једначине друге врсте (2.4.1), с обзиром на (2.4.22) и форме (2.2.11),(2.3.13) и (2.4.21), своде се на

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0\,, \tag{2.4.23}$$

односно, у матричном облику

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\mathbf{q} = \mathbf{0}\,. \tag{2.4.24}$$

Овде је потребно да се укаже на једно важно својство функције дисипације. Рад генералисаних сила пригушења на елементарном померању, као једном од могућих померања система,

$$d'A_w = \sum_{j=1}^{s} Q_{wj}\,dq_j = \mathbf{Q}_w^{\mathbf{T}} d\mathbf{q} \tag{2.4.25}$$

с обзиром на (2.4.22) може да се изрази у облику

$$d'A_w = -(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}})^{\mathbf{T}} d\mathbf{q} = -\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}} d\mathbf{q} = -\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\,d\mathbf{q}\,,$$

тако да је снага отпорних сила

$$P_w = \frac{d'A_w}{dt} = -\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = -2\Phi. \tag{2.4.26}$$

Према томе дисипативна функција представља меру снаге сила пригушења. Када на систем, поред отпорних сила, делују и потенцијалне силе, укупна снага је

$$P = P_\pi + P_w = -(\mathbf{C}\,\mathbf{q} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}})^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{q}} = -\frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi,$$

па се, на основу теореме о промени кинетичке енергије у диференцијалном облику

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi\,,$$

добија закон дисипације механичке енергије деловањем сила пригушења

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -2\Phi \leq 0. \tag{2.4.27}$$

Механичка енергија система представља монотоно опадајућу функцију, што значи да деловањем сила пригушења долази до губитка (расипања) механичке енергије. Брзина расипања (дисипације) механичке енергије линеарних система једнака је двострукој вредности одговарајуће дисипативне функције (функције расипања) што и оправдава њен назив. Сагласно томе, силе пригушења имају често и назив *дисипативне силе*.

2.5 Принудне силе

Ако на механички систем, осим потенцијалних и дисипативних сила, делују силе које експлицитно зависе од времена, тада настају додатне принудне промене стања система. Такве силе имају назив *принудне силе*. За разматрање осцилаторног кретања посебан значај имају принудне силе са неким периодичним особинама које узрокују додатне периодичне промене стања осцилаторног система - *принудне осцилације*. Периодичне особине принудне силе могу да се манифестују као: периодична промена њеног интензитета, периодична промена њеног правца и, у општем случају, периодична промена интензитета и правца истовремено. Нека је $\vec{F}_\Omega$ принудна сила са особином периодичности

$$\vec{F}_\Omega(t) = \vec{F}_\Omega(t + \mathrm{T}_\Omega), \tag{2.5.1}$$

где је T_Ω период принудне силе и нека је $\vec{r}$ вектор положаја нападне тачке принудне силе. Тада је њен рад на могућем померању

$$\delta A_\Omega = \vec{F}_\Omega \delta\vec{r} = \sum_{j=1}^{s} \vec{F}_\Omega \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_{\Omega j} \delta q_j = \mathbf{Q}_\Omega^{\mathbf{T}} \delta\mathbf{q}, \tag{2.5.2}$$

где је $\mathbf{Q}_\Omega$ вектор генералисаних принудних сила које, у општем случају, с обзиром на (2.5.2), имају облик

$$Q_{\Omega j} = Q_{\Omega j}(q_1, q_2, \ldots, q_s; t) = \vec{F}_\Omega \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \quad (j = 1,2,\ldots,s). \tag{2.5.3}$$

Линеаризација система у околини положаја стабилне равнотеже намеће да се дејство принудних сила на систем разматра у истој области. У том смислу, апроксимација принудних сила врши се тако што се виртуелни рад (2.5.2) апроксимира виртуелним радом принудне силе на могућем померању у односу на положај стабилне равнотеже, тј.

$$\delta A_\Omega = \sum_{j=1}^{s} \left(\vec{F}_\Omega \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right)_0 \delta q_j, \tag{2.5.4}$$

одакле су генералисане принудне силе линеарних система

$$Q_{\Omega j} = \left(\vec{F}_\Omega \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right)_0 = Q_{\Omega j}(0,0,\ldots,0;t) = Q_{\Omega j}(t). \tag{2.5.5}$$

Ако је сила $\vec{F}_\Omega$ периодична онда ту особину имају и одговарајуће генералисане принудне силе линеарних система, тј:

$$Q_{\Omega j}(t) = Q_{\Omega j}(t + \mathrm{T}_\Omega). \tag{2.5.6}$$

Ако на систем истовремено делује r принудних сила $\vec{F}_\Omega^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1,2,\ldots,r)$ са периодичним особинама, различитих периода $\mathrm{T}_{\Omega\alpha}$ у општем случају, генералисане принудне силе добијају се као збир генералисаних сила са одговарајућим периодима, тј:

$$Q_{\Omega j} = \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\vec{F}_\Omega^{(\alpha)} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right)_0 = \sum_{\alpha=1}^{r} Q_{\Omega j}^{(\alpha)}(t), \tag{2.5.7}$$

где су $\vec{r}_\alpha$ вектори положаја нападних тачака одговарајућих принудних сила $\vec{F}_\Omega^{(\alpha)}$.

У општем случају, када на систем, поред потенцијалних сила и сила пригушења, делују принудне силе, Лагранжове једначине друге врсте линеарних система су неаутономне облика

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_{\Omega j}(t), \quad (j = 1,2,\ldots,s), \tag{2.5.7}$$

односно, у матричном облику

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\mathbf{q} = \mathbf{Q}_\Omega(t). \tag{2.5.8}$$

Анализа осцилација, описаних овим диференцијалним једначинама, захтева да генералисане принудне силе, осим периодичности, испуњавају додатне услове.