ODABRANA POGLAVLJA IZ MEHANIKE

Doktorske studije - predavanja

Josif Vuković

1. OSNOVI ANALITIČKE MEHANIKE

1.1. Slobodni i neslobodni mehanički sistemi. Veze

Stanje mehaničkog sistema od N materijalnih tačaka $M_\nu\ (\nu = 1,2,\dots,N)$ određeno je, u svakom trenutku t, položajem i brzinama svih njegovih tačaka u inercijalnom sistemu referencije. Odnosno, u inercijalnom sistemu referencije, stanje sistema određeno je vektorima položaja $r_\nu = \overrightarrow{OM_\nu}$ i brzinama $\vec{v}_\nu = \dot{\vec{r}}_\nu$, gde je O neka izabrana nepokretna tačka. Ukoliko se u inercijalni sistem uvede nepokretni Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$, stanje sistema određeno je promenljivim skalarnim veličinama: koordinatama x_ν, y_ν, z_ν i projekcijama brzina $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ Ako su sve ove veličine međusobno nezavisne, sve tačke M_i sistema mogu zauzimati bilo koji položaj u prostoru i imati bilo koju brzinu, saglasno silama koje deluju na sistem. U tom slučaju, skup materijalnih tačaka predstavlja *slobodan mehanički sistem* . Međutim, ako je kretanje posmatranih tačaka ograničeno neposrednim delovanjem nekih materijalnih tela, ove veličine nisu međusobno nezavisne, pa u tom slučaju skup materijalnih tačaka predstavlja *neslobodan mehanički sistem*. Tela koja ograničavaju kretanje posmatranog mehaničkog sistema, svojim oblikom i položajem, određuju konfiguraciju u prostoru po kojoj mehanički sistem može da se kreće. Usled toga, koordinate položaja i projekcije brzina tačaka sistema moraju da zadovoljavaju relacije:

$$f_\mu(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_{1,} \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N \dot{z}_N; t) = 0 \quad (\mu = 1,2,\dots,m < 3N) \tag{1.1.1}$$

koje predstavljaju *jednačine veza mehaničkog sistema* (*mehaničke veze*). U daljem izlaganju, radi jednostavnosti, ovaj opšti oblik jednačina veza biće zamenjen simboličkom formom:

$$f_\mu(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu; t) = 0 \quad (\nu = 1,2,\dots,N), (\mu = 1,2,\dots,m < 3N), \tag{1.1.2}$$

gde su $\dot{\vec{r}}_\nu = \dfrac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \vec{v}_\nu$ brzine tačaka sistema.

1.2. Klasifikacija veza

Ako leve strane jednačina (1.1.1) odnosno (1.1.2) zavise samo od položaja sistema i vremena, tj.:

$$f_\alpha(\vec{r}_\nu, t) = 0 \quad (\nu = 1,2,\dots,N), (\alpha = 1,2,\dots,p), \tag{1.2.1}$$

odnosno:

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t) = 0 \quad (\alpha = 1,2,\dots,p), \tag{1.2.2}$$

veze su *konačne (geometrijske)*. U opštem slučaju, kada su i brzine tačaka sistema podvrgnute ograničenjima, veze (1.1.2) su *diferencijalne (kinematičke)*. U daljem izlaganju biće razmatrane samo linearne diferencijalne veze[1)] oblika:

$$\varphi_\beta(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu; t) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{l}_{\beta\nu} \dot{\vec{r}}_\nu + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\ldots,q), \tag{1.2.3}$$

odnosno:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_{\beta\nu}\dot{x}_\nu + B_{\beta\nu}\dot{y}_\nu + C_{\beta\nu}\dot{z}_\nu) + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\ldots,q), \tag{1.2.4}$$

gde su vektori $\vec{l}_{\beta\nu} = A_{\beta\nu}\vec{i} + B_{\beta\nu}\vec{j} + C_{\beta\nu}\vec{k}$ i skalari D_β, u opštem slučaju, funkcije promenljivih x_ν, y_ν, z_ν, t.

Konačne veze (1.2.1) odnosno (1.2.2), diferenciranjem po vremenu, mogu se zameniti diferencijalnim vezama:

$$\sum_{\nu=1}^{N} grad_\nu f_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,p) \tag{1.2.5}$$

odnosno:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,p). \tag{1.2.6}$$

Diferencijalne veze (1.2.3) mogu se podeliti na *integrabilne i neintegrabilne*. Ako među diferencijalnim vezama (1.2.3) postoji s integrabilnih veza one se mogu zameniti ekvivalentnim konačnim vezama:

$$\psi_\eta(\vec{r}_\nu; t) + c_\eta = 0 \qquad (\eta = 1,2,\ldots,s \le q), \tag{1.2.7}$$

gde su c_η proizvoljne konstante. U protivnom, diferencijalne veze su neintegrabilne.

Diferencijalne veze (1.2.4), množenjem sa dt, mogu da se napišu obliku:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_{\beta\nu}dx_\nu + B_{\beta\nu}dy_\nu + C_{\beta\nu}dz_\nu) + D_\beta dt = 0 \qquad (\beta = 1,2,\ldots,q). \tag{1.2.8}$$

Ako su leve strane nekih od ovih jednačina totalni diferencijali funkcija promenljivih x_ν, y_ν, z_ν, t te jednačine su integrabilne i mogu se zameniti

---

[1)] Nelinearne diferencijalne veze imaju više teorijski značaj tako da će njihovo razmatranje biti izostavljeno u ovom tekstu.

ekvivalentnim konačnim vezama (1.2.7).
Mehanički sistem, izložen delovanju konačnih ili integrabilnih diferencijalnih veza, ima naziv *holonomni mehanički sistem.* Mehanički sistem, izložen delovanju neintegrabilnih diferencijalnih veza, ima naziv *neholonomni mehanički sistem*. Iz praktičnih razloga, u literaturi je uobičajeno da i veze imaju odgovarajuće nazive: *holonomne veze* i *neholonomne veze.*
Konačna veza je *skleronomna (stacionarna)* ako ne zavisi eksplicitno od vremena, tj.:

$$f(\vec{r}_\nu) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0\,. \tag{1.2.9}$$

Ona se ne kreće ili ne menja svoj oblik. U protivnom, konačna veza je *reonomna (nestacionarna),* a u njenoj jednačini eksplicitno figuriše vreme.
Linearna diferencijalna veza je *skleronomna (stacionarna)* ako je homogena i ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. ako ima oblik

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{l}_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = 0\,, \qquad \frac{\partial \vec{l}_\nu}{\partial t} \equiv 0,\,. \tag{1.2.10}$$

odnosno:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_\nu \dot{x}_\nu + B_\nu \dot{y}_\nu + C_\nu \dot{z}_\nu) = 0, \qquad \frac{\partial A_\nu}{\partial t} \equiv 0, \frac{\partial B_\nu}{\partial t} \equiv 0, \frac{\partial C_\nu}{\partial t} \equiv 0. \tag{1.2.11}$$

U *reonomne (nestacionarne)* veze spadaju sve homogene difrencijalne veze u čijim jednačinama eksplicitno figuriše vreme, kao i sve diferencijalne nehomogene veze, bez obzira da li zavise ili ne zavise eksplicitno od vremena. Naime, ukoliko diferencijalne veze ne zavise eksplicitno od vremena, iz oblika jednačina (1.2.8) se vidi da vreme ulazi u vidu diferencijala dt uz koeficijente nehomogenosti D_β.

Veza mehaničkog sistema je *zadržavajuća* ako, u toku kretanja, položaj i brzine mehaničkog sistema, zadovoljavaju njenu jednačinu. Mehanički sistem je tada podvrgnut dejstvu veze i kreće se u skladu sa vezom (sistem je „ na vezi”). U protivnom, ako na nekim delovima kretanja sistem napušta vezu, položaj i brzine sistema ne zadovoljavaju jednačinu veze.U tom slučaju veze su *nezadržavajuće* što može da se izrazi u vidu nejednakosti:

$$f(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu; t) \geq 0\,. \tag{1.2.12}$$

Prema tome, na delovima putanje sistema kada je $f = 0$, nezadržavajuća veza se razmatra kao zadržavajuća, a na delovima putanje kada je $f > 0$ (ili < 0) , veza ne deluje na sistem i ne razmatra se. U daljem izlaganju razmatraće se samo zadržavajuće veze. Često se nezadržavajuće veze nazivaju *jednostrano* *zadržavajuće* jer dele prostor na dostupni i nedostupni deo za kretanje mehaničkog sistema. Veze koje ne dozvaljavaju sistemu da ih napusti pod bilo kakvim uticajima uobičajeno se nazivaju *obostrano zadržavajuće veze.*

1.3 Moguće brzine. Moguća pomeranja. Virtuelna pomeranja

Neka je mehanički sistem izložen delovanju p konačnih i q diferencijalnih veza. Diferenciranjem po vremenu, konačne veze (1.2.1) mogu se zameniti ekvivalentnim diferencijalnim vezama, tako da sve jednačine veza mogu da se izraze u obliku:

$$\sum_{\nu=1}^{N} grad_\nu f_\alpha \cdot \vec{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,p), \tag{1.3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{\beta\nu} \cdot \vec{v}_\nu + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\ldots,q). \tag{1.3.2}$$

Svi vektori $\vec{v}_\nu$, koji zadovoljavaju $p+q<3N$ jednačina (1.3.1) i (1.3.2), predstavljaju *moguće brzine* tačaka sistema, tj. one brzine koje mogu da imaju tačke mehaničkog sistema pri kretanju u skladu sa vezama pri delovanju bilo kakvih sistema sila. Prema tome, broj mogućih brzina je beskonačan. Međutim, vektori mogućih brzina pripadaju vektorskom prostoru V^n čiji je broj dimenzija $n = 3N-(p+q)$ i čiju bazu čini n proizvoljno izabranih nezavisnih vektora mogućih brzina preko kojih možemo izraziti sve ostale moguće brzine. *Stvarne brzine* su one koje sistem ima, pri kretanju u skladu sa vezama, pod dejstvom datog sistema sila i sa datim početnim uslovima. Stvarne brzine pripadaju mogućim brzinama.
Množenjem jednačina (1.3.1) i (1.3.2) sa ifinizitemalnim priraštajem vremena dt, s obzirom da je $\vec{v}_\nu dt = d\vec{r}_\nu$, dobija se:

$$\sum_{\nu=1}^{N} grad_\nu f_\alpha \cdot d\vec{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \tag{1.3.3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{l}_{\beta\nu} d\vec{r}_\nu + D_\beta dt = 0. \tag{1.3.4}$$

Vektori $d\vec{r}_\nu$ koji zadovoljavaju jednačine (1.3.3) i (1.3.4) predstavljaju *moguća pomeranja* tačaka sistema.
Ako se, pored mogućeg pomeranja sistema u nekom trenutku, određenog vektorima $d\vec{r}_\nu$, uvede u razmatranje i neko drugo moguće pomeranje u istom trenutku, određeno vektorima $d'\vec{r}_\nu$, dobija se još jedan sistem jednačina:

$$\sum_{\nu=1}^{N} grad_{\nu} f_{\alpha} \cdot d'\vec{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0\,, \tag{1.3.5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{l}_{\beta\nu} d'\vec{r}_{\nu} + D_{\beta} dt = 0\,. \tag{1.3.6}$$

Oduzimanjem jednačina (1.2.3) i (1.3.4) od odgovarajućih jednačina (1.3.5) i (1.3.6), dobija se:

$$\sum_{\nu=1}^{N} grad_{\nu} f_{\alpha} \cdot \delta\vec{r}_{\nu} = 0 \tag{1.3.7}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{l}_{\beta\nu} \cdot \delta\vec{r}_{\nu} = 0\,, \tag{1.3.8}$$

gde svaki vektor $\delta\vec{r}_{\nu}$ predstavlja razliku dva moguća pomeranja u istom trenutku, tj.:

$$\delta\vec{r}_{\nu} = d'\vec{r}_{\nu} - d\vec{r}_{\nu}\,. \quad (\nu = 1,2,\ldots,N)\,. \tag{1.3.9}$$

Vektori $\delta\vec{r}_{\nu}$ su *virtuelna pomeranja*[1)] mehaničkog sistema. Jednačine (1.3.7) i (1.3.8) su uslovi koje veze nameću virtuelnim pomeranjima. U opštem slučaju, ovi uslovi se razlikuju od uslova (1.3.5) i (1.3.6) koje veze nameću mogućim pomeranjima. U slučaju, ako su:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \equiv 0, \quad D_{\beta} \equiv 0,$$

uslovi (1.3.5) i (1.3.6) za moguća pomeranja su isti kao uslovi (1.3.7) i (1.3.8) za virtuelna pomeranja. Prema tome, **ako su veze skleronomne (stacionarne) virtuelna pomeranja pripadaju mogućim pomeranjima.**

Ako se svako virtuelno pomeranje $\delta\vec{r}_{\nu}$ izrazi u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu preko projekcija $\delta x_{\nu}, \delta y_{\nu}, \delta z_{\nu}$ $(\nu = 1,2,\ldots,N)$, jednačine (1.3.7) i (1.3.8) mogu da se napišu u razvijenom obliku:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} \delta x_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_{\nu}} \delta y_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_{\nu}} \delta z_{\nu} \right) = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,p) \tag{1.3.10}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(A_{\beta\nu} \delta x_{\nu} + B_{\beta\nu} \delta y_{\nu} + C_{\beta\nu} \delta z_{\nu} \right) = 0 \quad (\beta = 1,2,\ldots,q)\,. \tag{1.3.11}$$

---

1) (virtuel – fr.). U domaćoj literaturi često se koristi i naziv *virtualna pomeranja* (virtualis – lat.)

Ovih jednačina ima $p+q$ pa, uz pretpostavku da su sve jednačine veza nezavisne, matrica koeficijenata uz projekcije virtuelnih pomeranja ima maksimalni rang, tj.

$$\operatorname{rang}\mathbf{J} = \operatorname{rang}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_N} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_N} & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_N} & \dfrac{\partial f_p}{\partial z_N} \\ A_{11} & B_{11} & C_{11} & \cdots & A_{1N} & B_{1N} & C_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{q1} & B_{q1} & C_{q1} & \cdots & A_{qN} & B_{qN} & C_{qN} \end{Bmatrix} = p+q \qquad (1.3.12)$$

Usled toga, među $3N$ projekcija $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ virtuelnih pomeranja $\delta \vec{r}_\nu$, postoji ukupno $n = 3N - (p+q)$ nezavisnih. Broj n predstavlja *broj stepena slobode mehaničkog sistema*. Prema tome, broj stepena slobode sistema dobija se kada se od ukupnog broja koordinata tačaka sistema oduzme broj veza. U odsustvu veza $(p=0, q=0)$ mehanički sistem je slobodan, tako da je njegov broj stepena slobode jednak ukupnom broju koordinata tačaka mehaničkog sistema, tj. $n = 3N$.

1.4 Reakcije veza. Idealne veze. Lagranžove jednačine prve vrste

Slobodan mehanički sistem izložen je dejstvu samo aktivnih sila. Tada, saglasno drugom Njutnovom zakonu, važe jednačine $m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu \ (\nu = 1, \ldots, N)$, gde su: $\vec{F}_\nu$ - rezultanta svih aktivnih sila koje deluju na tačku M_ν, m_ν – masa tačke M_ν, $\vec{a}_\nu$ njeno ubrzanje. Neslobodan mehanički sistem, pored aktivnih sila, izložen je i dopunskim silama kojima materijalne veze deluju na sistem. Takve sile nazivaju se *reakcije veza*. Tada, saglasno drugom Njutnovom zakonu, kretanje sistema mehaničkog sistema opisuju jednačine:

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \qquad (1.4.1)$$

gde $\vec{R}_\nu$ predstavlja rezultantu reakcija veza koje deluju na tačku M_ν. Ovim vektorskim jednačinama odgovara $3N$ skalarnih diferencijalnih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} m_\nu \ddot{x}_\nu &= X_\nu + R_{\nu x} \\ m_\nu \ddot{y}_\nu &= Y_\nu + R_{\nu y} \\ m_\nu \ddot{z}_\nu &= Z_\nu + R_{\nu z} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \cdot \qquad (1.4.2)$$

U opštem slučaju, za rešavanje osnovnih zadataka dinamike sistema, raspolaže se sa $3N$ jednačina (1.4.2) i $p+q$ jednačina veza. Prvi osnovni zadatak dinamike (*direktni zadatak*) odnosi se na probleme u kojima, na osnovu datog kretanja sistema (poznate funkcije $x_\nu(t), y_\nu(t), z_\nu(t)$), treba odrediti $3N$ projekcija aktivnih sila i $3N$ projekcija reakcija veza. Drugi osnovni zadatak dinamike (*inverzni zadatak*) odnosi se na probleme u kojima, na osnovu poznatih aktivnih sila i poznatog stanja $(t_0; \vec{r}_\nu^{\,0} = \vec{r}_\nu(t_0), \dot{\vec{r}}_\nu^{\,0} = \dot{\vec{r}}_\nu(t_0))$, treba odrediti $3N$ jednačina kretanja i $3N$ reakcija veza. U oba opšta slučaja, broj nepoznatih iznosi $6N$, među kojima je $3N$ nepoznatih projekcija reakcija veza, tako da je broj $3N + p + q$ raspoloživih jednačina nedovoljan za konačno rešavanje postavljenih zadataka. Prema tome, ili treba raspoloživim jednačinama dodati još $3N - (p+q)$ jednačina, ili broj nepoznatih za određivanje projekcija reakcija veza smanjiti za isti broj. Odgovor na ovo pitanje treba tražiti u zavisnosti reakcija veza od karaktera mehaničkih veza. U tom smislu sve mehaničke veze se dele na *idealne* i *neidealne*.

Idealne mehaničke veze su one čije reakcije, na proizvoljnim virtuelnim pomeranjima, uvek ispunjavaju uslov

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{R}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0, \tag{1.4.3}$$

odnosno, u razvijenom obliku,

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(R_{\nu x}\delta x_\nu + R_{\nu y}\delta y_\nu + R_{\nu z}\delta z_\nu \right) = 0 \tag{1.4.5}$$

Prema tome, **ukupan rad reakcija idealnih veza na proizvoljnim virtuelnim pomeranjima jednak je nuli**[1)].

Neidealne mehaničke veze su one čije reakcije ne ispunjavaju uslov (1.4.3). Realno, idealne mehaničke veze ne postoje. Međutim, idealizacija omogućava da se, u velikom broju slučajeva dobijaju rešenja koja zadovoljavaju praktične potrebe. Problemi se javljaju kada takva idealizacija može da dovede do rešenja koja nedopustivo odstupaju od stvarnog ponašanja mehaničkog sistema. Tada se ne mogu zanemariti neidealnosti veza, odnosno ne može se koristiti uslov (1.4.3), pa se u razmatranja moraju uvesti reakcije neidealnih veza pri čemu je

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{R}_\nu \delta\vec{r}_\nu \neq 0. \tag{1.4.6}$$

U ovakvim slučajevima može se postupiti na sledeći način. Svaka od reakcija neidealnih veza može da se razloži na dve komponente $\vec{R}_{\nu n}$ i $\vec{R}_{\nu\tau}$ $(\vec{R}_\nu = \vec{R}_{\nu n} + \vec{R}_{\nu\tau})$, takve da su:

[1)] Rad sila na virtuelnim pomeranjima naziva se *virtuelni rad*.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{R}_{\nu n}\delta\vec{r}_{\nu} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \vec{R}_{\nu\tau}\delta\vec{r}_{\nu} \neq 0 \,. \tag{1.4.7}$$

Komponente $\vec{R}_{\nu n}$ ispunjavaju uslov kao i reakcije idealnih veza pa se tako i razmatraju, a komponente $\vec{R}_{\nu\tau}$, koje su posledica neidealnosti veza, razmatraju se kao nepoznate aktivne sile u diferencijalnim jednačinama. Neidealnost veze je najčešće posledica trenja pa je, sa izuzetkom jednostavnijih slučajeva, rešavanje takvih problema veoma složeno i podrazumeva korišćenje merenja i eksperimenata. Prema tome, u daljem izlaganju, razmatraće se samo reakcije idealnih veza.

Kao što je prethodno pokazano, uz uslov (1.3.12), moguće je $3N$ projekcija virtuelnih pomeranja podeliti na $p+q$ zavisnih i $3N-(p+q)$ nezavisnih. Iz jednačina (1.3.10) i (1.3.11) sve zavisne veličine mogu da se izraze preko nezavisnih. Zamenom, tako određenih zavisnih veličina, u izraz (1.4.5) dobiće se jednačina u kojoj figuriše $3N-(p+q)$ međusobno nezavisnih projekcija virtuelnih pomeranja. Tako transformisana jednačina (1.4.5) biće zadovoljena samo ako su svi koeficijenti uz virtuelna pomeranja jednaki nuli. Na taj način dobijaju se dopunske jednačine za određivanje reakcija idealnih veza. Međutim, ovaj postupak je veoma glomazan i složen pa se, za eliminaciju zavisnih virtuelnih pomeranja, koristi metod *Lagranžovih neodređenih množitelja.* Množenjem svake od jednačina (1.3.7) i (1.3.8) odgovarajućim skalarima $-\lambda_\alpha$ i $-\mu_\beta$ i njihovim sabiranjem sa jednačinom (1.4.3) dobija se jednačina

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{R}_{\nu} - \sum_{\alpha=1}^{p}\lambda_\alpha grad_\nu f_\alpha - \sum_{\beta=1}^{q}\mu_\beta \vec{l}_{\beta\nu})\delta\vec{r}_{\nu} = 0 \,, \tag{1.4.8}$$

odnosno, u razvijenom obliku,

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left[\left(R_{\nu x} - \sum_{\alpha=1}^{p}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} - \sum_{\beta=1}^{q}\mu_\beta A_{\beta\nu}\right)\delta x_\nu + \left(R_{\nu y} - \sum_{\alpha=1}^{p}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} - \sum_{\beta=1}^{q}\mu_\beta B_{\beta\nu}\right)\delta y_\nu + \right.$$
$$\left. + \left(R_{\nu z} - \sum_{\alpha=1}^{p}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} - \sum_{\beta=1}^{q}\mu_\beta C_{\beta\nu}\right)\delta z_\nu \right] = 0. \tag{1.4.9}$$

Ako je ispunjen uslov (1.3.12), može da se na jedinstven način odredi $p+q$ množitelja λ_α i μ_β tako da su celi izrazi, koji čine koeficijente uz $p+q$ zavisnih projekcija virtuelnih pomeranja, jednaki nuli. Na taj način, u jednačini (1.4.9), ostalo je $3N-(p+q)$ sabiraka sa nezavisnim virtuelnim pomeranjima, pa je jednačina zadovoljena samo kad su i koeficijenti uz nezavisna virtuelna pomeranja takođe jednaki nuli. Prema tome, dobijaju se sledeći opšti izrazi za određivanje reakcija veza preko Lagranžovih množitelja:

$$\left.\begin{aligned} R_{\nu x} &= \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta A_{\beta\nu} \\ R_{\nu y} &= \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta B_{\beta\nu} \\ R_{\nu z} &= \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta C_{\beta\nu} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1,2,\ldots,N), \tag{1.4.10}$$

ili u vektorskom obliku

$$\vec{R}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha grad_\nu f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta \vec{l}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N). \tag{1.4.11}$$

Uvrštavanjem, ovako određenih reakcija, u (1.4.1) dobijaju se *Lagranžove jednačine prve vrste* u vektorskom obliku:

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha grad_\nu f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta \vec{l}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N), \tag{1.4.12}$$

odnosno, u skalarnom obliku:

$$\left.\begin{aligned} m_\nu \ddot{x}_\nu &= X_\nu + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta A_{\beta\nu} \\ m_\nu \ddot{y}_\nu &= Y_\nu + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta B_{\beta\nu} \\ m_\nu \ddot{z}_\nu &= Z_\nu + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_\beta C_{\beta\nu} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1,2,\ldots,N). \tag{1.4.13}$$

U opštem slučaju, uvođenjem Lagranžovih neodređenih množitelja, broj nepoznatih veličina sveo se na $3N + p + q$, pa kad se jednačinama (1.4.13) priključe i jednačine veza dobija se dovoljan broj relacija za rešavanje osnovnih zadataka dinamike. Lagranžove jednačine prve vrste su veoma značajne za proučavanje mehaničkih sistema. U problemima, gde njihova primena nije neophodna, mogu da se zamene nekim prikladnijim vrstama jednačina. Međutim u nekim problemima njihovo prisustvo je neizbežno i koriste se u punom obliku ili delimično u kombinaciji sa drugim jednačinama.

1.5. **Holonomni sistemi. Generalisane koordinate**

Neka je mehanički sistem holonoman, tj. neka je podvrgnut delovanju samo konačnih (holonomnih) i, u opštem slučaju, nestacionarnih (reonomnih) veza:

$$f_\lambda(\vec{r}_\nu; t) = 0 \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N), (\lambda = 1,2,\ldots,p), \tag{1.5.1}$$

odnosno, u Dekartovom koordinatnom sistemu:

$$f_\lambda(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N; t) = 0 \qquad (\lambda = 1,2,\ldots, p). \tag{1.5.2}$$

Ako su jednačine (1.5.2) međusobno nezavisne, iz njih je moguće p koordinata izraziti kao funkcije preostalih $3N - p$ koordinata i vremena t. Ovih $3N - p$ koordinata su nezavisne i u potpunosti određuju položaj sistema u proizvoljnom trenutku t. U tom slučaju sistem ima $n = 3N - p$ stepena slobode. Korišćenje Dekartovih koordinata nije obavezno, a često može biti i veoma neprikladno, pa se umesto njih može uvesti $n = 3N - p$ nezavisnih promenljivih parametara q^α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, tako da svih $3N$ Dekartovih kordinata mogu da se izraze kao funkcije ovih parametara i vremena, tj:

$$x_\nu = x_\nu(q^1, q^2, \ldots, q^n; t), \quad y_\nu = y_\nu(q^1, q^2, \ldots, q^n; t), \quad z_\nu = z_\nu(q^1, q^2, \ldots, q^n; t) \\ (\nu = 1,2,\ldots, N). \tag{1.5.3}$$

odnosno u vektorskom obliku:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q^1, q^2, \ldots, q^n; t) \qquad (\nu = 1,2,\ldots, N). \tag{1.5.4}$$

Pretpostavlja se da su funkcije (1.5.3), odnosno (1.5.4), neprekidne i diferencijabilne. Njihovom zamenom u jednačine veza dobijaju se identiteti, tj:

$$f_\lambda\left[\vec{r}_\nu\left(q^1, q^2, \ldots, q^n; t\right); t\right] \equiv 0 \qquad (\nu = 1,2,\ldots, N), (\lambda = 1,2,\ldots, p).$$

Minimalan broj n nezavisnih promenljivih parametara q^α pomoću kojih može da se u svakom trenutku odredi položaj holonomnog sistema, pri njegovom kretanju u skladu sa vezama, jednak je broju stepena slobode sistema, tj. $n = 3N - p$. Ovi promenljivi parametri se zovu *nezavisne generalisane koordinate* (Lagranžove koordinate) sistema. Svakom položaju sistema u trenutku t odgovara tačka $(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ u $n-$dimenzionom prostoru koja određuje položaj sistema, tj. *kretanju sistema odgovara kretanje tačke u $n-$dimenzionom prostoru generalisanih koordinata.*

Ako su veze stacionarne (skleronomne) vreme t ne figuriše eksplicitno u jednačinama veza (1.5.1) odnosno (1.5.2), pa se uvek može naći takav sistem nezavisnih generalisanih koordinata da vreme ne figuriše eksplicitno ni u funkcijama (1.5.3) odnosno (1.5.4), tj. da su:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q^1, q^2, \ldots, q^n) \qquad (\nu = 1,2,\ldots, N). \tag{1.5.5}$$

1.6. **Krivolinijske koordinate tačke. Bazni vektori. Metrički tenzor**

Položaj slobodne tačke u inercijalnom sistemu Dekartovih koordinata određen je u svakom trenutku vektorom

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.6.1}$$

gde su: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori Dekartovih osa. Umesto Dekartovih koordinata moguće je da se za razmatranje kretanja tačke uvede neki drugi sistem nezavisnih, u opštem slučaju krivolinijskih, koordinata q^1, q^2, q^3 tako da postoji transformacija

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3) \tag{1.6.2}$$

odnosno transformacije:

$$x = x(q^1, q^2, q^3), \quad y = y(q^1, q^2, q^3), \quad z = z(q^1, q^2, q^3)\,. \qquad (1.6.2)$$

Elementarni priraštaj vektora položaja (1.6.1) u Dekartovim koordinatama je

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\,, \tag{1.6.3}$$

a u krivolinijskim koordinatama, s obzirom na (1.6.2),

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} dq^3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i\,. \tag{1.6.4}$$

Uvođenjem u razmatranje vektora:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial x}{\partial q^i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\vec{k} \quad (i = 1,2,3) \tag{1.6.5}$$

i uvođenjem Ajnštajnove konvencije o sabiranju po ponovljenim indeksima[1)] priraštaj vektora (1.6.4) može da se piše u obliku

$$d\vec{r} = \vec{g}_i dq^i \quad (i = 1,2,3)\,. \tag{1.6.6}$$

Ako se krivolinijski koordinatni sistem veže za posmatranu tačku (sl.1), tangente na koordinatne linije u posmatranoj tački predstavljaju *koordinatne ose* koje obrazuju trijedar čija je orijentacija određena odgovarajućim jediničnim vektorima $\vec{e}_i$ $(i = 1,2,3)$.

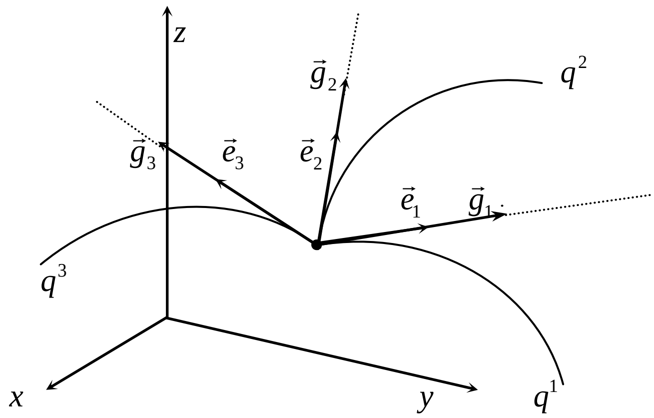
Koordinatne linije predstavljaju hodografe vektora položaja pri promeni samo odgovarajuće koordinate, tako da je njegov izvod po toj koordinati vektor koji ima pravac tangente na koordinatnu liniju, tj. ima pravac odgovarajuće koordinatne ose. Prema tome parcijalni izvodi vektora položaja po krivolinijskim koordinatama su:

[1)] U ovom tekstu konvencija se koristi samo ako su ponovljeni indeksi različitih položaja (gornji i donji). U ostalim slučajevima koristiće se simbol Σ.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \vec{g}_i = |\vec{g}_i|\vec{e}_i = A_i\vec{e}_i \qquad (i = 1,2,3)\,, \tag{1.6.7}$$

gde su, s obzirom na (1.6.5),

$$|\vec{g}_i| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\right| = A_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i}\right)^2} \qquad (i = 1,2,3). \tag{1.6.8}$$



sl.1

Vektori $\vec{g}_i$ se zovu *osnovni* (*bazni*) vektori krivolinijskog sistema koordinata. U opštem slučaju, nisu jedinični ni ortogonalni međusobno.
U daljem izlaganju važnu ulogu ima *metrička norma* koja se definiše kao kvadrat elementa luka krive u posmatranom prostoru. U pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu je

$$ds^2 = (d\vec{r})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.6.9}$$

a u sistemu krivolinijskih koordinata, s obzirom na (1.6.6), je

$$ds^2 = d\vec{r}^{\,2} = d\vec{r}d\vec{r} = \vec{g}_i dq^i \vec{g}_j dq^j = \vec{g}_i\vec{g}_j dq^i dq^j \qquad (i, j = 1,2,3)\,. \tag{1.6.10}$$

Uvođenjem oznake

$$g_{ij} = \vec{g}_i\vec{g}_j \tag{1.6.11}$$

metrička forma predstavlja homogenu kvadratnu formu priraštaja generalisanih koordinata u obliku

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j\,. \tag{1.6.12}$$

Veličina g_{ij} predstavlja *metrički tenzor* razmatranog prostora krivolinijskih koordinata. Matrica metričkog tenzora krivolinijskog koordinatnog sistema

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \vec{g}_1\vec{g}_1 & \vec{g}_1\vec{g}_2 & \vec{g}_1\vec{g}_3 \\ \vec{g}_2\vec{g}_1 & \vec{g}_2\vec{g}_2 & \vec{g}_2\vec{g}_3 \\ \vec{g}_3\vec{g}_1 & \vec{g}_3\vec{g}_2 & \vec{g}_3\vec{g}_3 \end{Bmatrix} \tag{1.6.13}$$

ima 9 elemenata, međutim, zbog komutativnosti skalarnog proizvoda (1.6.11), metrički tenzor ima osobinu simetrije $(g_{ij}=g_{ji})$ pa se broj elemenata koje treba odrediti smanjuje na 6. U posebnim slučajevima, kada su krivolinijske koordinate ortogonalne, jedinični vektori koordinatnih osa ispunjavaju uslove:

$$\vec{e}_i\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

gde je δ_{ij} tzv. *Kronekerov* (Kronecker) *delta simbol.* U tom slučaju metrički tenzor ima dijagonalnu matricu, tj.

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{Bmatrix}. \tag{1.6.14}$$

Za koeficijente g_{ij} metričke norme (1.6.12) kaže se da predstavljaju *kovarijantni* metrički tenzor. Njemu uvek može da se pridruži recipročni tenzor, definisan kao

$$g^{ij}=\frac{G^{ij}}{g}, \tag{1.6.15}$$

gde su: g – determinata matrice tenzora g_{ij}, G^{ij} kofaktori determinante g koji odgovaraju elementima g_{ij}, tj.:

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},\ G^{11}=\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},\ G^{12}=-\begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix},\ G^{13}=\begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix},\ldots\text{itd}\cdot$$

Koeficijenti g^{ij} definisani u (1.6.15) predstavljaju *kontravarijantni metrički tenzor*. Matrica kontravarijantnog metričkog tenzora g^{ij} je iverzna matrica kovarijantnog metričkog tenzora g_{ij} tako da je

$$g_{ij}g^{jk} = g_{i1}g^{1k} + g_{i2}g^{2k} + g_{i3}g^{3k} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{1.6.16}$$

Osnovni vektori $\vec{g}_i$ iz (1.6.7) predstavljaju *kovarijantnu vektorsku bazu* za generalisane koordinate q^i, a vektori $\vec{g}^i$, definisani kao

$$\vec{g}^i = g^{ij}\vec{g}_j = g^{i1}\vec{g}_1 + g^{i2}\vec{g}_2 + g^{i3}\vec{g}_3 \tag{1.6.17}$$

predstavljaju *kontravarijantnu vektorsku bazu* za isti sistem koordinata. Na osnovu ovakve definicije i (1.6.11) sledi

$$\vec{g}^i\vec{g}_j = g^{ik}\vec{g}_k\vec{g}_j = g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i,$$

tako da je

$$\vec{g}^i\vec{g}^j = g^{ik}\vec{g}_k\vec{g}^j = g^{ik}\delta_k^j = g^{ij}.$$

Prema tome elementi kontravarijantnog metričkog tenzora jednaki su skalarnom proizvodu dva vektora kontravarijantne osnove, što je potpuno analogno sa (1.6.1) gde je kovarijantni metrički tenzor definisan kao skalarni proizvod vektora kovarijantne osnove.
U (1.6.17) osnovni vektori $\vec{g}^i$ kontravarijantne baze definisani su pomoću kontravarijantnog metričkog tenzora i osnovnih vektora $\vec{g}_i$ kovarijantne baze. Na sličan način je

$$\vec{g}_i = g_{ij}\vec{g}^j. \tag{1.6.18}$$

Naime, s obzirom na (1.6.16) biće

$$g_{ij}\vec{g}^j = g_{ij}g^{jk}\vec{g}_k = \delta_i^k\vec{g}_k = \vec{g}_i.$$

1.7. **Brzina i ubrzanje tačke u krivolinijskim koordinatama**

1.7.1 ***Slobodna tačka***

Kad je položaj tačke određen u odnosu na neki sistem generalisanih koordinata, s obzirom na (1.6.4), njena brzina je

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial r}{\partial q^1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3}\dot{q}^3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i, \tag{1.7.1}$$

odnosno, prema (1.6.7),

$$\vec{v} = \vec{g}_i\dot{q}^i = A_i\dot{q}^i\vec{e}_i. \tag{1.7.2}$$

Generalisane brzine

$$v^i = \dot{q}^i \tag{1.7.3}$$

su *kontravarijantne koordinate brzine* za dati sistem koordinata q^i, a

$$v_i = g_{ij}\dot{q}^j \qquad (1.7.4)$$

su *kovarijantne koordinate brzine* za isti sistem koordinata. Između ovih koordinata brzina uočavaju se sledeće veze:

$$v_i = g_{ij}v^j, \qquad v^i = g^{ij}v_j. \qquad (1.7.5)$$

Projekcije brzine na ose generalisanih koordinata dobijaju se skalarnim množenjem vektora brzine jediničnim vektorima koordinatnih osa

$$v_{(i)} = \vec{v}\cdot\vec{e}_i = \vec{g}_j\dot{q}^j\vec{e}_i = \frac{1}{A_{(i)}}\vec{g}_i\cdot\vec{g}_j\dot{q}^j = \frac{1}{A_{(i)}}g_{ij}\dot{q}^j. \qquad (1.7.6)$$

Projekcije brine na ose generalisanih koordinata imaju dimenzije brzine a zovu se i *fizičke koordinate brzine*. Dimenzije kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata brzine, u opštem slučaju, mogu da budu različite i međusobno i od dimenzija fizičkih koordinata brzine. U posebnom slučaju, kad se za sistem generalisanih koordinata uzme Dekartov pravougli sistem, ovih razlika nema jer se projekcije brzine na ose poklapaju sa kovarijantnim i kontravarijantnim koordinatama brzine. Ovo je posledica toga što su bazni vektori Dekartovih koordinata jednaki jediničnim vektorima koordinatnih osa, a metrički tenzor se svodi na Kronekerov simbol, tj:

$$\begin{aligned} &q^1 = x,\ q^2 = y,\ q^3 = z;\ \ \vec{g}_1 = \vec{g}^1 = \vec{i},\ \vec{g}_2 = \vec{g}^2 = \vec{j},\ \vec{g}_3 = \vec{g}^3 = \vec{k}; \\ &g_{ij} = \delta_{ij},\ g^{ij} = \delta^{ij}. \end{aligned} \qquad (1.7.7)$$

U daljem izlaganju važnu ulogu ima izraz za kvadrat brzine tačke, koji s obzirom na (1.7.2), ima vrednost

$$\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{g}_i q^i\cdot\vec{g}_j\dot{q}^j = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j. \qquad (1.7.8)$$

Odavde je

$$\frac{\partial\vec{v}^2}{\partial\dot{q}^i} = 2g_{ij}\dot{q}^j \ \Rightarrow\ g_{ij}\dot{q}^j = \frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right). \qquad (1.7.9)$$

Ako privremeno uvedemo oznaku

$$\Theta = \frac{1}{2}\vec{v}^2, \qquad (1.7.10)$$

kovarijantne i kontravarijantne koordinate brzine i projekcije brzine na koordinatne ose mogu da se pišu na sledeći način:

$$v_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^i}, \quad v^i = \dot{q}^i = g^{ij}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^j}, \quad v_{(i)} = \frac{1}{A_{(i)}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1.7.11}$$

Ubrzanje tačke je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{g}_i \dot{q}^i\right). \tag{1.7.12}$$

Skalarnim množenjem ubrzanja sa jediničnim vektorima krivolinijskih koordinata dobijaju se njegove projekcije na odgovarajuće koordinatne ose:

$$a_{(i)} = \vec{a}\cdot\vec{e}_i = \frac{1}{A_{(i)}}\vec{g}_i\cdot\vec{a} = \frac{1}{A_{(i)}}\vec{g}_i\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.7.13}$$

odnosno

$$a_{(i)} = \frac{1}{A_{(i)}}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{g}_i\cdot\vec{v}\right) - \frac{d\vec{g}_i}{dt}\cdot\vec{v}\right]. \tag{1.7.14}$$

Kada se sledeći izrazi transformišu na oblik:

$$\begin{aligned} &\vec{g}_i\cdot\vec{v} = \vec{g}_i\cdot\vec{g}_j\dot{q}^j = g_{ij}\dot{q}^j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^i} \\ &\frac{d\vec{g}_i}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial q^k}\dot{q}^k\cdot\vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^i \partial q^k}\dot{q}^k\cdot\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q^i}\cdot\vec{v} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{\partial \Theta}{\partial q^i} \end{aligned} \tag{1.7.15}$$

i zamene u (1.7.14) dobijaju se projekcije ubrzanja na ose krivolinijskih koordinata:

$$a_{(i)} = \frac{1}{A_{(i)}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial \Theta}{\partial q^i}\right]. \tag{1.7.16}$$

Kovarijantne koordinate ubrzanja a_i dobijaju se množenjem ubrzanja kovarijantnim baznim vektorom, tj:

$$a_i = \vec{g}_i\cdot\vec{a}\,. \tag{1.7.17}$$

S obzirom na (1.7.13) proporcionalne su projekcijama ubrzanja pa, imajući u vidu (1.7.16), mogu da se pišu u obliku:

$$a_i = A_{(i)}a_{(i)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial \Theta}{\partial q^i} \qquad (i = 1,2,3)\,. \tag{1.7.18}$$

Kovarijantne koordinate ubrzanja mogu da se izraze i neposredno, preko krivolinijskih koordinata i njihovih izvoda. Naime, iz (1.7.17) sledi

$$a_i = \vec{g}_i \cdot \vec{a} = \vec{g}_i \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{g}_j \dot{q}^j\right) = \vec{g}_i \cdot \frac{d\vec{g}_j}{dt}\dot{q}^j + \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \ddot{q}^j = g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial q^k} \cdot \vec{g}_i \dot{q}^j \dot{q}^k,$$

odnosno

$$a_i = g_{ij}\ddot{q}^j + [jk,i]\dot{q}^j\dot{q}^k \quad (i = 1,2,3), \tag{1.7.19}$$

gde je uvedena oznaka

$$[jk,i] = \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial q^k} \cdot \vec{g}_i \tag{1.7.20}$$

koja predstavlja *Kristofelov* (Christoffel) *simbol prve vrste*. S obzirom da je

$$\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^j \partial q^k} = \frac{\partial \vec{g}_k}{\partial q^j}, \tag{1.7.21}$$

Kristofelov simbol prve vrste simetričan je u odnosu na prva dva indeksa

$$[jk,i] = [kj,i].$$

Razvijanjem izraza (1.7.20) dobija se

$$[jk,i] = \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial q^k} \cdot \vec{g}_i = \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\vec{g}_j \cdot \vec{g}_i\right) - \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial q^k} \cdot \vec{g}_j = \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} - [ik,j]$$

odakle je, uzimajući u obzir osobine simetrije Kristofelovog simbola i metričkog tenzora,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = [jk,i] + [ki,j]. \tag{1.7.22}$$

Premeštanjem indeksa mogu da se napišu i sledeći izrazi:

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} = [ij,k] + [jk,i], \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = [ki,j] + [ij,k],$$

Podesnim slaganjem ovih izraza dobija se Kristofelov simbol prve vrste definisan pomoću parcijalnih izvoda metričkog tenzora

$$[jk,i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right). \tag{1.7.23}$$

Kontravarijantne koordinate ubrzanja dobijaju se skalarnim množenjem ubrzanja kontravarijantnim baznim vektorom

$$a^i = \vec{a} \cdot \vec{g}^i = \vec{a} \cdot \vec{g}_j g^{ij} = a_j g^{ij},$$

odnosno množenjem kovarijantnih koordinata a_j kontravarijantnim metričkim tenzorom g^{ij} i sabiranjem po indeksu j. Važi i obrnuta relacija

$$a_i = a^j g_{ij}.$$

Množenjem jednakosti (1.7.19) kontravarijantnim metričkim tenzorom dobija se

$$a^i = g^{ij} a_j = g^{ij}(g_{jk}\ddot{q}^k + [kl, j]\dot{q}^k \dot{q}^l) = \delta^i_k \ddot{q}^k + g^{ij}[kl, j]\dot{q}^k \dot{q}^l,$$

odnosno

$$a^i = \ddot{q}^i + \begin{bmatrix} i \\ kl \end{bmatrix} \dot{q}^k \dot{q}^l \quad (i = 1,2,3), \tag{1.7.24}$$

gde je sa

$$\begin{bmatrix} i \\ kl \end{bmatrix} = g^{ij}[kl, j] \tag{1.7.25}$$

označen *Kristofelov simbol druge vrste*. Izraz (1.7.24) predstavlja kontravarijantne koordinate ubrzanja u krivolinijskom koordinatnom sistemu. Korišćenjem izraza za kvadrat brzine $(\vec{v}^2 = 2\Theta)$ ove koordinate, s obzirom na (1.7.18), mogu da se pišu i u obliku

$$a^i = g^{ij}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial \Theta}{\partial q^j}\right]. \tag{1.7.26}$$

Izrazi za kovarijantne i kontravarijantne koordinate ubrzanja mogu se uprostiti definisanjem apsolutnog, Bjankijevog (Bianchi) izvoda po vremenu. Neka su u^i i u_i kontravarijantne i kovarijantne koordinate nekog vektora njihovi apsolutni izvodi po vremenu se definišu kao:

$$\frac{Du^i}{Dt} = \frac{du^i}{dt} + \begin{bmatrix} i \\ jk \end{bmatrix} u^j \dot{q}^k, \qquad \frac{Du_i}{Dt} = \frac{du_i}{dt} - \begin{bmatrix} j \\ ki \end{bmatrix} u_j \dot{q}^k, \tag{1.7.27}$$

Pošto generalisane brzine $\dot{q}^i$ predstavljaju kontravarijantne koordinate brzine $(\dot{q}^i = v^i)$, kontravarijantne koordinate ubrzanja (1.7.24) mogu da se izraze u obliku

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} + \begin{bmatrix} i \\ j\,k \end{bmatrix} v^j v^k , \tag{1.7.28}$$

odnosno s obzirom na definicije (1.7.27)

$$a^i = \frac{Dv^i}{Dt} \quad (i = 1,2,3) . \tag{1.7.29}$$

Prema tome, **kontravarijantne koordinate ubrzanja jednake su apsolutnim izvodima po vremenu kontravarijantnih koordinata brzine.**
Ako se jednakosti (1.7.19) transformišu na sledeći način:

$$a_i = \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\dot{q}^j\right) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^j\dot{q}^k + [jk,i]\dot{q}^j\dot{q}^k$$

dobija se, sobzirom na (1.7.22),

$$a_i = \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\dot{q}^j\right) - [ki,j]\dot{q}^j\dot{q}^k = \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\dot{q}^j\right) - \begin{bmatrix} l \\ k\,i \end{bmatrix} g_{lj}\dot{q}^j\dot{q}^k .$$

Kako su: $g_{ij}\dot{q}^j = v_i$ i $\dot{q}^i = v^i$ može da se piše

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} - \begin{bmatrix} l \\ k\,i \end{bmatrix} v_l v^k , \tag{1.7.30}$$

odnosno prema definiciji (1.7.27)

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} \quad (i = 1,2,3). \tag{1.7.31}$$

Kovarijantne koordinate ubrzanja jednake su apsolutnim izvodima po vremenu kovarijantnih koordinata brzine.

1.7.2. ***Neslobodna tačka***

Neka je tačka prinuđena da se kreće po nekoj površi, tj. neka je izložena dejstvu holonomne veze čija je jednačina

$$f(x, y, z) = 0 . \tag{1.7.32}$$

U tom slučaju, za određivanje položaja tačke, dovoljna su dva nezavisna skalarna parametra, tj. dve generalisane koordinate $q^\alpha \ (\alpha = 1,2)$, tako da je vektor položaja

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2) = x(q^1, q^2)\vec{i} + y(q^1, q^2)\vec{j} + z(q^1, q^2)\vec{k} . \tag{1.7.33}$$

Neka su koordinatne krive generalisanih koordinata q^{α} $(\alpha = 1,2)$ linije na površi (1.7.32) vezane za posmatranu tačku (sl.2). Bazni vektori:

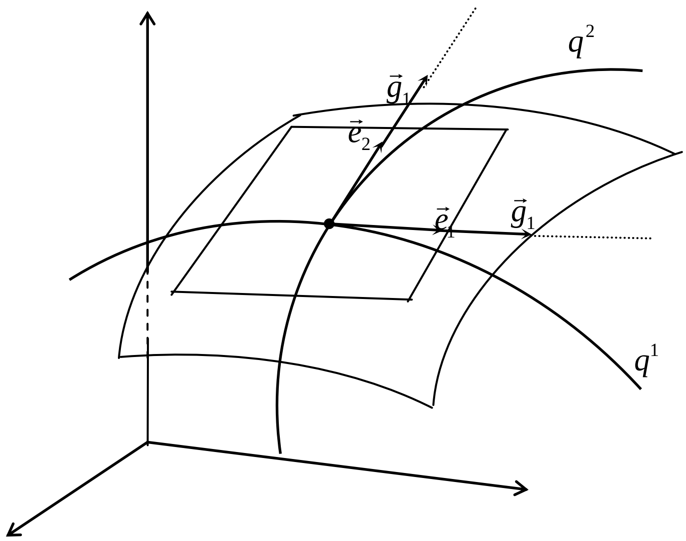
$$\vec{g}_{\alpha} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\partial x}{\partial q^{\alpha}} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q^{\alpha}} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q^{\alpha}} \vec{k} \quad (\alpha = 1,2) \tag{1.7.34}$$

imaju pravce koordinatnih osa koje, kao tangente na odgovarajuće koordinatne linije, obrazuju tangentnu ravan u posmatranoj tački na površi (1.7.32) . Jedinični vektori koordinatnih osa su $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ tako da bazni vektori mogu da se izraze i na sledeći način

$$\vec{g}_{\alpha} = |\vec{g}_{\alpha}| \vec{e}_{\alpha} = A_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \quad (\alpha = 1,2) \tag{1.7.35}$$

gde su:

$$A_{\alpha} = |\vec{g}_{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^{\alpha}}\right)^2} \quad (\alpha = 1,2) . \tag{1.7.36}$$



sl.2

Priraštaj vektora položaja, s obzirom na (1.7.33), je

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} dq^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^{\alpha}} dq^{\alpha} = \vec{g}_{\alpha} dq^{\alpha} . \tag{1.7.37}$$

Metrika je invarijantna u odnosu na transformaciju (1.7.33), tj.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta dq^\alpha dq^\beta = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \qquad (1.7.38)$$

gde je $g_{\alpha\beta}$ *osnovni metrički tenzor površi*, čija je matrica

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Bmatrix}$$

pozitivno definitna. Ako su koordinatne linije ortogonalne, matrica metričkog tenzora je dijagonalna. U posebnom slučaju, kad su koordinatne linije pravolinijske i ortogonalne (Dekartov sistem), matrica metričkog tenzora je jedinična $(g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta})$.

Prema tome, kretanje neslobodne tačke može da se posmatra kao kretanje slobodne tačke u dvodimenzionom prostoru generalisanih koordinata q^1, q^2 čiju konfiguraciju određuje veza (1.7.32). Kristofelovi simboli prve i druge vrste na površi se degenerišu u:

$$[\alpha\alpha, \beta], [\beta\alpha, \alpha], \quad \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha\,\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha\,\beta \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta = 1,2) \,. \qquad (1.7.39)$$

Brzina i ubrzanje tačke u generalisanim koordinatama na površi su:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} \dot{q}^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} \dot{q}^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha = \vec{g}_\alpha \dot{q}^\alpha = A_\alpha \dot{q}^\alpha \vec{e}_\alpha \,, \qquad (1.7.40)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{g}_\alpha \dot{q}^\alpha) = \vec{g}_\alpha \ddot{q}^\alpha + \frac{d\vec{g}_\alpha}{dt} \dot{q}^\alpha . \qquad (1.7.41)$$

Odavde se vidi da je brzina vektor u tangentnoj ravni, a ubrzanje vektor koji, u opštem slučaju, ne pripada tangentnoj ravni.

Kvadrat brzine tačke je

$$v^2 = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \,, \qquad (1.7.42)$$

pa, ako se uvede oznaka (1.7.10), analogno prethodnom slučaju, dobijaju se: *projekcije brzine na koordinatne ose krivolinijskih koordinata*, *kovarijantne koordinate brzine* i *kontravarijantne koordinate brzine*:

$$v_{(\alpha)} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{v} = \frac{1}{A_{(\alpha)}} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^\alpha} \;,\quad v_\alpha = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta = \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^\alpha} \;,\quad v^\alpha = \dot{q}^\alpha = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^\beta} \,, \qquad (1.7.43)$$

projekcije ubrzanja na koordinatne ose krivolinijskih koordinata, *kovarijantne koordinate ubrzanja* i *kontravarijantne koordinate ubrzanja*:

$$a_{(\alpha)} = \frac{1}{A_{(\alpha)}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial q^{\alpha}}\right],\; a_{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial q^{\alpha}},\;\; a^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}^{\beta}}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial q^{\beta}}\right]. \quad (1.7.44)$$

Treba primetiti da, ako na tačku deluje holonomna stacionarna veza, brzina tačke potpuno je određena svojim projekcijama na ose krivolinijskih koordinata ili kovarijantnim i kontravarijantnim koordinatama, jer pomoću njih može da se odredi i intenzitet brzine

$$|\vec{v}| = (g_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta})^{\frac{1}{2}} = (g_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta})^{\frac{1}{2}} = (g^{\alpha\beta}v_{\alpha}v_{\beta})^{\frac{1}{2}}.$$

Međutim, projekcije, kovarijantne i kontravarijantne koordinate ubrzanja, u opštem slučaju, određuju samo komponentu ubrzanja u tangentnoj ravni, što je, dovoljno za razmatranje kretanja tačke po idealnoj vezi (1.7.32), tj. u dvodimenzionom prostoru generalisanih koordinata q^{α}. Druga komponenta ubrzanja je u pravcu normale na površ i, u slučaju potrebe, određuje se tako što se projekcija ubrzanja na normalu pomnoži jediničnim vektorom normale.
U slučaju kad je holonomna veza nestacionarna (reonomna), tj. kad je

$$f(x, y, z; t) = 0, \quad (1.7.45)$$

vektor položaja tačke, pored generalisanih koordinata q^{α} $(\alpha = 1,2)$, eksplicitno zavisi i od vremena t, tj.

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2; t) = x(q^1, q^2; t)\vec{i} + y(q^1, q^2; t)\vec{j} + z(q^1, q^2; t)\vec{k} \quad (1.7.46)$$

Brzina tačke je

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \vec{g}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \quad (1.7.47)$$

na osnovu čega je kvadrat brzine

$$\vec{v}^2 = g_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} + 2\vec{g}_{\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\dot{q}^{\alpha} + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right)^2. \quad (1.7.48)$$

Kovarijantne koordinate brzine dobijaju se skalarnim množenjem brzine (1.7.47) odgovarajućim baznim vektorima:

$$v_{\alpha} = \vec{g}_{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{g}_{\alpha}\cdot\left(\vec{g}_{\beta}\dot{q}^{\beta} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right) = g_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta} + \vec{g}_{\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \quad (\alpha = 1,2), \quad (1.7.49)$$

odnosno, s obzirom na (1.7.47),

$$v_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}^{\alpha}}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}^{\alpha}} \quad (\alpha = 1,2), \quad (1.7.50)$$

gde je, kao i u prethodnim slučajevima, sa Θ označena polovina kvadrata brzine tačke. Kontravarijantna koordinate brzine dobijaju se skalarnim množenjem brzine (1.7.47) kontravarijantnim baznim vektorima $\vec{g}^{\alpha}$, što se svodi na množenje kovarijantnih koordinata brzine kontravarijantnim metričkim tenzorom, tj:

$$v^{\alpha} = g^{\alpha\beta} v_{\beta} = g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\gamma}\dot{q}^{\gamma} + \vec{g}_{\beta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \dot{q}^{\alpha} + \vec{g}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \; , \qquad (1.7.51)$$

odnosno, s obzirom na (1.7.50),

$$v^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^{\beta}} \qquad (\alpha = 1,2) \cdot \qquad (1.7.52)$$

Iz (1.7.51) može se zaključiti da, u opštem slučaju pri postojanju nestacionarne veze, kontravarijantne koordinate brzine v^{α} nisu jednake generalisanim brzinama $\dot{q}^{\alpha}$.

Ako se ubrzanje tačke

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

množi skalarno kovarijantnim baznim vektorima dobijaju se odgovarajuće kovarijantne koordinate ubrzanja

$$a_{\alpha} = \vec{g}_{\alpha} \cdot \vec{a} = \vec{g}_{\alpha} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{g}_{\alpha} \cdot \vec{v} \right) - \frac{d\vec{g}_{\alpha}}{dt} \cdot \vec{v}. \qquad (1.7.53)$$

Na osnovu (1.7.50) je

$$\frac{d}{dt}(\vec{g}_{\alpha} \cdot \vec{v}) = \frac{dv_{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right). \qquad (1.7.54)$$

Upoređivanjem izvoda po vremenu baznih vektora

$$\frac{d\vec{g}_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial \vec{g}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial \vec{g}_{\alpha}}{\partial t}$$

sa parcijalnim izvodima brzine po generalisanim koordinatama

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}\left(\vec{g}_{\beta}\dot{q}^{\beta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{g}_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial q^{\alpha}} = \frac{\partial \vec{g}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial \vec{g}_{\alpha}}{\partial t} \; , \quad \left(\frac{\partial \vec{g}_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\partial \vec{g}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \right)$$

dolazi se do jednakosti

$$\frac{d\vec{g}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q^\alpha} \quad , \qquad \frac{d\vec{g}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q^\alpha} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{\partial \Theta}{\partial q^\alpha} \tag{1.7.55}$$

Zamenom (1.7.54) i (1.7.55) u (1.7.53) dobijaju se kovarijantne koordinate ubrzanja:

$$a_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \Theta}{\partial q^\alpha} \qquad (\alpha = 1,2) \ . \tag{1.7.56}$$

Množenjem (1.7.56) kontravarijantnim metričkim tenzorom dobijaju se kontravarijantne koordinate ubrzanja:

$$a^\alpha = g^{\alpha\beta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial \Theta}{\partial q^\beta}\right] \qquad (\alpha = 1,2). \tag{1.7.57}$$

Na osnovu izloženog može da se zaključi da je, za određivanje kovarijanttnih i kontravarijantnih koordinata brzina i ubrzanja, dovoljno odrediti kvadrat brzine tačke u zavisnosti od generalisanih brzina, generalisanih koordinata i vremena. Na taj način, u svim slučajevima, bez obzira da li je tačka slobodna ili podvrgnuta delovanju holnomnih stacionarnih ili nestacionarnih veza, izrazi za projekcije i koordinate brzine i ubrzanja imaju istu zatvorenu formu.
Da bi ova geometrijska interpretacija kinematičkih veličina bila primenjena na dinamiku tačke i, u daljem postupku, na dinamiku sistema, potrebno je uvesti u razmatranja i materijalnost mehaničkog sistema.

1.7.3. *Masa tačke i metrika konfiguracionog prostora*

Mehanička mera materijalnosti tačke je njena masa m. Ako se u prostor, čija je metrika definisana sa (1.6.9) odnosno (1.6.12) za slobodnu tačku ili (1.7.38) za neslobodnu tačku, uvede element $d\sigma$ srazmeran dužini luka ds

$$d\sigma = \sqrt{m}ds \, , \tag{1.7.58}$$

izraz

$$d\sigma^2 = mds^2 \tag{1.7.59}$$

takođe predstavlja metriku prostora. Pri tome je za slobodnu tačku

$$d\sigma^2 = m\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = mg_{ij}dq^i dq^j = a_{ij}dq^i dq^j \quad (i, j = 1,2,3), \tag{1.7.60}$$

a za neslobodnu tačku na vezi

$$d\sigma^2 = mg_{\alpha\beta}dq^\alpha dq^\beta = a_{\alpha\beta}dq^\alpha dq^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1,2). \tag{1.7.61}$$

Na ovaj način, preko metričkih tenzora $a_{ij} = mg_{ij}$ za slobodnu tačku i $a_{\alpha\beta} = mg_{\alpha\beta}$ za neslobodnu tačku uvedena je materijalnost u konfiguraciju prostora generalisanih koordinata q^i ili q^α. Ovi kovarijantni metrički tenzori karakterišu inerciona svojstva tačke u konfiguracionom prostoru. Kontravarijantni metrički tenzori, analogno prethodnom izlaganju (videti 1.6.15), definišu se kao:

$$a^{ij} = \frac{A^{ij}}{a}, \quad a^{\alpha\beta} = \frac{A^{\alpha\beta}}{a} \tag{1.7.62}$$

gde su: a – determinanta matrice tenzora a_{ij} odnosno $a_{\alpha\beta}$, a A^{ij} i $A^{\alpha\beta}$ – odgovarajući kofaktori. S obzirom na vezu metričkih tenzora a_{ij} i $a_{\alpha\beta}$ sa ranije definisanim g_{ij} i $g_{\alpha\beta}$ sledi da su:

$$a = m^3 g \quad A^{ij} = m^2 G^{ij}, \qquad a = m^2 g \quad A^{\alpha\beta} = mG^{\alpha\beta},$$

odnosno:

$$a^{ij} = \frac{1}{m} g^{ij}, \quad a^{\alpha\beta} = \frac{1}{m} g^{\alpha\beta}. \tag{1.7.63}$$

Analogno prethodnom izlaganju Kristofelovi simboli u prostoru sa metrikom (1.7.61) se definišu kao:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = [\alpha\beta,\gamma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right), \ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{bmatrix} = a^{\alpha\delta}\Gamma_{\beta\gamma,\delta}\,^{1)}. \tag{1.7.64}$$

Istu formu imaju i Kristofelovi simboli za metriku (1.7.60) samo što grčke oznake indeksa treba zameniti latinskim.

1.7.4. ***Kinetička energija materijalne tačke***

Kinetička energija izražena preko nezavisnih generalisanih koordinata je:
za slobodnu tačku

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mg_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j, \tag{1.7.65}$$

a za neslobodnu tačku sa skleronomnom vezom

$$T = \frac{1}{2} mg_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta, \tag{1.7.66}$$

---

1) Ubuduće će, umesto uglastih zagrada, za obeležavanje Kristofelovih simbola, biti korišćene oznake $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Inače, u literaturi se koriste i jedne i druge oznake.

tako da je u oba ova slučaja, s obzirom na (1.7.60) i (1.7.61),

$$d\sigma^2 = 2Tdt^2 . \qquad (1.7.67)$$

U slučaju kad je tačka izložena delovanju reonomne veze kinetička energija tačke, s obzirom na (1.7.48), osim generalisanih koordinata i generalisanih brzina, eksplicitno zavisi i od vremena i ima oblik

$$T = \frac{1}{2}m\left[g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + 2\vec{g}_\alpha\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\dot{q}^\alpha + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + 2b_\alpha\dot{q}^\alpha + c_0\right). \qquad (1.7.68)$$

pa obrazac (1.7.67) u ovom slučaju ne važi.

Na kraju ovog odeljka može se zaključiti da bazni vektori određuju transformaciju pri prelasku iz jednog koordinatnog sistema u drugi. Drugim rečima bazni vektori predstavljaju *tenzorsku transformaciju*. Pri tome oni vektori koji se transformišu na taj način predstavljaju tenzore prvog reda. Npr. brzina pretstavlja tenzor prvog reda jer se transformiše na taj način, što npr. nije slučaj sa ubrzanjem. Tenzori višeg reda transformišu se na sličan način, ali za ovo izlaganje to nema značaja i neće biti posebno razmatrano.
Treba napomenuti da, u slučaju kad je tačka izložena delovanju dveju nezavisnih veza, ona ima jedan stepen slobode, odnosno konfiguracioni prostor je jednodimenzioni i za razmatranje njenog kretanja besmisleno je koristiti tenzorski formalizam.

1.8. **Opšti principi mehanike. Diferencijalne jednačine kretanja**

Principi predstavljaju stavove pomoću kojih se mogu sagledati celovite osobine dinamičkih sistema u opštem slučaju, ili za neke posebne klase. Principi mogu pod određenim uslovima da zamene osnovne aksiome mehanike (Njutnove zakone) tako da, polazeći od njih, mogu da se izvedu diferencijalne jednačine kretanja svih ili samo nekih kategorija mehaničkih sistema.
Principi se dele na *diferencijalne* i *integralne.* Diferencijalni principi razmatraju elementarna pomeranja sistema u odnosu na neku uočenu ali proizvoljnu konfiguraciju sistema u uočenom i takođe proizvoljnom trenutku. Integralni principi su zasnovani na razmatranju konačne promene konfiguracije na konačnom vremenskom intervalu. Integralni principi nazivaju se i varijacioni ili ekstremalni jer u svojoj postavci izražavaju neke ekstremalne osobine sistema, što uslovljava primenu varijacionog računa. Diferencijalni principi su opštije primene od integralnih koji teško mogu da se uopšte na sisteme kao što su npr. neholonomni.

1.8.1. ***Generalisane sile***

U odeljku 1.5. razmatran je holonomni, u opštem slučaju reonomni, sistem tačaka M_ν $(\nu = 1,2,\ldots,N)$ sa n stepena slobode. Za određivanje njegovog položaja, uvedene su nezavisne generalisane koordinate q^α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, tako da su vektori položaja tačaka sistema funkcije generalisanih koordinata i vremena:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q^1, q^2, \ldots, q^n; t) \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N). \tag{1.8.1}$$

Virtuelna pomeranja $\delta\vec{r}_\nu$ uvedena su u odeljku 1.3. kao infinitezimalne veličine u fiksiranom, ali proizvoljnom, trenutku t. S obzirom na (1.8.1) mogu da se izraze u obliku:

$$\delta\vec{r}_\nu = \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha = \vec{g}_{(\nu)\alpha}\delta q^\alpha, \tag{1.8.2}$$

gde $\vec{g}_{(\nu)\alpha}$, po definiciji (1.7.34), označava bazni vektor koji, vezan za tačku M_ν, odgovara koordinati q^α konfiguracionog prostora. Veličine δq^α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$ su *generalisana virtuelna pomeranja* ili *varijacije generalisanih koordinata.* Ako na sistem deluju aktivne sile $\vec{F}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,N)$ njihov ukupni rad na virtuelnim pomeranjima (virtuelni rad) je

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\delta\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}\left(X_\nu\delta x_\nu + Y_\nu\delta y_\nu + Z_\nu\delta z_\nu\right), \tag{1.8.3}$$

odnosno, sobzirom na (1.8.2), u generalisanim koordinatama

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\vec{g}_{(\nu)\alpha}\delta q^\alpha . \tag{1.8.4}$$

Ako se uvede oznaka

$$Q_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\vec{g}_{(\nu)\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n) \tag{1.8.5}$$

virtuelni rad (1.8.4) može da se piše u obliku

$$\delta A = Q_\alpha\delta q^\alpha . \tag{1.8.6}$$

Upoređivanjem ovog izraza sa (1.8.3) može da se uoči da oba izraza za virtuelni rad imaju invarijantnu formu, tj. oba izraza predstavljaju linearne homogene forme varijacija koordinata. U izrazu (1.8.3) koeficijenti forme su projekcije sila na ose Dekartovog koordinatnog sistema a koeficijenti Q_α u izrazu (1.8.6) predstavljaju *generalisane sile.* Prema tome, kovarijantni vektor generalisanih sila Q_α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$ dobija se tenzorskom transformacijom (1.8.5). Međutim, korišćenje ove transformacije za određivanje generalisanih sila može da bude veoma složeno, pa se preporučuje da se neposredno odredi virtuelni rad (1.8.6) i iz njega očitaju generalisane sile kao koeficijenti uz varijacije δq^α. Dimenzije generalisanih sila zavise od dimenzija generalisanih koordinata. Njihov proizvod mora da ima dimenziju rada, tako da, ako generalisana koordinata ima dimenziju dužine, odgovarajuća kovarijantna generalisana sila ima dimenziju sile. Čest slučaj u praksi je da su neke generalisane koordinate bezdimenzione (uglovi) pa odgovarajuće generalisane sile imaju dimenzije momenta sile. U opštem slučaju generalisane sile mogu da budu funkcije generalisanih koordinata q^α, generalisanih brzina $\dot{q}^\alpha$ i vremena t, tj:

$$Q_\alpha = q_\alpha(q^1, q^2, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n; t) \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \tag{1.8.7}$$

1.8.2. *Princip virtuelnih pomeranja (Lagranžov princip). Opšta jednačina statike.*

Razmatra se ravnoteža, u opštem slučaju neslobodnog, sistema materijalnih tačaka. Uopštavajući zaključke koje su u svojim istraživanjima imali njegovi prethodnici (Galilej, Toričeli, Dekart, Bernuli,.....), Lagranž je formulisao princip virtuelnih pomeranja i postavio ga u osnove *analitičke statike*.
Ovaj princip, uz uslov da su veze zadržavajuće, može da se formuliše na sledeći način:

Ako se sistem materijalnih tačaka sa idealnim vezama nalazi u stanju ravnoteže, ukupni rad aktivnih sila na virtuelnim pomeranjima jednak je nuli.

Prema tome, ako su $\vec{F}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,N)$ aktivne sile koje deluju na sistem, matematička formulacija ovog principa (*opšta jednačina statike*) ima oblik

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta\vec{r}_\nu = 0\,. \tag{1.8.8}$$

Da bi se pokazalo da ova jednačina predstavlja *potrebne i dovoljne* uslove ravnoteže sistema, može se poći od toga da je potrebno i dovoljno da je svaka njegova tačka u stanju ravnoteže. Primenjujući aksiom oslobađanja od veza i zamenjujući veze dejstvom sila koje su jednake reakcijama odgovarajućih veza statički uslovi ravnoteže svih tačaka sistema su:

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu = 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots,N), \tag{1.8.9}$$

gde $\vec{R}_\nu$ predstavlja rezultantu reakcija veza koje deluju na $\nu -$ tu tačku, a $\vec{F}_\nu$ rezultanta sktivnih sila koje deluju na istu tačku. Pod ovim uslovima, ako su u nekom trenutku t_0 brzine svih tačaka sistema bile jednake nuli, one će biti jednake nuli i na neograničenom vremenskom intervalu. Drugim rečima kinetička energija sistema ispunjavaće uslove:

$$T(t_0) = 0, \qquad T(t > t_0) = 0 . \tag{1.8.10}$$

Ukupni rad reakcija idealnih veza na virtuelnim pomeranjima jednak je nuli, tj ispunjen je uslov (1.4.3), tako da se na osnovu jednačina (1.8.9) može dobiti (1.8.8). Međutim, ovakvim rasuđivanjem potvrđuje se samo to da je uslov (1.8.8) *potreban*. Da bi dokazali da je ovaj uslov i *dovoljan* , ograničimo se samo na stacionarne veze[1]. U tom slučaju virtuelna pomeranja su isto što i moguća, tako da jednačina (1.8.8) važi na mogućim pomeranjima[2]. Pretpostavljajući da važi jednačina (1.8.8), a da uslov (1.8.10) ne važi, tj. da je

$$T(t_0) = 0, \qquad T(t > t_0) > 0 \tag{1.8.11}$$

sistem počinje da se kreće iz stanja mira i njegove tačke dobijaju stvarna pomeranja $d\vec{r}_\nu$. Tada kinetička energija dobija priraštaj koji je jednak radu na stvarnim pomeranjima

$$dT = dA = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu d\vec{r}_\nu > 0 .$$

Pošto stvarna pomeranja pripadaju mogućim pomeranjima ova nejednakost je u suprotnosti sa jednačinom (1.8.8) tako da pretpostavka nije opravdana. Na taj način dokazana je *dovoljnost* jednačine (1.8.8).
Treba primetiti, da jednačina (1.8.8) važi i ako su veze neidealne s tim što, u tom slučaju, aktivnim silama treba pridodati komponente reakcija veza (sile trenja) čiji rad na virtuelnim pomeranjima nije jednak nuli (videti odeljak 1.4).
Ako se ravnoteža sistema posmatra u prostoru nezavisnih generalisanih koordinata q^α (Lagranžove koordinate), s obzirom na izraze (1.8.2) za virtuelna pomeranja i (1.8.5) za generalisane sile, jednačina (1.8.8) dobija oblik

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha \delta q^\alpha = 0$$

odakle se, zbog nezavisnosti generalisanih virtuelnih pomeranja δq^α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, dobija n jednačina

---

[1] Razmatranje ravnoteže sistema sa nestacionarnim vezama moguće je samo u izuzetno retkim slučajevima ako na svakoj nestacionarnoj vezi postoje stacionarne tačke i ako se sve materijalne tačke nalaze u tim stacionarnim tačkama.
[2] U tom slučaju, *princip virtuelnih pomeranja* može da ima naziv *princip mogućih pomeranja*.

$$Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n), \tag{1.8.12}$$

koje predstavljaju statičke uslove ravnoteže materijalnog sistema.
U jednačinama (1.8.12) ne figurišu reakcije veza pa, ukoliko postoji potreba da se neke od njih odrede, dovoljno je izvršiti oslobađanje od odgovarajućih veza i njihove reakcije tretirati kao nepoznate aktivne sile, pri čemu treba uvesti dodatna nezavisna virtuelna pomeranja nastala oslobađanjem od veza.

1.8.3. ***Lagranž - Dalamberov princip*. *Opšta jednačina dinamike*.**
Dalamberov (D'Alembert) princip[1)], prema kome se fiktivne sile inercije materijalnih tačaka «uravnotežavaju» sa aktivnim silama i reakcijama veza, omogućava da se princip virtuelnih pomeranja proširi na slučaj kretanja sistema. Naime, prema Dalamberovom principu, jednačine «ravnoteže» sistema materijalnih tačaka su:

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu = 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots,N) \tag{1.8.13}$$

gde je $-m_\nu \vec{a}_\nu$ sila inercije tačke M_ν koja ima masu m_ν i ubrzanje $\vec{a}_\nu$.
Primenjujući princip virtuelnih pomeranja na sistem sa idealnim vezama, s obzirom na (1.4.3), dobija se *opšta jednačina dinamike*

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu)\delta r_\nu = 0 \tag{1.8.14}$$

koja predstavlja matematičku formulaciju *Lagranž - Dalamberovog principa*:

Ukupni rad aktivnih sila i sila inercije materijalnog sistema sa idealnim vezama, na virtuelnim pomeranjima, jednak je nuli.

Lagranž je opštu jednačinu dinamike stavio u osnov *analitičke mehanike.* Iz nje se dobijaju osnovne jednačine kretanja sistema. Pored toga iz nje se mogu dobiti i osnovne teoreme dinamike, a može se koristiti za rešavanje zadataka dinamike neposrednom primenom.
U slučaju kada sistem miruje, iz opšte jednačine dinamike (1.8.14) neposredno se dobija opšta jednačina statike (1.8.8).

1.8.4. ***Lagranžove jednačine druge vrste***
Kada se kretanje holonomnog sistema od N tačaka sa n stepena slobode razmatra u konfiguracionom prostoru V_n nezavisnih koordinata $q^\alpha (\alpha = 1,2,\ldots,n)$,

opšta jednačina dinamike, s obzirom na (1.8.2), dobija oblik

[1)] Pretpostavlja se da su čitaoci upoznati sa Dalamberovim principom, tako da on ovde nije detaljnije razmatran.

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu)\vec{g}_{(\nu)\alpha}\delta q^\alpha = 0\,. \qquad (1.8.15)$$

Varijacije generalisanih koordinata δq^α (generalisana virtuelna pomeranja) su nezavisne međusobno pa je jednačina (1.8.15) zadovoljena samo kad su svi koeficijenti uz njih jednaki nuli, tj.:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu)\vec{g}_{(\nu)\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n)\,. \qquad (1.8.16)$$

Izrazi $\vec{a}_\nu \vec{g}_{(\nu)\alpha}$ $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, prema definiciji (1.7.53) predstavljaju kovarijantne koordinate ubrzanja $a_{(\nu)\alpha}$ tačke M_ν, tako da, kada se uzme u obzir i definicija (1.8.5) generalisane sile, jednačine (1.8.16) dobijaju oblik:

$$Q_\alpha - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu a_{(\nu)\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n)\,. \qquad (1.8.17)$$

Saglasno (1.7.56), kovarijantne koordinate ubrzanja M_ν imaju vrednosti:

$$a_{(\nu)\alpha} = \vec{a}_\nu \vec{g}_{(\nu)\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta_\nu}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \Theta_\nu}{\partial q^\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n)\,, \qquad (1.8.18)$$

gde je sa Θ_ν označena polovina kvadrata brzine tačke M_ν. Kinetička energija sistema predstavlja zbir kinetičkih energija svih tačaka sistema, tj.

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} T_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \Theta_\nu\,, \qquad (1.8.19)$$

pa, na osnovu (1.8.18) i (1.8.19), jednačine (1.8.17) mogu da se pišu u obliku:

$$Q_\alpha - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n),$$

odnosno:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \qquad (1.8.20)$$

Ovaj sistem jednačina se zove *Lagranžove jednačine druge vrste* i predstavlja kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja holonomnog mehaničkog sistema u konfiguracionom prostoru. U ovim jednačinama ne figuršu reakcije idealnih veza, tako da se kretanje holonomnog sistema može posmatrati kao kretanje u konfiguracionom prostoru slobodne tačke čija je kinetička energija jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji sistema. U opštem slučaju, na levim stranama jednačina (1.8.20) figurišu veličine $\ddot{q}^{\alpha}, \dot{q}^{\alpha}, q^{\alpha}, t$, a na desnim stranama generalisane sile koje su funkcije promenljivih $\dot{q}^{\alpha}, q^{\alpha}, t$. Prema tome, svaka od jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda, tako da ceo sistem Lagranžovih jednačina druge vrste ima minimalni red $2n$. Za date generalisane sile integralenjem jednačina dobijaju se opšta rešenja sa $2n$ neodređenih konstanti:

$$q^{\alpha} = q^{\alpha}(t; c_1, c_2, \ldots, c_{2n}) \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \tag{1.8.21}$$

Ako je poznato stanje sistema $q_0^{\alpha}, \dot{q}_0^{\alpha}$ u nekom datom trenutku t_0, konstante se određuju iz $2n$ algebarskih jednačina:

$$q^{\alpha}(t_0; c_1, c_2, \ldots, c_{2n}) = q_0^{\alpha}, \qquad \dot{q}^{\alpha}(t_0; c_1, c_2, \ldots, c_{2n}) = \dot{q}_0^{\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \tag{1.8.22}$$

Zamenom tako određenih konstanti u opšta rešenja (1.8.21) dobijaju se konačne jednačine kretanja holonomnog sistema:

$$q^{\alpha} = f^{\alpha}(t) \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \tag{1.8.23}$$

Lagranžove jednačine druge vrste su veoma pogodne za određivanje kretanja mehaničkog sistema, a postupak za njihovo formiranje je jednostavan. Dovoljno je odrediti kinetičku energiju kao funkciju nezavisnih generalisanih koordinata i generalisanih brzina i formirati izraz za rad aktivnih sila na nezavisnim generalisanim virtuelnim pomeranjima iz kojeg se jednostavno određuju generalisane sile. Zatvorena forma jednačina (1.8.20) je ista, bez obzira da li je sistem skleronoman ili reonoman.

1.8.5. ***Kinetička energija materijalnog sistema***

Vektori položaja tačaka holonomnog reonomnog sistema mogu da se izraze kao funkcije nezavisnih generalisanih koordinata i vremena, tako da su brzine tačaka sistema:

$$\vec{v}_{\nu} = \frac{d\vec{r}_{\nu}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} = \vec{g}_{(\nu)\alpha} \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N). \tag{1.8.24}$$

Ako je m_{ν} masa $\nu-$te tačke, s obzirom na ovaj izraz za brzinu, kinetičke energije T_{ν} svake tačke posebno su:

$$T_{\nu} = \frac{1}{2} m_{\nu} v_{\nu}^2 = \frac{1}{2} m_{\nu} \left[\vec{g}_{(\nu)\alpha} \vec{g}_{(\nu)\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} + 2 \vec{g}_{(\nu)\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \dot{q}^{\alpha} + \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (\nu = 1,\ldots,N), \tag{1.8.25}$$

odnosno:

$$T_\nu = \frac{1}{2}\left(a_{(\nu)\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2b_{(\nu)\alpha}\dot{q}^\alpha + c_{(\nu)0}\right) \quad (\nu = 1,2,\ldots,N), \tag{1.8.26}$$

gde su:

$$a_{(\nu)\alpha\beta} = m_\nu \vec{g}_{(\nu)\alpha}\vec{g}_{(\nu)\beta}, \;\; b_{(\nu)\alpha} = m_\nu \vec{g}_{(\nu)\alpha}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \;, \;\; c_{(\nu)0} = m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 . \tag{1.8.27}$$

Kinetička energija celog sistema je

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} T_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\left(a_{(\nu)\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2b_{(\nu)\alpha}\dot{q}^\alpha + c_{(\nu)0}\right), \tag{1.8.28}$$

odnosno, kad se uvedu oznake:

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{(\nu)\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\nu=1}^{N} b_{(\nu)\alpha} = b_\alpha, \quad \sum_{\nu=1}^{N} c_{(\nu)0} = c_0 \;,$$

$$T = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2b_\alpha \dot{q}^\alpha + c_0) \,. \tag{1.8.29}$$

Kinetička energija holonomnog reonomnog sistema je nehomogena kvadratna forma generalisanih brzina pri čemu su koeficijenti $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c_0$, u opštem slučaju, funkcije nezavisnih generalisanih koordinata i vremena. Prema tome, kinetička energija holonomnog reonomnog mehaničkog sistema može da se simbolički izrazi kao

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \,, \tag{1.8.30}$$

gde su:

$$T_2 = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad T_1 = b_\alpha \dot{q}^\alpha, \quad T_0 = \frac{1}{2}c_0 \,. \tag{1.8.31}$$

Kad je sistem skleronoman, vektori položaja tačaka sistema ne zavise eksplicitno od vremena, tj: $\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \equiv 0$ $(\nu = 1,2,\ldots,N)$, tako da su, s obzirom na (1.8.27), $b_\alpha = 0, c_0 = 0$, pa se kinetička energija svodi na homogenu kvadratnu formu generalisanih brzina, tj.

$$T = T_2 = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \,, \tag{1.8.32}$$

gde koeficijenti $a_{\alpha\beta}$ ove kvadratne forme zavise samo od nezavisnih generalisanih koordinata. U ovom slučaju kinetička energija je jednaka nuli samo kad sistem miruje $(\dot{q}^{\alpha}=0\ \forall\alpha=1,2,\ldots,n)$ a pozitivna je ako se sistem kreće $(T>0\ \exists\,\dot{q}^{\alpha}\neq 0)$. Prema tome, kinetička energija skleronomnog mehaničkog sistema je pozitivno definitna kvadratna forma generalisanih brzina, pa matrica koeficijenata $a_{\alpha\beta}$, prema Silvesterovoj teoremi, ispunjava uslove:

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ldots\ldots,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0\,. \tag{1.8.33}$$

Ako se, analogno (1.7.67), uvede metrika $n-$ dimenzionog konfiguracionog prostora

$$d\sigma^{2}=2Tdt^{2}=a_{\alpha\beta}dq^{\alpha}dq^{\beta}, \tag{1.8.34}$$

sveukupnost koeficijenata $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,2,\ldots,n)$ predstavlja kovarijantni metrički tenzor konfiguracionog prostora V_n [1)]. Na taj način izvršeno je uopštavanje pojma metričkog tenzora.Obrazac (1.8.34) ima smisla ako je holonomni sistem skleronoman. Za holonomni reonomni sistem, čija kinetička energija ima oblik (1.8.29), ovaj obrazac ne važi. Ako bi se za reonomne sisteme element luka definisao obrascem (1.8.34), pored n nezavisnih koordinata q^{α} i vreme t bi se javilo kao koordinata sistema. Prostori sa takvim linijskim elementom nazivaju se *reonomni prostori*.

1.8.6. ***Analiza Lagranžovih jednačina druge vrste holonomnog skleronomnog sistema***

Koeficijenti $a_{\alpha\beta}$, osim zavisnosti od koordinata q^{α}, sadrže i konstantne parametre kao što su mase sistema i razne geometrijske veličine.Usled toga kovarijantni metrički tenzor, u određenom smislu, karakteriše inercione osobine sistema u konfiguracionom prostoru V_n, tako da se njegova matrica, u stručnoj literaturi, često naziva *matrica inercije* ili *matrica masa***.**
Uopštavanje kovarijantnog metričkog tenzora omogućava uopštavanje i ostalih pojmova definisanih pomoću njega. Kontravarijantni metrički tenzor $\alpha^{\alpha\beta}$

[1)] Ovde je zadržana ista oznaka $a_{\alpha\beta}$ kovarijantnog metričkog tenzora *n*-dimenzionog prostora V_n kao i u (1.7.61) za dvodimenzioni prostor V_2.

n – dimenzionog konfiguracionog prostora V_n, kao i u prethodnim izlaganjima, definiše se kao

$$a^{\alpha\beta} = \frac{A^{\alpha\beta}}{a} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.8.35}$$

gde su $A^{\alpha\beta}$ odgovarajući kofaktori matrice kovarijantnog metričkog tenzora, a a njena determinanta.
Kristofelovi simboli prve i druge vrste u konfiguracionom prostoru V_n, analogno (1.7.64), imaju isti simbolički oblik, tj.:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right), \qquad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = a^{\alpha\delta}\Gamma_{\beta\gamma,\delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.8.36}$$

Apsolutni izvodi nekih kovarijantnih i kontravarijantnih vektora u_α i u^α po definiciji su:

$$\frac{Du_\alpha}{Dt} = \frac{du_\alpha}{dt} - \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} u_\beta \dot{q}^\gamma, \qquad \frac{Du^\alpha}{Dt} = \frac{du^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta \dot{q}^\gamma. \tag{1.8.37}$$

Ako se Lagranžove jednačine druge vrste (1.8.20) skleronomnog sistema, s obzirom na (1.8.32), napišu u razvijenom obliku dobija se:

$$a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.8.38}$$

Nemi indeksi (indeksi po kojima se vrši sabiranje) mogu da menjaju mesta tako da važi:

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}\dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma,$$

pa, s obzirom na (1.8.36), jednačine (1.8.38) dobijaju oblik:

$$a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta + \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.8.39}$$

Ovo su kovarijantne jednačine kretanja hololonomnog skleronomnog sistema u V_n . Transformacijom ovih jednačina na sledeći način:

$$\frac{d}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta) - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = Q_\alpha,$$

pri čemu je:

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} = \Gamma_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha,\beta}\,,$$

dobija se:

$$\frac{d}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}) - \Gamma_{\gamma\alpha,\beta}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = Q_{\alpha}\,,$$

odnosno:

$$\frac{d}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}) - \Gamma^{\delta}_{\gamma\alpha}a_{\delta\beta}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = Q_{\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{1.8.40}$$

Korišćenjem izraza za apsolutni izvod kovarijantnog vektora u (1.8.37), kovarijantne jednačine holonomnog skleronomnog sistema mogu da se pišu u skraćenom obliku:

$$\frac{D}{Dt}(a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}) = Q_{\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \tag{1.8.41}$$

Kontravarijantne jednačine kretanja u skraćenom obliku mogu da se jednostavno dobiju iz jednačina (1.8.39) njihovim množenjem sa kontravarijantnim tenzorom $a^{\alpha\delta}$ i sabiranjem po indeksu α :

$$a^{\alpha\delta}a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + a^{\alpha\delta}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = a^{\alpha\delta}Q_{\alpha}\,.$$

Pošto su:

$$a^{\alpha\delta}a_{\alpha\beta} = \delta^{\delta}_{\beta}, \qquad \delta^{\delta}_{\beta}\ddot{q}^{\beta} = \ddot{q}^{\delta}, \qquad a^{\alpha\delta}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha} = \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}, \qquad a^{\alpha\delta}Q_{\alpha} = Q^{\delta}\,,$$

dobijaju se *kontravarijantne jednačine kretanja u knfiguracionom prostoru* V_n :

$$\ddot{q}^{\delta} + \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = Q^{\delta} \qquad (\delta = 1,2,\ldots,n), \tag{1.8.42}$$

odnosno, s obzirom na (1.8.37), u skraćenom obliku:

$$\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{Dt} = Q^{\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n), \tag{1.8.43}$$

gde su Q^{α} *kontravarijantne generalisane sile*. Kontravarijantne generalisane sile Q^{α} dimenziono se razlikuju od kovarijantnih generalisanih sila Q_{α} . Iz (1.8.42) se vidi da kontravarijantne sile imaju dimenzije odgovarajućih generalisanih ubrzanja, dok kovarijantne sile imaju najčešće dimenzije sile (ako odgovarajuća generalisana koordinata q^α ima dimenziju dužine), ili momenta sile (ako je odgovarajuća generalisana koordinata bezdimenziona, npr. ugao). U opštem slučaju, i kovarijantne i kontravarijantne generalisane sile mogu biti funkcije generalisanih koordinata q^α, generalisanih brzina $\dot{q}^\alpha$, i vremena t.

1.8.7. ***Teorema o promeni mehaničke energije holonomnog skleronomnog sistema***

Neka generalisane sile Q_α ne zavise od generalisanih brzina, tj:

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q^1, q^2, \ldots, q^n; t) \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n), \tag{1.8.44}$$

i neka postoji funkcija

$$\Pi = \Pi(q, q, \ldots, q; t), \tag{1.8.45}$$

takva da je virtuelni rad generalisanih sila

$$\delta A = -\delta\Pi,$$

odnosno

$$Q_\alpha \delta q^\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha,$$

tada su generalisane sile:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n), \tag{1.8.46}$$

potencijalne sile, a funkcija Π je *potencijalna energija sistema* (*potencijal sila*).

Ako, osim potencijalnih sila (1.8.46) na sistem deluju i nepotencijalne sile $\tilde{Q}_\alpha$, Lagranžove jednačine (1.8.20) imaju oblik:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} + \tilde{Q}_\alpha \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \tag{1.8.47}$$

Množenjem svake od jednačina odgovarajućim generalisanim brzinama $\dot{q}^\alpha$ i sabiranjem dobija se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \tilde{Q}_\alpha \dot{q}^\alpha. \tag{1.8.48}$$

Leva strana ove jednačine se svodi na

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)\dot{q}^{\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\ddot{q}^{\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}=\frac{d}{dt}(2T)-\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{dt}.$$

Izvod potencijalne energije (1.8.45) po vremenu je

$$\frac{d\Pi}{dt}=\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}+\frac{\partial \Pi}{\partial t},$$

tako da jednačina (1.8.48) dobija oblik

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{d\Pi}{dt}+\frac{\partial \Pi}{\partial t}+\tilde{Q}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha},$$

odnosno

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}(T+\Pi)=\tilde{P}+\frac{\partial \Pi}{\partial t}, \tag{1.8.49}$$

gde su: $E=T+\Pi$ - ukupna mehanička energija sistema a $\tilde{P}=\tilde{Q}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha}$ snaga nepotencijalnih sila. Jednačina (1.8.49) predstavlja teoremu o promeni mehaničke energije holonomnog skleronomnog sistema izloženog delovanju nepotencijalnih sila i potencijalnih sila sa nestacionarnim potencijalom. Ova teorema će biti razmatrana posebno za različite generalisane sile.

a) *Konzervativne sile.* Kada na sistem deluju samo potencijalne sile čija potencijalna energija ne zavisi eksplicitno od vremena, tj.:

$$\tilde{Q}_{\alpha}=0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial t}\equiv 0,$$

iz jednačine (1.8.49) se dobija *zakon održanja (konzervacije) mehaničke energije*

$$E=E_0=const., \tag{1.8.50}$$

tako da potencijalne sile predstavljaju *konzervativne sile* ako potencijalna energija ne zavisi eksplicitno od vremena. Mehanički sistemi na koje deluju samo konzervativne sile zovu se *konzervativni sistemi*. Jednačina (1.8.50) predstavlja prvi integral (*integral energije*) diferencijalnih jednačina kretanja konzervativnog sistema.

b) *Giroskopske sile.* Nepotencijalne sile koje ne vrše rad odnosno, sile čija je snaga jednaka nuli, tj.

$$Q_{\alpha}^{\Gamma}\dot{q}^{\alpha}=0, \tag{1.8.51}$$

nazivaju se giroskopske sile. Giroskopske sile se često javljaju u obliku homogene linearne forme generalisanih brzina:

$$Q_\alpha^\Gamma = \gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha, \tag{1.8.52}$$

čiji koeficijenti $\gamma_{\alpha\beta}$ obrazuju kososimetričnu matricu $(\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha})$:

$$\{\gamma_{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ -\gamma_{12} & 0 & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{1n} & -\gamma_{2n} & \cdots & 0 \end{Bmatrix}.$$

Usled toga, snaga takvih je sila jednaka nuli, tj:

$$P^\Gamma = Q_\alpha^\Gamma \dot{q}^\alpha = \gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = 0. \tag{1.8.53}$$

Prema tome, giroskopske sile ne utiču na promenu ukupne mehaničke energije. U posebnom slučaju, kada na sistem, pored potencijalnih sila čija potencijalna energija ne zavisi eksplicitno od vremena (konzervativne sile), deluju i nepotencijalne giroskopske sile, važi zakon (teorema) održanja mehaničke energije.

c) <u>Disipativne sile.</u> Ako, osim potencijalnih konzervativnih sila, na skleronomni sistem deluju nepotencijalne sile Q_α^w koje vrše negativan rad, odnosno čija je snaga

$$P^w = Q_\alpha^w \dot{q}^\alpha \leq 0, \tag{1.8.54}$$

teorema o promeni mehaničke energije (jednačina (1.8.49)) dobija oblik

$$\frac{dE}{dt} = P^w \leq 0. \tag{1.8.55}$$

To znači da delovanjem sila Q_α^w sa osobinom (1.8.54), mehanička energija opada tokom kretanja, odnosno dolazi do njenog rasipanja (disipacije), pa takve sile imaju naziv *disipativne sile.* U njih spadaju sve sile otpora kretanju mehaničkog sistema.
Kao primer, razmotrimo sile otpora kao linearne homogene forme generalisanih brzina

$$Q_\alpha^w = -b_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta, \tag{1.8.56}$$

čiji su koeficijenti $b_{\alpha\beta}$ simetrični $(b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha})$ i imaju takve vrednosti da je $b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} \geq 0$. Snaga takvih sila je

$$P^{w} = Q_{\alpha}^{w}\dot{q}^{\alpha} = -b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} \leq 0. \qquad (1.8.57)$$

Funkcija

$$R = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} \geq 0 \qquad (1.8.58)$$

je *Relijeva* (Rayleigh) *disipativna funkcija*, pomoću koje sile otpora (1.8.56) mogu da se izraze kao:

$$Q_{\alpha}^{w} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \qquad (1.8.59)$$

Usled toga snaga ovih disipativnih sila je

$$P^{w} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha} = -2R, \qquad (1.8.60)$$

pa na osnovu teoreme o promeni mehaničke energije skleronomnog sistema na koji deluju konzervativne i disipativne sile (1.8.59) sledi

$$\frac{dE}{dt} = -2R, \qquad (1.8.61)$$

što znači da dvostruka Relijeva funkcija predstavlja brzinu opadanja mehaničke energije.

1.8.8. ***Lagranžova funkcija (kinetički potencijal).***

Lagranžove jednačine druge vrste za konzervativne sisteme, u nezavisnim koordinatama, imaju oblik:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n) \qquad (1.8.62)$$

Ako se uvede funkcija koja predstavlja razliku kinetičke i potencijalne energije

$$L = T - \Pi, \qquad (1.8.63)$$

jednačine (1.8.62) mogu da se napišu u obliku:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n). \qquad (1.8.64)$$

Funkcija L se naziva *Lagranžova funkcija* ili *kinetički potencijal*. Negde se ova funkcija nalazi i pod nazivom *slobodna energija*. U opštem slučaju, kad je mehanički sistem reonoman i kad na njega, osim potencijalnih sila deluju i nepotencijalne sile $\tilde{Q}_\alpha$, tj:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} + \tilde{Q}_\alpha(q^1,\ldots,q^n;\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n;t), \tag{1.8.65}$$

Lagranžove jednačine druge vrste (1.8.20), izražene preko Lagranžove funkcije L, imaju oblik:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \tilde{Q}_\alpha \quad (\alpha = 1,\ldots,n), \tag{1.8.66}$$

pri čemu je za reonomne sisteme, s obzirom na (1.8.30) i (1.8.31),

$$L = T - \Pi = L_2 + L_1 + L_0, \tag{1.8.67}$$

gde su:

$$L_2 = T_2 = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad L_1 = T_1 = b_\alpha \dot{q}^\alpha, \quad L_0 = T_0 - \Pi = \frac{1}{2}c_0 - \Pi. \tag{1.8.68}$$

1.8.9. ***Kanonske (Hamiltonove) jednačine.***

Stanje mehaničkog sistema karakterišu *Lagranžove promenljive* $t; q^\alpha; \dot{q}^\alpha$ $(\alpha = 1,\ldots,n)$, tako da rešavanjem Lagranžovih jednačina druge vrste, koje čine sistem od n diferencijalnih jednačina drugog reda, mogu da se odrede konačne jednačine kretanja sistema, ako je poznato stanje sistema $q_0^\alpha; \dot{q}_0^\alpha$ u nekom utvrđenom trenutku t_0. Umesto Lagranžovih promenljivih stanja Hamilton je predložio promenljive $t; q^\alpha; p_\alpha$ $(\alpha = 1,\ldots,n)$,gde su p_α*-generalisani impulsi* definisani izrazima:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (\alpha = 1,\ldots,n), \tag{1.8.69}$$

što, s obzirom da potencijalna energija Π ne zavisi od generalisanih brzina, može da se piše i kao:

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (\alpha = 1,\ldots,n). \tag{1.8.70}$$

U opštem slučaju, za reonomne sisteme, s obzirom na (1.8.67) i (1.8.67) generalisani impulsi su:

$$p_\alpha = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + b_\alpha \quad (\alpha = 1,\dots,n). \tag{1.8.71}$$

Ove linearne jednakosti, zahvaljujući osobinama metričkog tenzora $a_{\alpha\beta}$, mogu da se reše po generalisanim brzinama:

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta - b^\alpha \quad (\alpha = 1,\dots,n), \tag{1.8.72}$$

gde su: $b^\alpha = a^{\alpha\beta} b_\beta$. Na taj način, Lagranžove promenljive $t; q^\alpha; \dot{q}^\alpha$ $(\alpha = 1,\dots,n)$ mogu da budu zamenjene *Hamiltonovim promenljivim* (drugi naziv - *kanonske promenljive*) $t; q^\alpha; p_\alpha$ $(\alpha = 1,\dots,n)$ koje, takođe, u potpunosti karakterišu stanje sistema.

Uvođenjem Hamiltonovih promenljivih, Lagranžove jednačine druge vrste, koje čine sistem od n diferencijalnih jednačina drugog reda za određivanje n funkcija $q^\alpha = q^\alpha(t)$, mogu se zameniti ekvivalentnim sistemom od $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda za određivanje $2n$ funkcija $q^\alpha = q^\alpha(t), p_\alpha = p_\alpha(t)$. Skup međusobno nezavisnih veličina q^α, p_α predstavlja u $2n$ - dimenzionom prostoru tačku čije kretanje karakteriše promenu stanja mehaničkog sistema. Prostor sa koordinatama q^α, p_α $(\alpha = 1,\dots,n)$ naziva se *fazni prostor*.

Za formiranje jednačina kretanja mehaničkog sistema pomoću Hamiltonovih (kanonskih) promenljivih stanja, definisana je *Hamiltonova funkcija* H izrazom

$$H = p_\alpha \hat{\dot{q}}^\alpha - \hat{L}, \tag{1.8.73}$$

gde je sa $\hat{\dot{q}}^\alpha, \hat{L}$ označeno da su u tim izrazima generalisane brzine $\dot{q}^\alpha$ izražene preko generalisanih impulsa p_α, pomoću relacija (1.8.72). Prema tome, u opštem slučaju, za razliku od Lagranžove funkcije L koja zavisi od generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena, Hamiltonova funkcija H je funkcija generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i vremena, tj.

$$H = H(q^1,\dots,q^n; p_1,\dots,p_n; t). \tag{1.8.74}$$

Kada se u izrazu (1.8.73) za Hamiltonovu funkciju uvrste generalisane brzine,

izražene u (1.8.72) preko generalisanih impulsa, dobija se

$$H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - b^\alpha p_\alpha + \frac{1}{2} b_\alpha b^\alpha - T_0 + \Pi, \tag{1.8.75}$$

odnosno,

$$H = H_2 + H_1 + H_0, \tag{1.8.76}$$

gde su:

$$H_2 = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \qquad H_1 = -b^\alpha p_\alpha, \qquad H_0 = \frac{1}{2} b_\alpha b^\alpha - T_0 + \Pi\,.$$

Za sistem koji je izložen dejstvu potencijalnih sila, s obzirom na ovakvu strukturu Hamiltonove funkcije, izvedene su *kanonske diferencijalne jednačine kretanja*:

$$\frac{dq^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)\,. \tag{1.8.77}$$

Ove jednačine obrazuju sistem od $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda. Prvih n jednačina ovog sistema neposredno sledi na osnovu relacija (1.8.72) i strukture Hamiltonove funkcije (1.8.75). Druga grupa jednačina se dobija na osnovu Lagranžovih jednačina druge vrste. Ovde je izvođenje tih jednačina izostavljeno i biće razmatrano u kasnijim izlaganjima.
Diferenciranjem Hamiltonove funkcije po vremenu dobija se

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{dq^\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}\,, \tag{1.8.78}$$

što se, u skladu sa kanonskim jednačinama (1.8.77), svodi na

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}\,. \tag{1.8.79}$$

U posebnom slučaju, kad je sistem skleronoman, kinetička energija ne zavisi eksplicitno od vremena tako da na osnovu (1.8.76) sledi:

$$H_2 = \hat{T} = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \qquad H_1 = 0, \qquad H_0 = \Pi\,.$$

Hamiltonova funkcija holonomnog skleronomnog sistema predstavlja ukupnu mehaničku energiju, tj.

$$H = \hat{T} + \Pi, \tag{1.8.80}$$

gde je sa $\hat{T}$ označeno da je kinetička energija izražena preko generalisanih impulsa. Ako su potencijalne sile konzervativne, tada ni potencijalna energija ne zavisi eksplicitno od vremena, a samim tim ni Hamiltonova funkcija, tako da je, s obzirom na (1.8.79),

$$\frac{dH}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad H=h=\text{const.}, \tag{1.8.81}$$

što predstavlja zakon održanja ukupne mehaničke energije.

1.8.10. ***Ciklički integrali.***

Kako je pokazano, za konzervativne sisteme postoji jedan prvi integral – integral energije (zakon održanja mehaničke energije) koji je kvadratan po brzinama sistema i ne zavisi od izbora koordinatnog sistema. Pod određenim uslovima, iz teorema o promeni količine kretanja i momenta količine kretanja, mogu se odrediti i neki prvi integrali koji su linearni po brzinama sistema. Ovde će biti razmatrani integrali koji zavise od izbora koordinatnog sistema. Ako su Lagranžove diferencijalne jednačine u nezavisnim koordinatama:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}}=Q_{\alpha} \qquad (\alpha=1,\ldots,n), \tag{1.8.82}$$

takve da, među nezavisnim koordinatama q^{α}, postoji koordinata q^{ν} za koju je odgovarajuća generalisana sila Q_{ν} jednaka nuli i ako kinetička energija ne zavisi eksplicitno od te koordinate, tj:

$$Q_{\nu}=0, \qquad \frac{\partial T}{\partial q^{\nu}}=0, \tag{1.8.83}$$

tada, $\nu-$ta jednačina u (1.8.82) ima oblik

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right)=0. \tag{1.8.84}$$

Odavde sledi prvi integral

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}}=C_{\nu}=\text{const.} \tag{1.8.85}$$

koji se zove *ciklički integral*, a odgovarajuća koordinata q^{ν} je *ciklička koordinata*. S obzirom na strukturu kinetičke energije ovaj integral je linearan po generalisanim brzinama i ima oblik

$$a_{\nu\alpha}\dot{q}^{\alpha}+b_{\nu}=C_{\nu}, \tag{1.8.86}$$

odnosno, kad se ima u vidu definicija generalisanog impulsa (1.8.71)

$$p_{\nu}=C_{\nu}. \tag{1.8.87}$$

Kako je već napomenuto, generalisani impulsi pod određenim uslovima mogu da karakterišu količinu kretanja ili moment količine kretanja sistema pa, u tom slučaju, ciklički integrali predstavljaju zakone održanja tih veličina.

1.8.11. ***Varijacioni principi. Hamiltonov princip.***

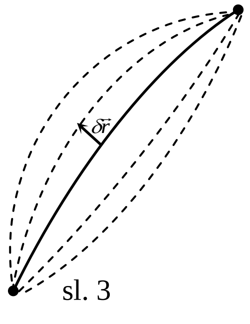
Za razliku od diferencijalnih principa, varijacioni (integralni) principi upoređuju pomeranja na konačnom vremenskom intervalu a ne u datom trenutku. Kretanje sistema predstavljeno je kao kretanje reprezentativne tačke u $n-$dimenzionom konfiguracionom prostoru koordinata q^{α} tako da jednačine:

$$q^{\alpha}=q^{\alpha}(t) \qquad (\alpha=1,\ldots,n) \tag{1.8.88}$$

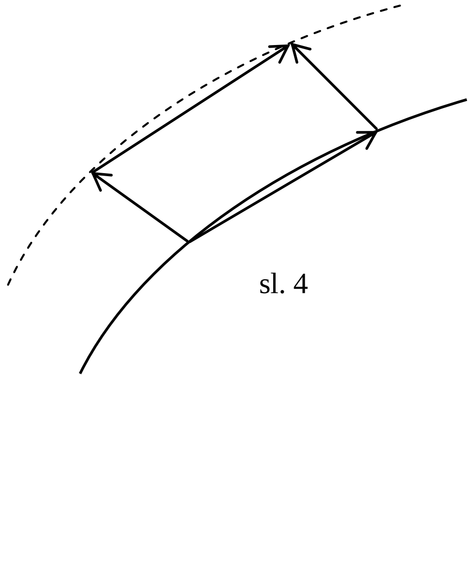
određuju tzv. putanju sistema u konfiguracionom prostoru. Ako se kretanje sistema posmatra u nekom konačnom intervalu $[t_0,t_1]$ skup koordinata: $q_0^{\alpha}=q^{\alpha}(t_0)$ $(\alpha=1,\ldots,n)$ određuje početnu konfiguraciju sistema, a skup koordinata: $q_1^{\alpha}=q^{\alpha}(t_1)$ $(\alpha=1,\ldots,n)$ određuje krajnju konfiguraciju sistema. Iz jedne konfiguracije u drugu sistem može da pređe, za isti vremenski interval, po beskonačno mnogo putanja. Među svim tim mogućim putanjama samo jedna je *direktna* (*stvarna*) i to ona koja je određena jednačinama (1.8.88). Pri tome sve moguće putanje moraju da budu u istom konfiguracionom prostoru, tj. da se nalaze na vezama kao i stvarna putanja. Moguće putanje koje nisu stvarne (direktne) nazivaju se i *zaobilazne putanje.* Luk na putanji između početnog i krajnjeg položaja je put (direktni ili zaobilazni).

Varijacije koordinata. Varijacija funkcije.

U nekom proizvoljnom, ali utvrđenom, trenutku $t\in[t_0,t_1]$, sa stvarne putanje moguće je preći na zaobilaznu putanju pomoću virtuelnog pomeranja. Tako, ako je $\vec{r}_{\nu}$ vektor položaja $\nu-$te tačke na stvarnoj putanji, u istom trenutku, vektor položaja na mogućoj zaobilaznoj putanji je $\vec{r}_{\nu}+\delta\vec{r}_{\nu}$. Na sl.3, na primeru jedne tačke, stvarna putanja prikazana je punom linijom, a zaobilazne isprekidanom. Virtuelno pomeranje $\delta\vec{r}$ je varijacija vektora položaja i zavisi od vremena. Na sl.4 su prikazane varijacije vektora položaja u trenucima t i $t+dt$.



sl. 3


sl. 4

Sa slike se vidi da je

$$\delta\vec{r} + d(\vec{r} + \delta\vec{r}) = d\vec{r} + \delta(\vec{r} + d\vec{r})$$

odnosno

$$\delta\vec{r} + d\vec{r} + d(\delta\vec{r}) = d\vec{r} + \delta\vec{r} + \delta(dr)$$

tako da je

$$d(\delta\vec{r}) = \delta(d\vec{r}), \tag{1.8.89}$$

što **znači da su operacije diferenciranja i variranja komutativne**[1).]
Na osnovu ove osobine, za proizvoljnu tačku M_ν je

$$d(\delta\vec{r}_\nu) = \delta(d\vec{r}_\nu) \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha\right) = \delta\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}dq^\alpha + \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}dt\right)$$

odnosno, s obzirom da je $\delta t = 0$,

$$\left(\frac{\partial^2\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}dq^\beta + \frac{\partial^2\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial t}dt\right)\delta q^\alpha + \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}d(\delta q^\alpha) =$$
$$= \left(\frac{\partial^2\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}dq^\alpha + \frac{\partial^2\vec{r}_\nu}{\partial t \partial q^\beta}dt\right)\delta q^\beta + \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\delta(dq^\alpha)$$

odakle se, posle usaglašavanja nemih indeksa, dobija

$$\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\left[d(\delta q^\alpha) - \delta(dq^\alpha)\right] = 0 .$$

Odavde, zbog nezavisnosti baznih vektora, slede relacije:

$$d(\delta q^\alpha) = \delta(dq^\alpha) \qquad \text{ili} \qquad \frac{d}{dt}(\delta q^\alpha) = \delta\dot{q}^\alpha \qquad (\alpha = 1,\ldots,n) . \tag{1.8.90}$$

Prema tome, komutativnost diferenciranja i variranja važi i za generalisane koordinate.
Ako postoji neka funkcija f, koja zavisi od kretanja sistema, njena vrednost na stvarnoj trajektoriji, u opštem slučaju, je

---

[1)] Ova osobina ima smisla jer su razmatrana kretanja sinhrona (svakom položaju na stvarnoj putanji istovremeno je koordiniran položaj na zaobilaznoj putanji). U protivnom, u opštem slučaju osobina komutativnosti diferenciranja i variranja ne važi.

$$f = f(q^\alpha;\dot{q}^\alpha;t)\,,$$

a na zaobilaznoj trajektoriji

$$\overline{f} = f(q^\alpha + \delta q^\alpha;\dot{q}^\alpha + \delta\dot{q}^\alpha;t)\,.$$

Varijacija funkcije f predstavlja razliku njenih vrednosti na zaobilaznoj i direktnoj putanji, tj.

$$\Delta f = \overline{f} - f = f(q^\alpha + \delta q^\alpha;\dot{q}^\alpha + \delta\dot{q}^\alpha;t) - f(q^\alpha;\dot{q}^\alpha;t)$$

Ako se posmatra zaobilazna putanja, koja je vrlo bliska direktnoj, pri razvijanju funkcije Δf u red po varijacijama $\delta q^\alpha, \delta\dot{q}^\alpha$, dovoljno je zadržati se samo na linearnim članovima, dok se ostali članovi zanemaruju kao infinitezimale višeg reda. Tako se dobija *prva varijacija* funkcije

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha}\delta\dot{q}^\alpha \tag{1.8.91}$$

koja se najčešće naziva samo *varijacija funkcije*.

<u>*Hamiltonov princip*</u>

Razmatra se materijalni sistem sa n stepena slobode sa sledećim ograničenjima:

- Sistem je holonoman.
- Na sistem deluju konzervativne aktivne sile.
- Zaobilazne putanje su na infinitezimalnim rastojanjima od direktne.
- Sistem polazi iz početnog položaja u trenutku t_0 i stiže u krajnji položaj po direktnoj i po zaobilaznim putanjama u isto vreme t_1.
- Kretanje je sinhrono.

Funkcional

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{1.8.92}$$

naziva se *dejstvo u Hamiltonovom smislu* (uobičajen je kraći naziv: *Hamiltonovo dejstvo*) i predstavlja veličinu koja je određena kretanjem sistema u intervalu $[t_0, t_1]$. Podintegralna funkcija Hamiltonovog dejstva je Lagranžova funkcija (kinetički potencijal) $L = T - \Pi$ koja, u opštem slučaju, zavisi od Lagranžovih promenljivih

$$L = L(q^1,\ldots,q^n;\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n;t)\,, \tag{1.8.93}$$

tako da, za sisteme sa navedenim osobinama, važe Lagranžove jednačine druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,n) \quad . \tag{1.8.94}$$

Za kretanje sistema, pod navedenim uslovima, *Hamiltonov princip* glasi:

Hamiltonovo dejstvo, pri kretanju holonomnog sistema na koji deluju konzervativne sile, na stvarnoj trajektoriji ima stacionarnu vrednost u poređenju sa kretanjem po zaobilaznoj putanji.

Uslov stacionarnosti nekog funkcionala (ili funkcije) je da je prva varijacija tog funkcionala (ili funkcije) jednaka nuli, tako da je prema Hamiltonovom principu

$$\delta W=0 \quad \Rightarrow \quad \delta\int_{t_0}^{t_1} L dt=0\,. \tag{1.8.95}$$

Uslov stacionarnosti istovremeno predstavlja i potreban uslov ekstremalnosti. Varijacija funkcionala W nastaje kao posledica variranja podintegralne funkcije određenog integrala tako da je

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt\,,$$

odnosno, s obzirom na (1.8.93),

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}\delta q^{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\delta \dot{q}^{\alpha}\right)dt\,. \tag{1.8.96}$$

Osobina komutativnosti (1.8.90) omogućava da se izvrši transformacija

$$\frac{\partial L}{d\dot{q}^{\alpha}}\delta\dot{q}^{\alpha}=\frac{\partial L}{d\dot{q}^{\alpha}}\frac{d}{dt}(\delta q^{\alpha})=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\delta q^{\alpha}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)\delta q^{\alpha}\,.$$

Kada se ovako transformisan izraz vrati pod integral (1.8.96) i izvrši delimična integracija dobija se

$$\delta W=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\delta q^{\alpha}\right)_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)\right]\delta q^{\alpha}dt\,. \tag{1.8.97}$$

Pošto u početnom trenutku t_0 i krajnjem trenutku t_1 i zaobilazne putanje i direktna putanja sadrže iste tačke, sledi da su:

$$\delta q^{\alpha}(t_0) = 0, \quad \delta q^{\alpha}(t_1) = 0 \quad (\alpha = 1,\ldots,n) \tag{1.8.98}$$

usled čega varijacija Hamiltonovog dejstva (1.8.97) dobija oblik

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) \right] \delta q^{\alpha} dt. \tag{1.8.98}$$

Za razmatrani sistem važe Lagranžove jednačine druge vrste (1.8.94) tako da je podintegralna funkcija u (1.8.98) jednaka nuli. Određeni integral nula funkcije jednak je nuli pa je $\delta W = 0$, čime je dokazana valjanost Hamiltonovog principa. Obrnuto, ako se postulira Hamiltonov princip u obliku (1.8.95), posle variranja dobija se jednačina

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) \right] \delta q^{\alpha} dt = 0. \tag{1.8.99}$$

U opštem slučaju, da bi određeni integral bio jednak nuli, nije neophodno da je i podintegralna funkcija jednaka nuli. Međutim, nezavisne varijacije δq^{α} mogu biti proizvoljno birane što uslovljava da je jednačina (1.8.99) zadovoljena samo ako na celom intervalu važe jednačine (1.8.94) (ovde će biti izostavljen detaljniji dokaz). Na taj način, iz Hamiltonovog principa izvedena su diferencijalne jednačine kretanja holonomnog sistema pod dejstvom konzervativnih sila.

Drugi oblik Hamiltonovog principa.
U prethodno razmatranom principu, posmatrano je kretanje sistema u konfiguracionom $n-$ dimenzionom prostoru između početnog i krajnjeg položaja (kofiguracije) sistema. Uvođenjem Hamiltonovih kanonskih promenljivih q^{α}, p_{α} $(\alpha = 1,\ldots,n)$ kretanje sistema može da se posmatra u $2n-$dimenzionom faznom prostoru. U tom cilju, uvodi se Hamiltonovo dejstvo u obliku funkcionala

$$W^{*} = \int_{t_0}^{t_1} L^{*} dt \tag{1.8.100}$$

gde je

$$L^{*} = p_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} - H(q;p;t), \tag{1.8.101}$$

pa Hamiltonov princip ima oblik

$$\delta W^{*} = \delta\int_{t_0}^{t_1} L^{*} dt = \delta\int_{t_0}^{t_1} \left(p_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} - H \right) dt = 0. \tag{1.8.102}$$

Ovaj uslov stacionarnosti ispunjen je na direktnoj faznoj trajektoriji, između početne fazne tačke $t_0, q_0^\alpha, p_{0\alpha}$ i krajnje fazne tačke $t_1, q_1^\alpha, p_{1\alpha}$. Pri tome direktnu faznu putanju određuju jednačine kretanja:

$$q^\alpha = q^\alpha(t), \quad p_\alpha = p_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{1.8.103}$$

Variranje integrala (1.8.102) vrši se variranjem podintegralne funkcije, tako da je

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{q}^\alpha \delta p_\alpha + p_\alpha \delta \dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right) dt = 0 .$$

Kada se, saglasno osobinama komutativnosti operacija diferenciranja i variranja, u ovom integralu izvrši transformacija

$$p_\alpha \delta \dot{q}^\alpha = p_\alpha \frac{d}{dt}(\delta q^\alpha) = \frac{d}{dt}(p_\alpha \delta q^\alpha) - \dot{p}_\alpha \delta q^\alpha ,$$

posle delimične integracije je

$$\left(p_\alpha \delta q^\alpha \right)_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right] dt = 0 .$$

S obzirom da su:

$$\delta q^\alpha(t_0) = 0, \quad \delta q^\alpha(t_1) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

varirani integral dobija oblik

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right] dt = 0 . \tag{1.8.104}$$

Ovde treba imati u vidu da, s obzirom na (1.8.71) varijacije δp_α nisu nezavisne od varijacija δq^α i $\delta \dot{q}^\alpha$, tako da ne treba neposredno izjednačavati sa nulom koeficijente uz δp_α i δq^α. Za dobijanje kanonskih jednačina dovoljno je primetiti da su koeficijenti uz δp_α, na osnovu jednačina (1.8.72) i na osnovu strukture funkcije H (1.8.75), jednaki nuli, nezavisno od zakona kretanja sistema. Time je određena prva grupa kanonskih jednačina u (1.8.77). Prema tome, pod integralom (1.8.104) ostaju samo članovi sa nezavisnim varijacijama δq^α. Izjednačavajući koeficijente uz njih sa nulom dobija se i druga grupa kanonskih jednačina u (1.8.77). Na taj način izvedene su kanonske jednačine:

$$\dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \;, \qquad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \qquad (\alpha = 1,\dots,n) \;, \qquad (1.8.105)$$

čime je potvrđena opštost Hamiltonovog principa za sisteme sa ograničenjima, datim u postavci principa.

Pored Hamiltonovog principa (u jednom ili drugom obliku) koji obuhvata holonomne sisteme sa konzervativnim silama, često je u opticaju princip pod nazivom *princip Hamilton – Ostrogradskog*[1], koji svojom postavkom obuhvata holonomne sisteme i sa nekonzervativnim silama. Međutim, postavka ovog principa u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0 \qquad (1.8.106)$$

izaziva nedoumice oko njegove kategorizacije. Činjenica je da princip ima integralnu formu, ali ne i varijacionu, u opštem slučaju. Naime ako, osim potencijalnih sila, na sistem deluju i nekonzervativne sile $\tilde{Q}_{\alpha}$, rad na virtuelnim pomeranjima ima oblik

$$\delta A = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} + \tilde{Q}_{\alpha} \delta q^{\alpha} = -\delta \Pi + \tilde{Q}_{\alpha} \delta q^{\alpha} \,, \qquad (1.8.107)$$

i ne predstavlja varijaciju neke funkcije. Usled toga, ne može se reći da jednačina (1.8.106) predstavlja uslov stacionarnosti nekog funkcionala, pa su vrlo diskutabilne tvrdnje da ovaj princip predstavlja uopštenje Hamiltonovog principa. Tačno je međutim da se, u odsustvu nekonzervativnih sila $(\tilde{Q}_{\alpha} = 0)$, jednačina (1.8.106) svodi na Hamiltonov princip, tj.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (T - \Pi) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \,.$$

Ako na sistem deluju potencijalne i nekonzervativne sile, variranjem kinetičke energije i unošenjem izraza (1.8.107) za virtuelni rad u jednačinu (1.8.106) dobija se

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \delta \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} - \frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} + \tilde{Q}_{\alpha} \delta q^{\alpha} \right) dt = 0.$$

Kada se pod ovim integralom izvrši transformacija

[1] Pripisuje se V.M. Ostrogradskom

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\delta \dot{q}^\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{d}{dt}(\delta q^\alpha) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\delta q^\alpha\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\delta q^\alpha,$$

posle delimične integracije, uz uslov da su na granicama intervala:

$$\delta q^\alpha(t_0) = 0, \qquad \delta q^\alpha(t_1) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ldots,n),$$

jednačina (1.8.106) se svodi na

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} + \tilde{Q}_\alpha\right]\delta q^\alpha dt = 0\,.$$

Odavde se, izjednačavanjem sa nulom koeficijenata uz nezavisne varijacije δq^α, dobijaju Lagranžove jednačine druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} + \tilde{Q}_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ldots,n), \qquad (1.8.108)$$

ili, kada se uvede Lagranžova funkcija (kinetički potencijal) $L = T - \Pi$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \tilde{Q}_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ldots,n). \qquad (1.8.109)$$

Na kraju, ako se za razmatranje kretanja sistema pod dejstvom nekonzervativnih sila koristi fazni prostor, diferencijalne jednačine imaju oblik:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \tilde{Q}_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ldots,n). \qquad (1.8.110)$$

Pored principa, koji su ovde razmatrani u kratkom izlaganju, postoje i drugi, veoma značajni u razvoju nauke, koje su postulirali istaknuti naučnici svoje epohe (Moperti, Herc, Gaus, ...). Principi mehanike određuju poseban pristup istraživanjima, ne samo u mehanici već i u ostalim prirodnim naukama, što im daje fenomenološki karakter, tako da su i u današnje vreme česta tema u naučnoj delatnosti.