I deo

1. Uvod u analitičku mehaniku
2. Opšta jednačina dinamike
3. – Princip virtuelnih radova
4. – Lagranževe jednačine I vrste

II deo

1. – Uopštenje pojmo. prostor
2. – Prostori u analitičkoj mehanici
3. – Lagranževe jednačine II vrste

Ideo

Uvod

U klasičnoj, Njutnovoj mehanici, onako kako je razvijana od Njutna, Ojlera, Dalambera i drugih velikana mehanike, osnovne veličine koje karakterišu stanje kretanja mehaničkog sistema (količina kretanja, moment količine kretanja za pokretan i nepokretan pol), kao i veličine koje karakterišu dejstvo prinude na njih (sila, moment sile za pol), su vektorske veličine. Zbog toga se ova mehanika naziva još i vektorska mehanika. Analiza kretanja nekog mehaničkog sistema u njoj zato podrazumeva, s jedne strane, geometrijsku analizu samog sistema, a s druge strane, postavljanje matematičkih modela kretanja u odnosu na poznate koordinatne sisteme (najčešće Dekartov koordinatni sistem) u 3D-euklidskom prostoru (naš opažajni prostor).

Temelje analitičke mehanike postavio je Žozef Luj Lagranž (1736÷1813). On je u svom delu „Analitička mehanika" (prvi put objavljenom 1788. god.) ponudio najbolji i sveobuhvatni tretman klasične mehanike do tada i dao osnov za razvoj matematičke fizike do danas. U analitičkoj mehanici veličine koje karakterišu stanje kretanja mehaničkog sistema i dejstvo prinude na njih su skalarne veličine, kao što su: kinetička energija, potencijalna energija sistema, Hamiltonova i Lagranževa funkcija, rad sila, generalisana sila. Osim toga, kretanje mehaničkog sistema se, zahvaljujući analitičkom tretmanu veza, u analitičkoj mehanici može da se posmatra u višedimenzionalnim, apstraktnim prostorima generalisanih koordinata. Primena generalisanih koordinata u analizi kretanja mehaničkih sistema, kao i primena sasvim originalnog metoda zasnovanog na pojmu elementarno virtuelno pomeranje materijalnog (mehaničkog) sistema i pojmu elementarni virtuelni rad sila, omogućili su da se problem rešavanja kretanja materijalnog sistema odvoji od problema određivanja reakcija idealnih, zadržavajućih veza. Zbog svih ovih osobenosti u analitičkoj mehanici se, u opštem slučaju, ne vrši geometrijska analiza mehaničkog sistema, pa crteži nisu ni potrebni. Matematičke discipline na kojima bazira analitička mehanika su tenzorski račun, varijacioni račun itd.

Osnovu analitičke mehanike čine diferencijalni i integralni principi (principi predstavljaju stavove pomoću kojih se mogu sagledati celovita svojstva dinamičkih sistema, u opštem slučaju; principi, pod određenim uslovima, mogu da zamene osnovne aksiome mehanike). Diferencijalni principi razmatraju elementarno pomeranje u odnosu na neku proizvoljnu konfiguraciju sistema, u nekom, bilo kom trenutku (Lagranž-Dalamberov princip, opšta jednačina dinamike, centralna jednačina dinamike, Žurdenov princip, Gausov princip, itd.). Integralni principi (varijacioni, ekstremalni principi) izražavaju ekstremalna svojstva mehaničkih sistema na njihovim „trajektorijama". Zasnovani su na razmatranju konačne promene konfiguracije u nekom konačnom intervalu vremena.

Materijalni sistemi i veze. -

Sistem materijalnih tačaka je skup materijalnih tačaka čiji su položaji, tj. kretanja, međuzavisni, što znači da položaj i kretanje svake tačke materijalnog sistema zavisi od položaja i kretanja ostalih tačaka sistema.

Slobodni materijalni sistem je skup materijalnih tačaka sistema koje mogu imati bilo koje brzine i zauzeti bilo koje položaje u prostoru, u proizvoljnom trenutku.

Neslobodni materijalni sistem je skup materijalnih tačaka sistema koje ne mogu da zauzmu bilo koje položaje u prostoru, a u dozvoljenim položajima ne mogu da imaju bilo koje brzine, u proizvoljnom trenutku. To znači da su položajima i brzinama tačaka sistema nametnuta ograničenja, tj. veze (unutrašnje i spoljašnje). Uticaj veza na ponašanje sistema zasniva se na principu oslobađanja od veza. On se sastoji u tome da se veze u mehaničkom sistemu uklone, a njihov uticaj na ponašanje materijalnog sistema uzme kroz sile koje se nazivaju reakcije veza.

Diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema u vektorskom obliku. -

Neka su $\vec{F}_\nu$ rezultante aktivnih sila koje deluju na tačke materijalnog sistema M_ν, masa m_ν, $\nu = 1, 2, \dots, N$, a $\vec{R}_\nu$ rezultante reakcija veza koje deluju u tim tačkama. Osnovni zakoni kretanja tačaka M_ν materijalnog sistema (II Njutnov zakon), tada glasi: $m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu$, $\vec{R}_\nu = \vec{R}_\nu^s + \vec{R}_\nu^u$, $\nu = 1, 2 \dots N$, (1) gde su $\vec{a}_\nu = \ddot{\vec{r}}_\nu$ ubrzanja tačaka M_ν mat. sistema i $\vec{r}_\nu = \overrightarrow{OM_\nu}$, $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t)$ konačne jednačine kretanja tačaka M_ν u vektorskom obliku, a u odnosu na nepokretni pol O. Ako se u polu O uvede Dekartov inercijalni koordinatni sistem $Oxyz$, a leve i desne strane dif. jednačina kretanja tačaka mat. sistema skalarno pomnože jediničnim vektorima $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ osa Dekartovog koordinatnog sistema, Ox, Oy i Oz, respektivno, dobija se sistem diferencijalnih jednačina kretanja materijalnog sistema u Dekartovom koordinatnom sistemu:

$$\left.\begin{aligned} m_\nu \ddot{x}_\nu &= R_{\nu x} + F_{\nu x} \\ m_\nu \ddot{y}_\nu &= R_{\nu y} + F_{\nu y} \\ m_\nu \ddot{z}_\nu &= R_{\nu z} + F_{\nu z}, \end{aligned}\right\} (2)$$

gde su: $x_\nu = x_\nu(t)$, $y_\nu = y_\nu(t)$, $z_\nu = z_\nu(t)$ konačne jednačine kretanja tačaka M_ν u DKS $Oxyz$, $\vec{a}_\nu = \ddot{x}_\nu \vec{i} + \ddot{y}_\nu \vec{j} + \ddot{z}_\nu \vec{k}$, $\vec{R}_\nu = \{R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}\}$ i $\vec{F}_\nu = \{F_{\nu x}, F_{\nu y}, F_{\nu z}\}$ (3)

Jednačine (2) su invarijantne u odnosu na Galilejeve transformacije koordinata, tj. u odnosu na sve koordinatne sisteme koji se u odnosu na uslovno nepokretni koordinatni sistem kreću translatorno jednoliko pravolinijski i u kojima vreme teče na isti način. -

Aktivne sile u sistemu $\vec{F}_\nu$ funkcije su relativnih položaja tačaka M_ν, $\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu$, i njihovih relativnih brzina $\vec{v}_\nu - \vec{v}_\mu$, a u opštem slučaju ne zavise od vremena. Međutim, uvođenjem aproksimacija, aktivne sile u sistemu se posmatraju kao poznate funkcije vremena t i veličina stanja kretanja materijalnog sistema koja su u posmatranom trenutku određena položajima tačaka i njihovim brzinama, tj.:

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(t, \vec{r}_\mu, \vec{v}_\mu), \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots, N \qquad (4)$$

Reakcije veza $\vec{R}_\nu$ su sile koje nisu unapred poznate i određuju se uporedo sa određivanjem konačnih jednačina kretanja tačaka sistema. To znači da je u $3N$ jednačina (2) prisutno $6N$ nepoznatih skalarnih veličina: $x_\nu = x_\nu(t)$, $y_\nu = y_\nu(t)$, $z_\nu = z_\nu(t)$, $R_{\nu x} = R_{\nu x}(t)$, $R_{\nu y} = R_{\nu y}(t)$ i $R_{\nu z} = R_{\nu z}(t)$. To znači da bi dinamički problem bio rešiv neophodno je prikupiti dopunske informacije o vezama nametnutnim materijalnom sistemu.

Veze i njihova klasifikacija.-

Analitički pristup problemu tretiranju veza je specifičan po tome što se veze opisuju analitičkim formama, tj. jednačinama i nejednačinama koje moraju da zadovolje veličine stanja kretanja u bilo kom trenutku. Veze koje se zadaju u formi nejednačina predstavljaju nezadržavajuće veze, dok se veze u formi jednačina nazivaju zadržavajuće. Najopštiji oblik **nezadržavajuće veze** je:

$$f(t, \vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu) \leq 0 \qquad (5)$$

ili $f(t, \vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu) \geq 0$, $\qquad (6)$

dok je najopštiji oblik **zadržavajuće veze**:

$$f(t, \vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu) = 0, \qquad (7)$$

Nezadržavajuće veze su retke u prirodi, pa se u nastavku neće razmatrati. Zadržavajuće veze se mogu podeliti na:

-geometrijske (konačne, integrabilne, holonomne) veze

- kinematske (diferencijalne, neholonomne) veze.

Jednačina geometrijske veze u opštem slučaju ima oblik:

$$f(t, \vec{r}_\nu) = 0 \qquad (8)$$

odnosno:

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0. \qquad (9)$$

Ove veze direktno ograničavaju veličine položaja tačaka M_ν materijalnog sistema u posmatranom trenutku t.

Ako se potraži izvod po vremenu jednačine (9) dobiće se:

$$\frac{df}{dt}=0 \Rightarrow \sum_{\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \qquad (10)$$

tj.:

$$\sum_{\nu} \mathrm{grad}_{(\nu)} f \cdot \vec{v}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t}=0, \qquad (11)$$

gde je: $\mathrm{grad}_{(\nu)} f = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\vec{k}.$

Jednačina (10), odnosno (11) pokazuje da geometrijske veze implicitno ograničavaju brzine tačaka M_ν materijalnog sistema $\vec{v}_\nu=\dot{x}_\nu\vec{i}+\dot{y}_\nu\vec{j}+\dot{z}_\nu\vec{k}$.
Takođe, izvod po vremenu (10), odnosno (11):

$$\sum_{\nu} \mathrm{grad}_{(\nu)} f \cdot \vec{a}_\nu + \sum_{\nu}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{grad}_{(\nu)} f\right)\cdot\vec{v}_\nu + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=0 \qquad (12)$$

pokazuje da geometrijske veze implicitno ograničavaju ubrzanja $\vec{a}_\nu$ tačaka materijalnog sistema.

Kinematske veze prevashodno ograničavaju brzine $\vec{v}_\nu$ koje tačke M_ν materijalnih sistema mogu imati u posmatranim položajima. Njihove jednačine su oblika:

$$f(t, \vec{r}_\nu, \vec{v}_\nu)=0,$$

Kinematske veze se u mehaničkim sistemima najčešće javljaju u formi linearnih kinematskih veza:

$$\sum_{\nu} \vec{l}_\nu(t, \vec{r}_\mu)\cdot\vec{v}_\nu + D(t, \vec{r}_\mu)=0, \qquad (13)$$

odnosno:

$$\sum_{\nu} A_\nu(t, x_\mu, y_\mu, z_\mu)\dot{x}_\nu + B_\nu(t, x_\mu, y_\mu, z_\mu)\dot{y}_\nu + C_\nu(t, x_\mu, y_\mu, z_\mu)\dot{z}_\nu + $$
$$+D(t, x_\mu, y_\mu, z_\mu)=0 \qquad (14),$$

gde je: $\vec{l}_\nu = A_\nu\vec{i}+B_\nu\vec{j}+C_\nu\vec{k}.$

Kada je $D=0$ u (13), odnosno, (14), onda se linearna kinematska veza naziva **homogenom kinematskom vezom**.

Kinematske veze (14) **nisu integrabilne**. To znači da ne postoji funkcija $\phi=\phi(t,x_\nu,y_\nu,z_\nu)$ koja zadovoljava Košijeve uslove integrabilnosti linearne diferencijalne forme:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\mu}=\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu},\quad \frac{\partial A_\nu}{\partial z_\mu}=\frac{\partial C_\nu}{\partial x_\mu},\quad \frac{\partial A_\nu}{\partial t}=\frac{\partial D}{\partial x_\nu}\\ &\frac{\partial B_\nu}{\partial z_\mu}=\frac{\partial C_\nu}{\partial y_\mu},\quad \frac{\partial B_\nu}{\partial t}=\frac{\partial D}{\partial y_\nu};\\ &\qquad\qquad \frac{\partial C_\nu}{\partial t}=\frac{\partial D}{\partial z_\nu}, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

tj. nije: $A_\nu=\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu},\ B_\nu=\frac{\partial\phi}{\partial y_\nu},\ C_\nu=\frac{\partial\phi}{\partial z_\nu},\ D=\frac{\partial\phi}{\partial t}.$ (16)

Postoje, međutim, veze koje se na prirodan način definišu kao ograničenja brzina, ali su, ipak, integrabilne, što znači da su u suštini geometrijske. Ovakve veze se zovu **kvazikinematske**, odnosno, kvaziholonomne.

Posledica neintegrabilnosti kinematskih veza sastoji se u tome da one na posredan način nameću ograničenja u pogledu položaja sistema. Naime, bilo koja dva njegova položaja koja dopuštaju geometrijske veze (8) mogu se povezati trajektorijom koja je deo po deo glatka i saglasna sa jednačinama kinematskih veza (14). Ovo tvrđenje poznato kao teorema Raševskog-Čoua.

Dva su tipična primera kinematskih veza. Prvi se javlja kod klizaljki, odnosno, točkova rolera: sečiva klizaljki i točkovi na rolerima nameću pravac vektora brzine stopala u odgovarajućem položaju stopala (centra mase stopala). Drugi se javlja kod kotrljanja bez klizanja jednog krutog tela po površini drugog brzine tačaka dodira ovih tela moraju biti jednake.

Opisane klase veza se mogu podeliti na:

-stacionarne ili skleronomne veze - vreme t ne figuriše u jednačinama i nejednačinama veza,

-nestacionarne ili reonomne veze - vreme t figuriše u jednačinama i nejednačinama veza.

Geometrijske veze
- skleronomne: $f(\vec{r}_\nu)=0$
- reonomne: $f(t,\vec{r}_\nu)=0$

Kinematske veze
- skleronomne: $f(\vec{r}_\nu,\vec{v}_\nu)=0$, $\sum_\nu \vec{l}_\nu(\vec{r}_\mu)\cdot\vec{v}_\nu=0$ $(D=0)$
- reonomne: $f(t,\vec{r}_\nu,\vec{v}_\nu)=0$, $\sum_\nu \vec{l}_\nu(t,\vec{r}_\mu)\cdot\vec{v}_\nu+D(t,\vec{r}_\mu)=0$

S obzirom na klasifikaciju veza uobičajena je i odgovarajuća podela materijalnih sistema na:
- holonomne i
- neholonomne materijalne (mehaničke) sisteme.

Holonomni materijalni sistemi podvrgnuti su isključivo ograničenjima geometrijskog tipa, dok je kretanje neholonomnih sistema ograničeno i kinematskim i geometrijskim vezama.

Stvarna, moguća i virtuelna elementarna pomeranja materijalnih sistema. - U analitičkom pristupu uticaj veza se izražava preko pomeranja koje veze dopuštaju materijalnom sistemu.
Posmatra se kretanje vezanog materijalnog sistema od N materijalnih tačaka čije diferencijalne jednačine kretanja glase:

$$m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu, \quad \nu = 1,2,\dots,N \tag{17}$$

i čije je kretanje ograničeno sa d geometrijskih i g kinematskih veza:

$$f^\alpha(t,\vec{r}_\nu) = 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,d \tag{18}$$

$$\sum_\nu \vec{l}_\nu^\beta(t,\vec{r}_\mu)\cdot\vec{v}_\nu + D^\beta(t,\vec{r}_\mu) = 0, \quad \beta = 1,2,\dots,g, \tag{19}$$

pri čemu je: $d+g < 3N$.
Geometrijske veze nameću, kao što je pokazano, ograničenja brzinama tačkama sistema:

$$\sum_\nu \mathrm{grad}_\nu f^\alpha \cdot \vec{v}_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

Moguće brzine (definicija). - Pod mogućim brzinama materijalnog sistema podrazumevaju se brzine tačaka M_ν sistema koje su saglasne sa (19) i (20). To su brzine $\vec{v}_\nu = \dot{x}_\nu\vec{i} + \dot{y}_\nu\vec{j} + \dot{z}_\nu\vec{k}$ koje veze nametnute sistemu dopuštaju tačkama tog sistema u bilo kom trenutku t i vezama dopuštenom položaju mat. sistema u tom trenutku.
Ovaj pojam je nezavistan od diferencijalnih jednačina kretanja mat. sistema (17). Postoji beskonačno mnogo mogućih brzina materijalnog sistema.
Inače, $d+g$ jednačina (19) i (20) uspostavljaju vezu između $3N$ projekcija brzina: $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$, $\nu = 1,2,\dots N$. To znači da je $d+g$ ovih projekcija zavisno, tj. može se izraziti u funkciji $3N-(d+g)$ projekcija koje su međusobno nezavisne i koje mogu imati bilo kakve, proizvoljne, vrednosti.

Ako jednačine (19) i (20) pomnožimo sa dt, imajući u vidu da je: $d\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu dt$, elementarno pomeranje tačaka M_ν sistema na bilo kom intervalu vremena beskonačno male dužine $[t, t+dt]$, dobija se:

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_\nu f^\alpha \cdot d\vec{r}_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} dt = 0 \qquad (21)$$

tj. $$\sum_\nu \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\nu} dz_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} dt = 0 \qquad (22)$$

i $$\sum_\nu \vec{l}_\nu^\beta \cdot d\vec{r}_\nu + D^\beta dt = 0 \qquad (23)$$

tj. $$\sum_\nu A_\nu^\beta dx_\nu + B_\nu^\beta dy_\nu + C_\nu^\beta dz_\nu + D^\beta dt = 0 \qquad (24)$$

<u>**Moguća pomeranja (definicija).**</u> – Pod mogućim pomeranjima materijalnog sistema podrazumevaju se beskonačno mala pomeranja tačaka M_ν tog sistema, $d\vec{r}_\nu$, na bilo kom intervalu vremena beskonačno male dužine $[t, t+dt]$ koja su saglasna jednačinama (21) i (23). To su, dakle, pomeranja: $d\vec{r}_\nu = dx_\nu \vec{i} + dy_\nu \vec{j} + dz_\nu \vec{k}$, koje veze dopuštaju tačkama materijalnog sistema iz bilo kog položaja tog sistema na vezama, a tokom intervala vremena dt.
Kao i u slučaju mogućih brzina $\vec{v}_\nu$, tako i kod mogućih pomeranja $d\vec{r}_\nu$ postoji $d+g$ zavisnih i $3N-(d+g)$ nezavisnih elementarnih priraštaja dx_ν, dy_ν, dz_ν Dekartovih koordinata tačkama $x_\nu = x_\nu(t)$, $y_\nu = y_\nu(t)$ i $z_\nu = z_\nu(t)$. Dakle, postoje beskonačno mnogo elementarnih mogućih pomeranja materijalnog sistema. Moguća pomeranja predstavljaju širu klasu od elementarnih stvarnih pomeranja materijalnog sistema. <u>Stvarno elementarno pomeranje materijalnog sistema</u> zavisi i od aktivnih sila koje deluju na sistem i od strukture veza, pa je ono iz skupa mogućih pomeranja materijalnog sistema.
Neka su $d\vec{r}_\nu{}'$ i $d\vec{r}_\nu{}''$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, dva elementarna moguća pomeranja mat. sistema na istom intervalu vremena $[t, t+dt]$, a koja zadovoljaju jednačine (21) i (23):

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_\nu f^\alpha \cdot d\vec{r}_\nu{}' + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (25) \qquad \sum_\nu \vec{l}_\nu^\beta \cdot d\vec{r}_\nu{}' + D^\beta dt = 0 \quad (27)$$

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_\nu f^\alpha \cdot d\vec{r}_\nu{}'' + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (26) \qquad \sum_\nu \vec{l}_\nu^\beta \cdot d\vec{r}_\nu{}'' + D^\beta dt = 0 \quad (28)$$

pa je:

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_\nu f^\alpha \cdot (d\vec{r}_\nu{}' - d\vec{r}_\nu{}'') = 0 \qquad (29)$$

$$\sum_\nu \vec{l}_\nu^\beta \cdot (d\vec{r}_\nu{}' - d\vec{r}_\nu{}'') = 0 \, . \qquad (30)$$

Razlika bilo koja dva elementarna moguća pomeranja $d\vec{r}_\nu{}'$ i $d\vec{r}_\nu{}''$ materijalnog sistema predstavlja <u>elementarno virtuelno pomeranje</u> materijalnog sistema, tj.: $\delta\vec{r}_\nu = d\vec{r}_\nu{}' - d\vec{r}_\nu{}''$, $\nu = 1,2,\dots,N$ (31)

S obzirom na (31) jednačine (29) i (30) glase:

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_{(\nu)} f^\alpha \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (32)$$

$$\sum_\nu \vec{l}^\beta_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0 . \qquad (33)$$

U razvijenom obliku jednačine virtuelnih pomeranja mat. sistema su:

$$\sum_\nu \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu = 0 \qquad (34)$$

$$\sum_\nu A^\beta_\nu \delta x_\nu + B^\beta_\nu \delta y_\nu + C^\beta_\nu \delta z_\nu = 0 , \qquad (35)$$

gde je: $\delta\vec{r}_\nu = \delta x_\nu \vec{i} + \delta y_\nu \vec{j} + \delta z_\nu \vec{k}$ i $\delta x_\nu = dx_\nu{}' - dx_\nu{}''$, $\delta y_\nu = dy_\nu{}' - dy_\nu{}''$, (36)
$\delta z_\nu = dz_\nu{}' - dz_\nu{}''$ – elementarni virtuelni priraštaji Dekartovih koordinata u trenutku t: $x_\nu = x_\nu(t)$, $y_\nu = y_\nu(t)$, $z_\nu = z_\nu(t)$.

Jednačine (32) i (33) formalno se mogu dobiti iz (21) i (23) kada se u njima ignoriše promena vremena, tj. kada je $dt = 0$. To znači da pri razmatranju elementarnih virtuelnih pomeranja $\delta\vec{r}_\nu$ u nekom trenutku t, veze treba misaono zamrznuti. Elementarne promene bilo koje veličine u trenutku t, a pod navedenim uslovima matematički se opisuju **operatorom sinhronog variranja δ**. Dakle, veličine $\delta\vec{r}_\nu$, δx_ν, δy_ν i δz_ν predstavljaju sinhrone varijacije veličina $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t)$, $x_\nu = x_\nu(t)$, $y_\nu = y_\nu(t)$ i $z_\nu = z_\nu(t)$ (u trenutku t).

<u>Virtuelno pomeranje (definicija)</u>. – Pod virtuelnim pomeranjem materijalnog sistema podrazumeva se bilo koje zamišljeno beskonačno malo pomeranje $\delta\vec{r}_\nu = \delta x_\nu \vec{i} + \delta y_\nu \vec{j} + \delta z_\nu \vec{k}$ materijalnog sistema koje je saglasno sa (32) i (33), tj., koje veze dopuštaju mat. sistemu u odnosu na bilo koji njegov, vezama dopušten položaj u posmatranom (bilo kom) trenutku t.

Prema (34) i (35) sledi da je $d+g$ virtuelnih elementarnih promena Dekartovih koordinata u trenutku t moguće izraziti preko $3N-(d+g)$, tzv. nezavisnih virtuelnih priraštaja Dekartovih koordinata.

Zbog ignorisanja vremenske promenljive u jednačinama veza, virtuelna elementarna pomeranja obrazuju linearni vektorski podprostor $3N$-dimenzionalnog linearnog vektorskog prostora.

Broj stepeni slobode. - Posmatra se sistem N tačaka M_ν čiji su položaji u odnosu na inercijalni Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ u proizvoljnom trenutku t određene Dekartovim koordinata: $M_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$:

$$\vec{r}_\nu = \overrightarrow{OM_\nu} = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}, \qquad (63)$$

tako da je broj raspoloživih koordinata $3 \cdot N$.

Ako je posmatrani sistem slobodan, onda bilo kakva promena bilo koje Dekartove koordinate bilo koje tačke sistema, u posmatranom proizvoljnom, položaju tog sistema kome odgovara neki trenutak t, neće dovesti do promene nijedne od preostalih raspoloživih koordinata. To znači da su elementarne virtulne promene: $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots N$, Dekartovih koordinata tačaka sistema M_ν, njih $3 \cdot N$, međusobno nezavisne veličine, pa mat. sistem može da vrši **$3N$ međusobno nezavisnih kretanja** $\left(\sum_\nu a_\nu \delta x_\nu + b_\nu \delta y_\nu + c_\nu \delta z_\nu = 0 \Leftrightarrow a_\nu = b_\nu = c_\nu = 0\right)$

Broj međusobno nezavisnih kretanja nekog materijalnog sistema u mehanici predstavlja broj stepeni slobode n tog sistema.

U slučaju slobodnog materijalnog sistema broj međusobno nezavisnih kretanja tog sistema, kao što je rečeno, iznosi $3N$, što znači da je broj stepeni slobode slobodnog materijalnog sistema: $n = 3N$, i jednak je broju njegovih (Dekartovih) koordinata ($3N$).

U slučaju da je posmatrani materijalan sistem **holonoman**, veze (18) nameću ograničenja virtuelnim pomeranjima tačaka M_ν tog sistema u pravcima osa Dekartovog koordinatnog sistema $Oxyz$ u bilo kom, vezama dozvoljenom, položaju tog sistema, tako da važi (32) i (33), tj.:

$$\sum_\nu \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, d \qquad (64)$$

pa je broj nezavisnih virtuelnih promena $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ veličina x_ν, y_ν i z_ν, tj. broj stepeni slobode posmatranog holonomnog sistema, kao broj nezavisnih kretanja tog sistema, je: $n = 3N - d$. (65)

Ovaj broj je i u slučaju holonomnog sistema jednak broju koordinata tog sistema.

U slučaju **neholonomnih sistema** čije je kretanje ograničeno i vezama (18) i vezama (19), $3N$ elementarnih virtuelnih pomeranja $\delta x_\nu, \delta y_\nu$ i δz_ν tačaka M_ν tog sistema u posmatranom trenutku t pored d uslova (64) moraju da zadovolje još g uslova (33), odnosno:

$$\sum_\nu A_\nu^\beta \delta x_\nu + B_\nu^\beta \delta y_\nu + C_\nu^\beta \delta z_\nu = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, g). \qquad (66)$$

tako da je broj nezavisnih kretanja neholonomnog sistema, tj. njegov broj stepeni slobode: $n^* = 3N - (d + g)$. (66)

Pojam broja stepeni slobode sistema u mehaničkom smislu govori o pokretljivosti mehaničkog sistema.

U slučaju slobodnih i holonomnih sistema, kao što će biti pokazano, umesto nezavisnih Dekartovih koordinata tačaka tog sistema, kao koordinata holonomnog sistema, mogu se uvesti generalisane (krivolinijske) koordinate q^i, $i=1,2,\dots,n$, čije promene u vremenu opisuju kretanje tog sistema, kao celine, na prirodniji način, nego što se to postiže upotrebom odgovarajućih Dekartovih koordina nekih tačaka sistema. Pri tome, treba imati u vidu da se sve Dekartove koordinate x_ν, y_ν, z_ν, $\nu=1,2,\dots N$, mogu izraziti preko n generalisanih koordinata q^i.

Virtuelni rad. Idealne veze. – Pojam virtuelnog rada je jedan od središnjih pojmova analitičke mehanike.

Definicija. – Pod virtuelnim radom sile (radom na virtuelnom pomeranju) u bilo kom, vezama dozvoljenom položaju sistema, tj. u bilo kom trenutku t, podrazumeva se skalni proizvod vektora sile i vektora elementarnog virtuelnog, vezama dozvoljenog, pomeranja one tačke sistema u kojoj deluje posmatrana sila: $\delta' A \overset{def}{=} \vec{F}\cdot\delta\vec{r}$. (68)

Virtuelni rad aktivnih sila u sistemu je: $\delta' A^F = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu$, a virtuelni rad reakcija veza: $\delta' A^R = \sum_\nu \vec{R}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu$ i $\delta' A^R = \sum_\nu \vec{R}^s_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu + \sum_\nu\sum_\mu \vec{R}_{\nu\mu}\cdot\delta\vec{r}_\nu$ $(R_{\mu\mu}=0)$ (69)

$\vec{R}_{\nu\mu} = -\vec{R}_{\mu\nu}$

Idealne veze (definicija). – Veze nametnute mehaničkom sistemu su idealne ako je ukupan virtuelni rad reakcija veza u bilo kom trenutku t na ma kakvim elementarnim virtuelnim pomeranjima njihovih napadnih tačaka, jednak nuli: $\sum_\nu \vec{R}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0$. (70)

Ako su sile $\vec{R}_\nu$ i elementarna virtuelna pomeranja tačaka $\delta\vec{r}_\nu$, u (70), dati u Dekartovom koordinatnom sistemu $Oxyz$, jed. (70) ima oblik:

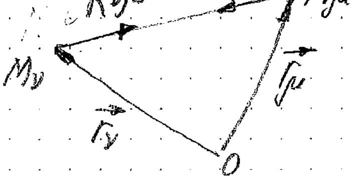
$\sum_\nu R_{\nu x}\,\delta x_\nu + R_{\nu y}\,\delta y_\nu + R_{\nu z}\,\delta z_\nu = 0$. (71)

Pri određivanju virtuelnog rada reakcija veza mehaničkog sistema, treba uzeti, kao što je urađeno u (69), u obzir i spoljašnje i unutrašnje reakcije veza, pri čemu za unutrašnje reakcije veze važi princip akcije i reakcije: $\vec{R}_{\nu\mu} = -\vec{R}_{\mu\nu}$. Elementarni rad para unutrašnjih sila $\vec{R}_{\nu\mu}$ i $\vec{R}_{\mu\nu}$ između tačaka M_μ i M_ν, je:

$$\delta' A(\vec{R}_{\nu\mu}, \vec{R}_{\mu\nu}) = \vec{R}_{\nu\mu}\cdot\delta\vec{r}_\nu + \vec{R}_{\mu\nu}\cdot\delta\vec{r}_\mu = \vec{R}_{\nu\mu}\cdot\delta(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \Rightarrow \delta' A(\vec{R}_{\nu\mu}, \vec{R}_{\mu\nu}) = \vec{R}_{\nu\mu}\cdot\delta\overrightarrow{M_\mu M_\nu} \qquad (72)$$

gde je: $\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu = \overrightarrow{M_\mu M_\nu} = \overline{M_\mu M_\nu}\cdot\dfrac{\overrightarrow{M_\mu M_\nu}}{\overline{M_\mu M_\nu}}$; $\delta(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) = \delta\overrightarrow{M_\mu M_\nu}$,

i $\vec{R}_{\nu\mu} = \pm R_{\nu\mu}\dfrac{\overrightarrow{M_\mu M_\nu}}{\overline{M_\mu M_\nu}}$, $R_{\nu\mu} = |\vec{R}_{\nu\mu}|$



pa je:

$$\delta' A(\vec{R}_{\nu\mu}, \vec{R}_{\nu\mu}) = \pm R_{\nu\mu}\frac{\overrightarrow{M_\mu M_\nu}\cdot\delta\overrightarrow{M_\mu M_\nu}}{\overline{M_\mu M_\nu}},$$

odnosno:

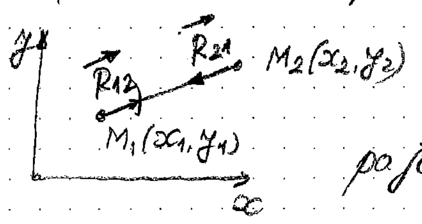
$$\delta' A = \pm R_{\nu\mu}\,\delta\overline{M_\nu M_\mu} \quad \left(\delta(\overrightarrow{M_\mu M_\nu}\cdot\overrightarrow{M_\mu M_\nu}) = \delta(\overline{M_\mu M_\nu}^2) \Rightarrow \overrightarrow{M_\mu M_\nu}\cdot\delta\overrightarrow{M_\mu M_\nu} = \overline{M_\mu M_\nu}\cdot\delta\overline{M_\mu M_\nu}\right) \qquad (73)$$

Iz (73) sledi da je $\delta' A(\vec{R}_{\nu\mu}, \vec{R}_{\mu\nu}) = 0$ u slučaju kada je $\overline{M_\nu M_\mu} = const$, tj. kada se rastojanje između tačaka M_μ i M_ν ne menja, tj. kada je materijalni sistem neizmenljiv (kruto telo), a iz (72) u slučaju kada je $\vec{R}_{\nu\mu} \perp \delta \overrightarrow{M_\mu M_\nu}$. Virtuelni rad spoljašnje reakcije veze $\vec{R}_\nu^{\,s}$ jednak je nuli, tj. $\vec{R}_\nu^{\,s} \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0$, u slučaju kada je: $\vec{R}_\nu^{\,s} \perp \delta \vec{r}_\nu$ ili kada je $\delta \vec{r}_\nu = 0$, tj. kada je napadna tačka M_ν sile $\vec{R}_\nu$ nepokretna (idealni sferni zglob)

Realne veze, tj. veze sa trenjem, su veze koje imaju komponentu upravnu na ravan relativnih virtuelnih pomeranja napadne tačke sile po površi drugog tela, ali i komponentu u toj ravni, silu trenja. Virtuelni rad sila trenja pridružuje se, vrlo često, virtuelnom radu aktivnih sila.

Primeri.-

1.- Tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ koje mogu da se kreću u ravni Oxy vezane su lakim krutim štapom dužine l.



Jednačina veze:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0, \quad (1)$$

pa je: $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2$, i

$$\operatorname{grad}_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\vec{j} = \{-2(x_2 - x_1), -2(y_2 - y_1)\} \Rightarrow$$

$$\operatorname{grad}_1 f = -2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Rightarrow \boxed{\operatorname{grad}_1 f = -2\overrightarrow{M_1 M_2}}$$

Na sličan način je: $\operatorname{grad}_2 f = 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Rightarrow \boxed{\operatorname{grad}_2 f = 2\overrightarrow{M_1 M_2}}$.

Kako je iz jednačine veze: $\sum_{\nu=1}^{2} \operatorname{grad}_{(\nu)} f \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0$, to važi:

$$\boxed{\operatorname{grad}_{(1)} f \cdot \delta \vec{r}_1 + \operatorname{grad}_{(2)} f \cdot \delta \vec{r}_2 = 0} \Rightarrow \left(-2\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \delta \vec{r}_1 + 2\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \delta \vec{r}_2 = 0\right) \quad (2)$$

Reakcije štapa: $\vec{R}_{12} = \vec{R}$ i $\vec{R}_{21} = -\vec{R}$ imaju pravac štapa, tj.:

$$\vec{R}_{12} = R\,\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\overline{M_1 M_2}} \quad i \quad \vec{R}_{21} = -R\,\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\overline{M_1 M_2}}, \text{ odnosno } \boxed{\vec{R}_{12} = -\frac{R}{2l}\operatorname{grad}_1 f} \; i \; \boxed{\vec{R}_{21} = -\frac{R}{2l}\operatorname{grad}_2 f}$$

pa je elementarni virtuelni rad sistema $(\vec{R}_{12}, \vec{R}_{21})$:

$$\delta' A(\vec{R}_{12}, \vec{R}_{21}) = \vec{R}_{12} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_{21} \cdot \delta \vec{r}_2 = -\frac{R}{2l}\left(\operatorname{grad}_1 f \cdot \delta \vec{r}_1 + \operatorname{grad}_2 f \cdot \delta \vec{r}_2\right) = 0$$

2.- Idealna glatka površ: $f(t, x, y, z) = 0$. –

$$f(t, x, y, z) = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{grad} f \cdot \delta \vec{r} = 0}, \; \left(\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

U posmatranom trenutku t reakcija ove površi je: $\vec{R} = \lambda \operatorname{grad} f$, tj. ima pravac normale na površ u trenutku t u tački M na površi, pa je elementarni virtuelni rad sile $\vec{R}$:

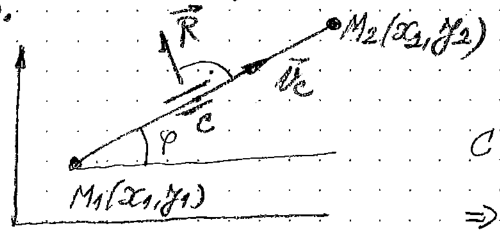
$$\delta' A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = \lambda(\operatorname{grad} f \cdot \delta \vec{r}) \Rightarrow \delta' A(\vec{R}) = 0.$$

Glatka površ spada, dakle, u idealnu vezu bez obzira da li je ona stacionarna ili nestacionarna, tj. da li se deformiše u vremenu ili kreće.

(Pojam glatkosti u matematičkom smislu podrazumeva da je funkcija

$f=f(x,y,z,t)$ neprekidna i da ima neprekidne prve parcijalne izvode u odnosu na sve promenljive, a u fizičkom smislu da veza nije hrapava.

③ Veza tipa sečivo. - Tačke $M_1(x_1,y_1)$ i $M_2(x_2,y_2)$ povezane su lakim krutim štapom dužine ℓ (kreću se u ravni Oxy). Za središte C štapa vezano je sečivo koje ima pravac štapa koje se urezuje u ravan kretanja i onemogućava pomeranje tačke C štapa u pravcu koji je upravan na osu štapa u ravni Oxy. Zbog toga reakcija sečiva u tački C ima pravac koji je normalan na štap.



$$\left.\begin{matrix} M_1(x_1,y_1) \\ M_2(x_2,y_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{tg\varphi = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

$$C\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right) \Rightarrow \vec{v}_C = \left\{\frac{\dot{x}_2+\dot{x}_1}{2}, \frac{\dot{y}_2+\dot{y}_1}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\varphi = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} \Rightarrow \boxed{tg\varphi = \frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{\dot{x}_2+\dot{x}_1}}$$

Veza tipa sečivo je linearna stacionarna kinematska veza:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{\dot{x}_2+\dot{x}_1} \Rightarrow -(y_2-y_1)\dot{x}_1 + (x_2-x_1)\dot{y}_1 - (y_2-y_1)\dot{x}_2 + (x_2-x_1)\dot{y}_2 = 0$$

tj. $\boxed{\vec{\ell}\cdot\vec{v}_1 + \vec{\ell}\cdot\vec{v}_2 = 0}$, gde je $\boxed{\vec{\ell} = -(y_2-y_1)\vec{i} + (x_2-x_1)\vec{j}}$

Iz jednačine veze sledi i relacija: $\boxed{\vec{\ell}\cdot\delta\vec{r}_1 + \vec{\ell}\cdot\delta\vec{r}_2 = 0}$

Reakcija $\vec{R}$ veze je: $\vec{R} = (-R\sin\varphi)\vec{i} + R\cos\varphi\vec{j} = -R\dfrac{y_2-y_1}{\ell}\vec{i} + R\dfrac{x_2-x_1}{\ell}\vec{j}$,

odnosno: $\boxed{\vec{R} = \dfrac{R}{\ell}\vec{\ell}}$

Elementarni virtuelni rad sile $\vec{R}$ je: $\delta'A = \vec{R}\cdot\delta\vec{r}_C$, gde je: $\boxed{\delta\vec{r}_C = \dfrac{\delta\vec{r}_1+\delta\vec{r}_2}{2}}$,

jer je: $\vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)$, pa je:

$$\delta'A = \vec{R}\cdot\delta\vec{r}_C = \frac{R}{2\ell}\vec{\ell}\cdot(\delta\vec{r}_1+\delta\vec{r}_2), \text{ tj. } \delta'A = 0$$

Lagranž-Dolamberov princip. Opšta jednačina dinamike.-

Teorema.- Ako su sve veze nametnute materijalnom sistemu idealne, onda njegovo kretanje zadovoljava opštu jednačinu dinamike:

$$\sum_{\nu} (\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu) \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (74)$$

Dokaz.- Ako levu i desnu stranu svake od diferencijalnih jednačina kretanja materijalnog sistema: $m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu$, skalarno pomnožimo sa $\delta\vec{r}_\nu$ i tako dobijene jednačine saberemo, dobiće se:

$$\sum_{\nu} m_\nu \vec{a}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \sum_{\nu} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu + \sum_{\nu} \vec{R}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu, \qquad (75)$$

gde je: $\sum_{\nu} \vec{R}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0$, jer su veze idealne, tako da se (75) svodi na (74).

U (74) sila $-m_\nu \vec{a}_\nu$ predstavlja silu inercije tačke M_ν: $\vec{F}_\nu^{in} = -m_\nu \vec{a}_\nu$; a sila $\vec{F}_\nu^{\ell} = \vec{F}_\nu^{in} + \vec{F}_\nu$ izgubljenu silu

Glavna odlika opšte jednačine dinamike je da u njoj, kao posledica hipoteze o idealnim vezama ne figurišu reakcije veza. Na ovaj način je u analitičkoj mehanici problem određivanja kretanja sistema odvojen od problema određivanja reakcija veza. Zbog toga se opšta jednačina dinamike koristi kao polazna u formiranju diferencijalnih jednačina kretanja.

Princip virtuelnog rada.- Posmatra se materijalni sistem u stanju mirovanja, što znači da se svaka tačka M_ν nalazi u stanju mirovanja, tako da važi:

$$t > t_0, \quad \vec{r}_\nu(t) = \vec{r}_\nu(t_0) = const \Rightarrow \vec{v}_\nu(t) \equiv 0 \text{ i } \vec{a}_\nu(t) \equiv 0.$$

Teorema.- Materijalni sistem čije je kretanje ograničeno idealnim zadržavajućim (dvostranim) vezama, biće u ravnoteži ako i samo ako je ukupan virtuelni rad sistema aktivnih sila na ma kom virtuelnom vezama dozvoljenom pomeranju, jednak nuli:

$$\sum_{\nu} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (76)$$

Dokaz teoreme.- U stanju ravnoteže je: $\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu = 0$, pa važi: $\sum_{\nu} (\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu)\delta\vec{r}_\nu = 0$, gde je $\sum_{\nu} \vec{R}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0$, tako da važi (76). To znači da je sistem sila uravnotežen.

S druge strane, ako sistem nije u ravnoteži njegova kinetička energija je: $T(t) > 0$ za $t > t_0$ i $dT = \delta A$, gde je $\delta A = \sum \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu$ elementarni rad aktivnih sila $\vec{F}_\nu$ koje deluju na mat. sistem. Za $dT > 0$ sledi da je $\delta A > 0$, kao i: $\delta' A > 0$, jer je u slučaju geometrijskih stacionarnih veza elementarno stvarno pomeranje materijalnog sistema $d\vec{r}_\nu$ jedno od virtuelnih pomeranja $\delta\vec{r}_\nu$, tj.: $\sum_{\nu} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu > 0$.

Kao i u slučaju opšte jednačine dinamike i ovde je ~~kao~~ glavna prednost u odnosu na vektorski pristup, činjenica da u jednačini (76) nema reakcija veza. Ukoliko mat. sistem nema slobodu kretanja princip virtuelnog rada se može iskoristiti za određivanje odgovarajućih reakcija veza. U tom slučaju vezu čija se reakcija određuje, treba uklanjanjem materijalni sistem dobija slobodu kretanja, s jedne strane, dok, s druge strane njenu reakciju treba pridružiti aktivnim silama.

Napomena.- Princip predstavlja načelo, stav koji odražava suštinu pojave ili objekta na koji se odnosi, a na koji se poziva u daljem toku istraživanja.
Opšta jednačina dinamike izvedena je iz drugog Njutnovog zakona (osnovnog zakona dinamike), uz pretpostavku o idealnim vezama. Međutim, može se ići i u suprotnom smeru. Iz opšte jednačine dinamike uz dopunske informacije o sistemu, tj. vezama, mogu se izvesti diferencijalne jednačine kretanja, tj. matematički model ponašanja sistema. Upravo ova procedura će biti sprovedena prilikom izvođenja Lagranževih jednačina prve vrste.
Principi kao što su Lagranž-Dalamberov princip i princip virtuelnih radova spadaju u grupu diferencijalnih principa, jer se njima postulira relacija koja mora biti zadovoljena u svakom trenutku i za svako virtuelno pomeranje iz bilo kog vezama dozvoljenog položaja materijalnog sistema. Ovi principi su lokalnog karaktera, pa se nazivaju diferencijalni principi.
Uporedo sa ovom klasom principa postoje i principi globalnog karaktera. Oni se odnose na ceo vremenski interval kretanja i ceo prostor u kome se kretanje odvija. Integralni principi su ekstremalnog karaktera, tj. zasnovani su na tvrđenju da ~~se~~ određena veličina tokom kretanja sistema ima stacionarnu vrednost.

Dodatak. Ajnštajnova konvencija o sabiranju.- Neka je data suma po indeksu, npr., α, proizvoda veličina od kojih jedna nosi taj indeks kao donji, A_α, a druga kao gornji, B^α, tj. suma: $\sum_\alpha A_\alpha B^\alpha$. Prema Ajnštajnovoj konvenciji u izrazu $\sum_\alpha A_\alpha B^\alpha$ znak za sumu se može izostaviti (ne mora se pisati), tako da izraz $A_\alpha B^\alpha$ automatski podrazumeva sumu proizvoda veličina A_α i B^α po ponovljenom indeksu α, a za sve dopustive vrednosti tog indeksa. Dakle, važi:

$$\sum_\alpha A_\alpha B^\alpha = A_\alpha B^\alpha = A_1 B^1 + A_2 B^2 + \ldots A_\alpha B^\alpha + \ldots$$

Analogno prethodnom je:

$$\sum_\alpha A_{\beta\alpha} B^{\gamma\alpha} = C_\beta^\gamma \Leftrightarrow C_\beta^\gamma = A_{\beta\alpha} B^{\gamma\alpha} = A_{\beta 1} B^{\gamma 1} + A_{\beta 2} A^{\gamma 2} + A_{\beta 3} B^{\gamma 3} + \ldots$$

U ovim izrazima sabiranje se vrši po indeksu α dvoindeksnih veličina $A_{\beta\alpha}$ i $B^{\gamma\alpha}$, dok su indeksi β i γ slobodni u ovim veličinama. Rezultat sume proizvoda veličina $A_{\beta\alpha}$ i $B^{\gamma\alpha}$ po ponovljenom indeksu α je dvoindeksna veličina C_β^γ čiji je donji indeks jednak slobodnom donjem indeksu β veličine $A_{\beta\alpha}$, a gornji indeks γ jednak slobodnom gornjem indeksu γ veličine $B^{\gamma\alpha}$.
Takođe je:

$$\sum_\alpha A_\alpha^\beta \cdot B_\gamma^\alpha = A_\alpha^\beta B_\gamma^\alpha = C_\gamma^\beta \; ; \; \sum_\alpha A_\alpha^\beta B^{\alpha\gamma} = A_\alpha^\beta B^{\alpha\gamma} = C^{\beta\gamma}$$

$$\sum_\alpha T_{\beta\gamma}^\alpha \cdot P_{\alpha\delta} = T_{\beta\gamma}^\alpha P_{\alpha\delta} = Q_{\beta\gamma\delta} \; ; \; \sum_\beta T_{\beta\gamma}^\alpha P^{\beta\delta} = T_{\beta\gamma}^\alpha P^{\beta\delta} = Q_{\;\gamma}^{\alpha\delta}$$

Lagranževe jednačine prve vrste. – U opštoj jednačini dinamike virtuelna pomeranja tačaka $\delta\vec{r}_\nu$ nisu međusobno nezavisna, ako je sistem vezan, tj. ona u tom slučaju moraju da zadovolje uslove (64)

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_\nu f^\alpha \cdot \delta\vec{r}_\nu = \sum_\nu \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu = 0, \quad \alpha = 1,2 \dots, d$$

koji slede iz činjenice da je kretanje mat. sistema ograničeno holonomnim vezama (18),

kao i uslove (66)

$$\sum_\nu \vec{l}_\nu^\beta \cdot \delta\vec{r}_\nu = \sum A_\nu^\beta \delta x_\nu + B_\nu^\beta \delta y_\nu + C_\nu^\beta \delta z_\nu = 0, \qquad \beta = 1,2, \dots, g$$

koje nameću neholonomne veze (19).

Opšta jednačina dinamike (74):

$$\boxed{\sum_\nu (\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu)\cdot\delta\vec{r}_\nu = \sum_\nu (F_{\nu x} - m_\nu a_{\nu x})\delta x_\nu + (F_{\nu y} - m_\nu a_{\nu y})\delta y_\nu + \sum_\nu (F_{\nu z} - m_\nu a_{\nu z})\delta z_\nu = 0} \qquad (77)$$

izražava činjenicu da je linearna forma u matematičkom smislu po virtuelnim pomeranjima $\delta\vec{r}_\nu$, odnosno virtuelnim priraštajima koordinatama $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ tačaka jednaka nuli. Da bi se iskoristilo svojstvo po kome je jedna linearna forma međusobno nezavisnih p_ν parametara identički jednaka nuli, ako i samo ako su koeficijenti a_ν uz te parametre u linearnoj formi identički jednaki nuli; tj.:

$$\sum a_\nu p_\nu = 0 \iff a_\nu = 0, \qquad (78)$$

pri čemu koeficijenti a_ν nisu funkcije parametara p_ν, potrebno je iz (77) eliminisati zavisna virtuelna pomeranja $\delta\vec{r}_\nu$, odnosno virtuelne priraštaje $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$. Za rešenje ovog problema postoji više mogućnosti. Na primer, s obzirom da se uslovi (64) i (66) mogu smatrati sistemom od $d+g$ jednačina po $3N$ nepoznatih virtuelnih priraštaja $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$, moguće je iz tog sistema izraziti $d+g$ zavisnih virtuelnih priraštaja u funkciji $3N-(d+g)$ nezavisnih $\delta x_\nu, \delta y_\nu$ i δz_ν. Tako određeni priraštaji se mogu zameniti u (77) koja tada postaje linearna forma $3N-(d+g)$ međusobno nezavisnih parametara δx_ν, δy_ν i δz_ν, i na koju se može primeniti (78). Međutim, ovakav logičan postupak povezan je sa matematičkim teškoćama, s obzirom da se oslanja na primenu teoreme o implicitnoj funkciji.

Druga mogućnost za rešavanje problema sastoji u postavci problema **određivanja kretanja vezanog materijalnog sistema za koji važi (77), kao problema sa ograničenjima u formi jednačina (64) i (66). Ovaj problem se može svesti na problem bez ograničenja** primenom **Lagranževog metoda neodređenih množitelja**, kao metode koja se koristi za određivanje uslovnih ekstrema funkcije viših promenljivih u slučaju ograničenja koja moraju da zadovolje nezavisne promenljive.

U tom cilju uvode se onoliko koliko ima ograničenja, neodređenih množitelja. S obzirom na dva tipa ograničenja na virtuelna pomeranja $\delta\vec{r}_\nu$, množitelji veza biće označeni sa $\lambda_\alpha=\lambda_\alpha(t), \alpha=1..d$, i $\mu_\beta=\mu_\beta(t), \beta=1..g$. Svaka od jednačina (64) biće pomnožena sa množiteljem λ_α, a svako od ograničenja (66) sa odgovarajućim množiteljem μ_β i sve tako dobijene jednačine biće, zatim, sabrane:

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\sum_\nu \text{grad}_\nu f^\alpha\cdot\delta\vec{r}_\nu+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_\nu\vec{l}_\nu^{\,\beta}\cdot\delta\vec{r}_\nu=0,$$

odnosno

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_\nu\lambda_\alpha\text{grad}_\nu f^\alpha\cdot\delta\vec{r}_\nu+\sum_\beta\sum_\nu\mu_\beta\vec{l}_\nu^{\,\beta}\cdot\delta\vec{r}_\nu=0 \quad \sum_\nu\Big[\sum_\alpha\lambda_\alpha\text{grad}_\nu f^\alpha+\sum_\beta\mu_\beta\vec{l}_\nu^{\,\beta}\Big]\delta\vec{r}_\nu$$

i

$$\sum_\nu\Big[\sum_\alpha\lambda_\alpha\text{grad}_\nu f^\alpha\cdot\delta\vec{r}_\nu+\sum_\beta\mu_\beta\vec{l}_\nu^{\,\beta}\cdot\delta\vec{r}_\nu\Big]=0 \qquad (79)$$

Primenom Ajnštajnovne konvencije o sabiranju po kojoj se znak sume po odgovarajućem indeksu $(\alpha;\beta)$ ne mora pisati, ako se pod sumom nalazi proizvod veličina od kojih jedna, kao indikator nosi taj indeks kao donji, a druga kao gornji indeks, jednačina (79) se može napisati u jednostavnijem obliku:

$$\sum_\nu(\lambda_\alpha\text{grad}_\nu f^\alpha+\mu_\beta\vec{l}_\nu^{\,\beta})\cdot\delta\vec{r}_\nu=0 \qquad (80)$$

gde je

$$\lambda_\alpha\text{grad}_\nu f^\alpha=\sum_\alpha\lambda_\alpha\text{grad}_\nu f^\alpha=\lambda_1\text{grad}_\nu f^1+\ldots+\lambda_d\text{grad}_\nu f^d$$

i

$$\mu_\beta\vec{l}_\nu^{\,\beta}=\sum_\beta\mu_\beta\vec{l}_\nu^{\,\beta}=\mu_1\vec{l}_\nu^{\,1}+\mu_2\vec{l}_\nu^{\,2}+\ldots+\mu_g\vec{l}_\nu^{\,g}$$

Sabiranjem (80) sa opštom jednačinom dinamike (77) dobija se:

$$\sum_\nu\big[\vec{F}_\nu-m_\nu\vec{a}_\nu+\lambda_\alpha\text{grad}_\nu f^\alpha+\mu_\beta\vec{l}_\nu^{\,\beta}\big]\cdot\delta\vec{r}_\nu=0, \qquad (81)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\sum_{\nu}\left(F_{\nu x}-m_\nu a_{\nu x}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_\nu}+\mu_\beta A_\nu^\beta\right)\delta x_\nu+\left(F_{\nu y}-m_\nu a_{\nu x}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial y_\nu}+\mu_\beta B_\nu^\beta\right)\delta y_\nu+$$
$$+\sum_{\nu}\left(F_{\nu y}-m_\nu a_{\nu y}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\nu}+\mu_\beta C_\nu^\beta\right)\delta z_\nu=0 \qquad (82)$$

Leva strana jednačine (82) predstavlja linearnu formu po svih 3N virtuelnih priraštaja koordinata $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$. Svi ti članovi forme predstavljaće biće podeljeni u dve grupe. Jedan deo linearne forme predstavljaće linearnu kombinaciju d+g zavisnih virtuelnih priraštaja, a drugi de linearnu kombinaciju 3N-(d+g) nezavisnih priraštaja. Pošto su množitelji veza λ_α i μ_β, njih d+g, nepoznate funkcije vremena, mogu biti izabrani tako da d+g koeficijenata uz zavisne virtuelne priraštaje budu nula. Posle toga leva strana (82) sadržaće samo linearnu kombinaciju međusobno nezavisnih priraštaja koordinata i prema (78), biće nula ako svi koeficijenti u toj formi budu nula. Na taj način su svi koeficijenti u (82) izjednačeni sa nulom, ali sa različitim argumentima: prvi put zbog izbora Lagranževih množitelja, a drugi put zbog linearne nezavisnosti. Zbog toga iz (82), odnosno iz (81) slede jednačine kretanja materijalnog sistema u vektorskom obliku:

$$\vec{F}_\nu-m_\nu\vec{a}_\nu+\lambda_\alpha\,\mathrm{grad}_\nu f^\alpha+\mu_\beta \vec{l}_\nu^\beta=0 \qquad (83)$$

odnosno

$$m_\nu\vec{a}_\nu=\vec{F}_\nu+\lambda_\alpha\,\mathrm{grad}_\nu f^\alpha+\mu_\beta \vec{l}_\nu^\beta$$

čije projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema glase:

$$m_\nu\ddot{x}_\nu=F_{\nu x}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_\nu}+\mu_\beta A_\nu^\beta \qquad (84)$$

$$m_\nu\ddot{y}_\nu=F_{\nu y}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial y_\nu}+\mu_\beta B_\nu^\beta \qquad (85)$$

$$m_\nu\ddot{z}_\nu=F_{\nu z}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\nu}+\mu_\beta C_\nu^\beta \qquad (86)$$

Jednačine (83) nazivaju se Lagranževe jednačine prve vrste u Dekartovom koordinatnom sistemu. Da bi se odredile konačne jednačine kretanja sistema $x_\nu=x_\nu(t)$, $y_\nu=y_\nu(t)$, $z_\nu=z_\nu(t)$ diferencijalne jednačine (84), (85) i (86) kretanja materijalnog sistema, njih 3N, nisu dovoljne, s obzirom da one pored 3N nepoznatih konačnih jednačina kretanja tačaka materijalnog sistema sadrže i $d+g$ nepoznatih funkcija $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(t)$ i $\mu_\beta = \mu_\beta(t)$ množitelja veza. Zbog toga se sistem jednačina (84), (85) i (86) mora simultano rešavati sa $d+g$ jednačina veza (18) i (19).

Ako se Lagranževe prve vrste (83) uporede sa diferencijalnim jednačina kretanja materijalnog sistema ( ) lako se može utvrditi da su **reakcije idealnih holonomnih veza**:

$$\vec{R}_\nu^{h} = \lambda_\alpha \, grad_\nu f^\alpha, \tag{87}$$

a da su **reakcije idealnih neholonomnih veza**:

$$\vec{R}_\nu^{n.h} = \mu_\beta \vec{l}_\nu^{\beta}, \tag{88}$$

tj. da su **ukupne reakcije idealnih veza**:

$$\vec{R}_\nu = \vec{R}_\nu^{h} + \vec{R}_\nu^{n.h} = \lambda_\alpha \, grad_\nu f^\alpha + \mu_\beta \vec{l}_\nu^{\beta} \tag{89}$$

To znači da se određivanjem Lagranževih množitelja istovremeno određuju i reakcije idealnih veza. Zbog ove činjenice se λ_α i μ_β u literaturi nazivaju množiteljima veza.

O operatoru sinhronog variranja δ. – Hodograf vektorske funkcije $\vec{r}=\vec{r}(t)$ predstavlja trajektoriju tačke čija je konačna jednačina kretanja u vektorskom obliku upravo funkcija $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Ova trajektorija tačke naziva se i direktna, nevarirana trajektorija tačke. Linije koje se nalaze u ε okolini direktne trajektorije nazivaju se indirektne, varirane, trajektorije tačke i njihove vektorske jednačine imaju oblik:

$\vec{r}^{*}=\vec{r}(t+\varepsilon)$

gde je ε mali parametar čiji je red veličine isti kao i red veličine dt.
Jednačina direktne trajektorije se može dobiti iz jednačine familije indirektnih trajektorija, kada je $\varepsilon=0$, tj.:

$\vec{r}(t)=\vec{r}(t,\varepsilon=0)$.

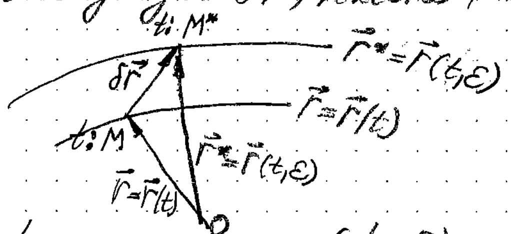
Ako se jednačina indirektne trajektorije razvije u okolini direktne trajektorije dobiće se: $\vec{r}^{*}=\vec{r}(t,\varepsilon)\approx\vec{r}(t,\varepsilon=0)+\left.\frac{\partial\vec{r}^{*}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon$, tako da je:

$\vec{r}(t,\varepsilon)=\vec{r}(t)+\varepsilon\vec{\eta}(t)$

gde je: $\vec{\eta}(t)=\left.\frac{\partial\vec{r}^{*}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ – neprekidna diferencijabilna funkcija vremena.

Razlika vektora položaja tačke M na indirektnoj trajektoriji u trenutku t, $\vec{r}^{*}=\vec{r}(t,\varepsilon)$ i vektora položaja te tačke na direktnoj trajektoriji u istom trenutku, predstavlja sinhronu varijaciju $\delta\vec{r}$, vektora $\vec{r}=\vec{r}(t)$, tj. virtuelno pomeranje tačke:

$\delta\vec{r}=\vec{r}(t,\varepsilon)-\vec{r}(t)$



Operatori diferenciranja i sinhronog variranja (d i δ) su komutativni, tj. važi: $d\delta=\delta d$.

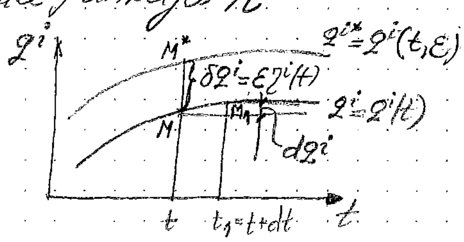
Dokaz. – $d(\delta\vec{r})=d(\vec{r}(t,\varepsilon)-\vec{r}(t))\Rightarrow\boxed{d\delta\vec{r}=d(\varepsilon\vec{\eta}(t))}\boxed{=\varepsilon\, d\vec{\eta}(t)}$

$\delta(d\vec{r})\approx d\vec{r}(t,\varepsilon)-d\vec{r}(t)=d(\vec{r}(t)+\varepsilon\vec{\eta}(t))-d\vec{r}(t)\Rightarrow\boxed{\delta d\vec{r}=\varepsilon\, d\vec{\eta}(t)}$

Varijacija funkcije više promenljivih. – Neka je data $\overbrace{\text{funkcija}}^{\text{nestacionarna}}$ n nezavisnih promenljivih:

$\vec{r}=\vec{r}(t,q^1,q^2,\ldots,q^i,\ldots,q^n)$,

gde su: $q^i=q^i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$



Neka su vrednosti promenljivih q^i u trenutku t:

$q^{i*}=q^i(t)+\delta q^i$, $\delta q^i=\varepsilon\eta^i(t)$, $q^{i*}=q^i(t,\varepsilon)$

gde je ε mali parametar i gde su δq^i sinhrone varijacije veličina $q^i=q^i(t)$ u trenutku t, tj. elementarne virtuelne promene vrednosti promenljivih q^i u trenutku t. Funkcija $\vec{r}$ za vrednosti nezavisnih promenljivih $q^{i*}=q^i(t,\varepsilon)$

Dodatak.- Odnos $d\vec{r}$ i $\delta\vec{r}$

Posmatra se kretanje tačke M po vezi: $f(t,x,y,z)=0$. U trenutku t tačka se nalazi u položaju $M(x,y,z)$. U tom položaju (trenutku t) ravan tangentna na površ $f(t,x,y,z)=0$ je ravan π, na koju je upravan vektor $\vec{N}$ u tački M površi:

$$\vec{N}=\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Elementarno virtuelno, vezom $f(t,x,y,z)=0$ dozvoljeno pomeranje, u posmatranom trenutku t, $\delta\vec{r}=\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k}$, prema (32), zadovoljava jednačinu:

$$\operatorname{grad} f\cdot\delta\vec{r}=0,$$

odakle sledi da je: $\delta\vec{r}\perp\operatorname{grad} f$, tj. $\delta\vec{r}\perp\vec{N}$, što znači da vektor $\delta\vec{r}=\overrightarrow{MM^*}$ leži u ravni π tangentnoj na posmatranu površ u trenutku (položaju M tačke)

U trenutku $t_1=t+dt$, bliskom trenutku t, jednačina površi je:

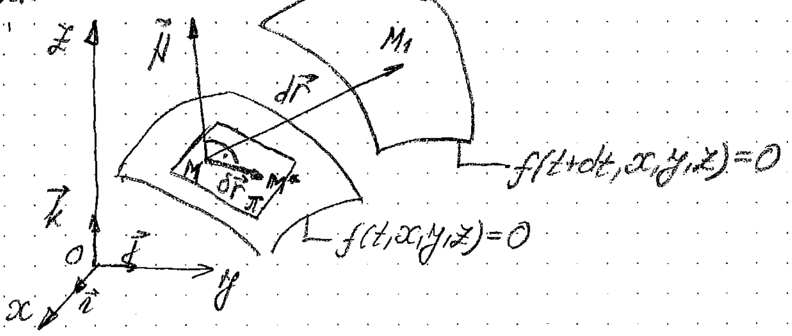
$f(t_1,x,y,z)=0$, $f(t+dt,x,y,z)=0$. U tom trenutku tačka je u položaju M_1 čije su koordinate $M_1(x+dx,y+dy,z+dz)$ pri čemu ove koordinate zadovoljavaju jednačinu površi trenutku $t_1=t+dt$, tako da važi:

$$f(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)=0$$

Vektor elementarnog stvarnog pomeranja tačke na intervalu vremena $[t,t+dt]$, $d\vec{r}\approx\overrightarrow{MM_1}\Rightarrow d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$, zadovoljava jednačinu:

$$\operatorname{grad} f\cdot d\vec{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0,\ \text{tj.}\ \operatorname{grad} f\cdot d\vec{r}=-\frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

Ova jednačina pokazuje da vektor elementarnog pomeranja $d\vec{r}$ na intervalu vremena $[t,t+dt]$ nije upravan na vektor $\vec{N}=\operatorname{grad} f$ u položaju M tačke, tj. $d\vec{r}$ nije u tangentnoj ravni π na površ u položaju M. To znači da vektor elementarnog pomeranja $d\vec{r}$ tačke na intervalu vremena $[t,t+dt]$ čije je kretanje ograničeno zadržavajućom, nestacionarnom, geometrijskom vezom nije iz skupa elementarnih virtuelnih, ovom vezom dozvoljenih, pomeranja u trenutku t.



U slučaju kretanja tačke po geometrijskoj stacionarnoj zadržavajućoj vezi: $f(x,y,z)=0$, jednačine (40) i (42) ($\operatorname{grad} f\cdot d\vec{r}=0$ i $\operatorname{grad} f\cdot\delta\vec{r}=0$) iskazuju činjenicu da je elementarno stvarno pomeranje tačke na intervalu vremena $[t,t+dt]$, $d\vec{r}$, iz skupa elementarnih virtuelnih, vezom $f(x,y,z)=0$ dozvoljenih, pomeranja tačke u trenutku t. Vektori $d\vec{r}$ i $\delta\vec{r}$ u trenutku t nalaze se u tangentnoj ravni na površ $f(x,y,z)=0$ u položaju M tačke u tom trenutku.

je: $\vec{r}^* = \vec{r}(t, q^{i*}) = \vec{r}(t, q^i + \delta q^i)$.

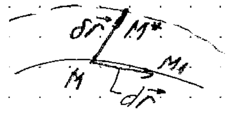
Tejlorov red funkcije $\vec{r}^*$ u okolini tačke $q^{i*} = q^i$, tj. za $\delta q^i = 0$ je:

$$\vec{r}^* \approx \vec{r}(t, q^i) + \sum_i \left(\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q^{i*}}\right)_{\substack{q^{i*} = q^i \\ (\delta q^i = 0)}} (q^{i*} - q^i)$$

tj. $\vec{r}^* \approx \vec{r}(t, q^i) + \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \delta q^i$,

pa je sinhrona varijacija funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t, q^i)$, tj. njena elementarna virtuelna promena u trenutku t:

$\boxed{\delta \vec{r} = \vec{r}(t, q^i + \delta q^i) - \vec{r}(t, q^i)}$, odnosno, $\boxed{\delta \vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \delta q^i}$



Diferencijalna promena funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t, q^i)$ na intervalu na intervalu vremena $[t, t+dt]$ je određena izrazom:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1 = t + dt, q^i_1 = q^i + dq^i) \approx \vec{r}(t, q^i) + \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt,$$

tako da je:

$d\vec{r} \approx \vec{r}(t + dt, q^i + dq^i) - \vec{r}(t, q^i)$, odnosno, $d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt$.

Upoređivanjem izraza za $\delta \vec{r}$ i $d\vec{r}$ može se formalno pisati:

$$\delta \vec{r} = d\vec{r}\Big|_{\substack{dt = 0 \\ dq^i \to \delta q^i}}$$

II deo

Višedimenzionalni prostori
(uvod)

Višedimenzionalni prostori, tj. prostori čiji je broj dimenzija $N>3$, imaju važno mesto u razmatranju prirodnih pojava, tj. fizičkih, mehaničkih i matematičkih modela. Primer za to je analiza kretanja sistema N materijalnih čestica u klasičnoj mehanici. Naime, kretanje, npr., sistema N slobodnih čestica (materijalnih tačaka) koji ima $3N$ stepeni slobode, u E_3 (euklidskom trodimenzionalnom) prostoru može se zameniti kretanjem jedne tačke jedinične mase u euklidskom $3N$-dimenzionalnom prostoru E_{3N}, dok se kretanje sistema materijalnih čestica čije je kretanje ograničeno sa l veza, tj. čiji je broj stepeni slobode $n<3N$, može analizirati kao kretanje tačke jedinične mase u n-dimenzionalnom Rimanovom prostoru R_n.
Razmatranje Ajnštajnove teorije relativnosti, tj. teorije gravitacije nezamislivo je bez Rimanove geometrije. Međutim, da bismo shvatili višedimenzionalne apstraktne, neeuklidske prostore potrebno je da se oslobodimo pojmova koji su u nama duboko usađeni kroz proučavanje euklidske geometrije, s jedne strane, a s druge da smo u mogućnosti da iz geometrije takvih prostora, pod specijalnim uslovima, dobijemo euklidski prostor. Otkriće neeuklidskih prostora (Lobačevski, Boljaj, Gaus) dovelo je do toga da se prostor i njegova geometrija ne tretiraju kao apriori određeni, nego da se logički mogu formirati različite geometrije koje se razlikuju po aksiomama na kojima se zasnivaju.
Georg Bernard Riman (1826÷1866) razvio je geometriju opšteg prostora koji obuhvata i euklidske i neeuklidske prostore. Riman je pre Ajnštajna pretpostavio da je metrika fizičkog prostora određena rasporedom materije u njemu.

Realni punkturalni N dimenzionalni prostor (aritmetički prostor). –

Neka je zadato N veličina x^p, $p=1,2,\dots,N$ koje su međusobno nezavisne. Bilo koja uređena N-torka vrednosti a^p veličina x^p, $(a^1, a^2, \dots, a^p, \dots, a^N)$ predstavlja tačku, a skup svih tačaka koji se dobija za sve moguće realne vrednosti veličina x^p zove se realni punkturalni prostor N dimenzija (hiperprostor, mnogostrukost). Brojevi a^p, $p=1,2,\dots,N$ u N-torci $(a^1,\dots,a^p,\dots,a^N)$ su koordinate posmatrane tačke u tom prostoru.

Primer. –

1. – Kretanje mehaničkog sistema koji ima n stepeni slobode opisuje se pomoću generalisanih koordinata $q^1,\dots,q^n$. Taj sistem koordinata čini n-dimenzionalan prostor $\dot{\cdot}$. Bilo koja konfiguracija mehaničkog sistema određena je jednom tačkom u tom prostoru.
2. – Položaj krutog tela koje rotira oko nepokretne tačke određen je pomoću 3 ugla ψ, θ, φ. Vrednosti ova 3 ugla određuju položaj tačke u prostoru X_3, pri čemu svakom položaju tela u opažajnom prostoru odgovara jedna tačka u X_3.

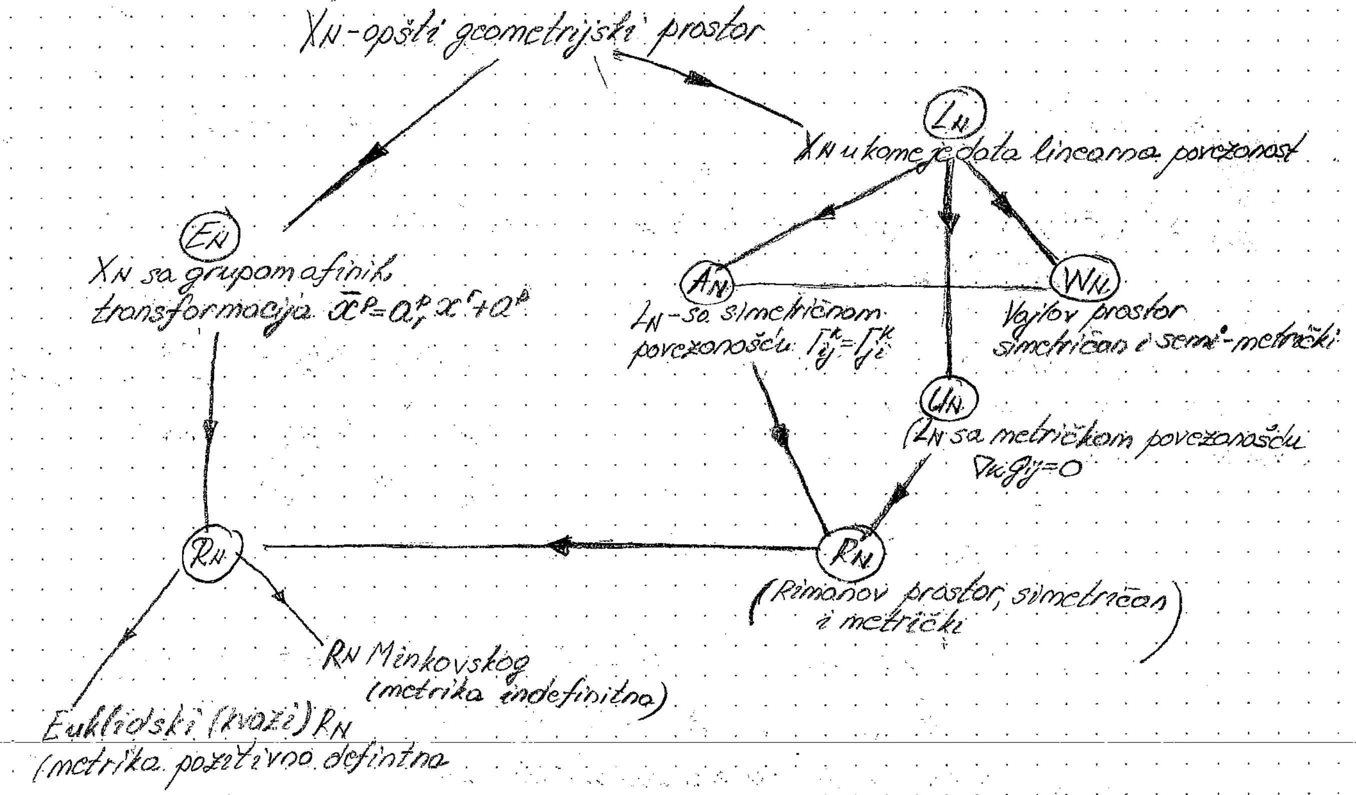
Klasifikacija višedimenzionalnih prostora.-

1) Opšti N-dimenzionalan prostor koji je diskretan-isprekidan, tj. sastoji se od diskretnih tačaka; ovakav prostor nije diferencijabilan

2) Opšti N-dimenzionalan diferencijabilan prostor X_N u kome se mogu uvesti generalisane koordinate q^p, odnosno, $\bar{q}^p$ pomoću transformacionih funkcija $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$, $p, r = 1, 2, \dots, N$, koje su inverzibilne.

Kako je X_N diferencijabilan, to je on neprekidan ili kontinuiran. Prostor X_N nije nužno povezan, niti mora biti metrički. On predstavlja opšti geometrijski prostor.

U nastavku se bavimo samo N-dimenzionalnim diferencijabilnim prostorima.



Afini vektorski prostor (linearan prostor, AVP). –

U opštem diferencijalnom N-dimenzionalnom prostoru, X_N, u kome su koordinate tačke x_p, $p=1,2,..,N$ mogu se definisati pojmovi analogni geometrijskim pojmovima iz našeg 3.-D opažajnog prostora.

Pod vektorom u X_N podrazumeva se sistem dve tačke, tako da se zna koja je prva (početak vektora), a koja je druga (kraj vektora). Ako je tačka $P(a^p)$ početak, a tačka $Q(b^p)$ kraj vektora, tada uređena N-torka brojeva: $c^p=b^p-a^p$ predstavlja koordinate vektora $\vec{c}=\overrightarrow{PQ}$, što se piše: $\vec{c}=\{c^p\}$. Vektor $\vec{c}$ čiji početak može biti bilo koja tačka prostora zove se slobodni vektor.

Pod linearnim (afinim) vektorskim prostorom podrazumeva se prostor (skup) vektora: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u kome su definisane operacije: sabiranja vektora i operacija množenja vektora skalarom (brojem), pri čemu rezultat tih operacija pripada uočenom prostoru.

Vektori $\vec{e}_1=\{l_1,0,...0\}$, $\vec{e}_2=\{0,l_2,0,..0\}$, ... $\vec{e}_N=\{0,0,..,0,l_N\}$ u tački $O(0,0,...0)$ zovu se osnovni koordinatni vektori, a tačka O koordinatni početak.
Pošto koordinate x^p mogu biti različite prirode, to jedinice mere l_p, $p=1..N$, koordinatnih vektora $\vec{e}_p$ ne moraju biti iste. Zbog toga u ovom prostoru nije moguće definisati dužinu vektora (koordinate vektora imaju različite jedinice), kao ni uglove između vektora. To, takođe, znači da nije moguće odrediti rastojanje između tačaka, a mogu se upoređivati samo paralelni vektori.

Svaki vektor $\vec{u}$ afinog vektorskog prostora se može izraziti kao linearna forma, kombinacija osnovnih koordinatnih vektora $\vec{e}_p$ koji su međusobno nezavisni: $\vec{u}=u^p\vec{e}_p$. Vektor: $\vec{r}=x^p\vec{e}_p$ je vektor položaja tačke $M(x^p)$ u odnosu na koordinatni početak.

Ako su koordinate tačaka x^p funkcije n parametara t^i, $i=1..n$, tada sistem $x^p=x^p(t^1..t^i,..,t^n)$, $p=1..N$, definiše potprostor od n dimenzija uočenog N-dimenzionalnog prostora, koji je potopljen (smešten) u prostor od N dimenzija. Potprostor jedne dimenzije, $n=1$, je kriva linija, potprostor od 2 dimenzije, $n=2$, je površ, dok se potprostor od $n=N-1$ dimenzije zove hiperpovrš.

Eliminacijom n parametara t^i iz gornjeg sistema od N jednačina, dobija se sistem $d=N-n$ jednačina: $F^\alpha(x^1,..x^p,..,x^N)=0$, $\alpha=1,2,...,d$, koji takođe predstavlja jednačine $n=N-d$ -dimenzionalnog potprostora. Hiperpovrš, kao $n=N-1$ -dimenzionalan potprostor, određen je samo jednom jednačinom: $F(x^1..,x^N)=0$.

Lako se može pokazati da su koordinatne linije prave linije, a koordinatne površi hiperravni, što znači da je koordinatni sistem u tački O afinog vektorskog prostora pravolinijski, globalni koordinatni sistem tog prostora.

Iz jednog sistema pravolinijskih koordinata x^p može se preći u drugi sistem koordinata $\bar{x}^p$ uočenog prostora pomoću npr. **homogenih linearnih transformacija**:
$\bar{x}^p=a^p_r x^r$, $a^p_r=\text{const}$, $[a^p_r]^{-1}=[b^p_r]$ i $\vec{\bar{e}}_p=b^r_p\vec{e}_r$,
koje predstavljaju specijalni slučaj **opšte linearne transformacije** $\bar{x}^p=a^p_r x^r+c^p$, koje

pomera koordinatni početak koordinatnog sistema novih koordinata.
Homogena linearna transformacija kao punktualna transformacija jednog dela prostora u drugi preslikava prave u prave, ravni u ravni, paralelne prave (ravni) u paralelne prave (ravni), dok se oblici i veličine drugih geometrijskih objekata deformišu.

Afini metrički prostor (AMP).-

Neka su u AVP (afinom vektorskom prostoru) jedinice mere osnovnih koordinatnih vektora $\vec{e}_p$ jednake, tj. jednake su jedinice mere iz svake tačke u svim pravcima.
U tom slučaju, pomoću kosinusne teoreme ili Pitagorine teoreme mogu se odrediti rastojanja između bilo koje dve tačke u njemu. To znači da ako se u AVP definiše skalarni vektorski proizvod: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$, onda takav prostor postaje N-dimenzionalni afini metrički prostor (AMP). Dakle, AMP je prostor u kome je moguće odrediti intezitet vektora kao rastojanje između početne i krajnje tačke tog vektora i uglove između bilo koja dva vektora tog prostora.
Skalarni proizvodi baznih vektora AMP prostora:
$e_{pr}=\vec{e}_p\cdot\vec{e}_r$, $e_{pr}=e_{rp}$ i $e_{pr}=const$, $p,r=1,2..N$
predstavljaju osnovne metričke koeficijente AMP. Za dve susedne tačke M i M_1 čije su koordinate u odnosu na uvedeni pravolinijski kosougli sistem koordinata x^p: $M(x^p)$ i $M_1(x^p+dx^p)$, rastojanje između ~~između~~ njih $\overline{MM_1}^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}$ $(d\vec{r}=dx^p\vec{e}_p)$ iznosi: $ds^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=e_{pr}\,dx^p dx^r$.
Vektori recipročnog bazisa $\vec{e}^p$ određeni su relacijom: $\vec{e}^p\cdot\vec{e}_r=\delta^p_r$ i upravni su na odgovarajuće koordinatne hiperravni u kojima leže vektori $\vec{e}_r$, $r\neq p$.
Kontravarijantni metrički koeficijenti e^{pr} su: $e^{pr}=\vec{e}^p\cdot\vec{e}^r$, pri čemu važi:
$[e^{pr}]=[e_{pr}]^{-1}$, $e_{pr}e^{rs}=e_{rp}e^{sr}=\delta^s_p$.
Vektori recipročne baze $\vec{e}^p$ u osnovnoj koordinatnoj bazi su: $\vec{e}^p=e^{pr}\vec{e}_r$, dok su vektori osnovne baze $\vec{e}_r$ u recipročnoj koordinatnoj bazi: $\vec{e}_p=e_{pr}\vec{e}^r$
Bilo koji vektor $\vec{u}$ u sistemu koordinata x^p može se predstaviti u obliku:
$\vec{u}=u^s\vec{e}_s$, gde su: $u^s=\vec{u}\cdot\vec{e}^s$ - kontravarijantne koordinate vektora $\vec{u}$
ili u obliku:
$\vec{u}=u_s\vec{e}^s$, gde su: $u_s=\vec{u}\cdot\vec{e}_s$ - kovarijantne koordinate vektora $\vec{u}$
Nazivi uvedenih veličina su u vezi sa načinom njihove transformacije pri transformaciji koordinata x^p, o čemu će kasnije biti reči.
Veze između veličina u^s i u_s su:
$u^s=e^{sp}u_p$ i $u_s=e_{sp}u^p$,
dok je intezitet vektora $\vec{u}$:
$\vec{u}\cdot\vec{u}=e_{sp}u^s u^p=e^{sp}u_s u_p=u_s u^s$

Euklidski N-dimenzionalni prostor (EP)

Ako su osnovni bazni vektori AMP, $\vec{c}_p$, ortonormirani, tj. ako su međusobno upravni i jediničnog intenziteta, $\vec{c}_p = \vec{i}_p$, onda je koordinatni sistem pravougli pravolinijski koordinatni sistem, tj. Dekartov koordinatni sistem (DKS). Koordinate x^p se sada nazivaju Dekartove koordinate ξ^p $(x^p = \xi^p)$, $p = 1, 2, \ldots N$. Za Dekartove koordine je: $\vec{i}_p \cdot \vec{i}_s = c_{ps} = \delta_{ps}$; $\vec{i}^p = \vec{i}_p$; $c^{ps} = \delta^{ps}$;

$\vec{u} = u^p \vec{i}_p = u_s \vec{i}_s$ i $u^p = u_p$,

$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \delta_{ps} d\xi^p d\xi^s \Rightarrow ds^2 = \sum_{p=1}^{N} (d\xi^p)^2$.

AMP u kojem se rastojanje između bilo koje dve tačke može odrediti pomoću osnovne metričke forme oblika: $ds^2 = \sum_{p=1}^{N} (d\xi^p)^2$ naziva se N-dimenzionalan euklidski prostor (EP), zato što je je još Euklid koristio Pitagorinu teoremu za određivanje rastojanja između bilo koje dve tačke u našem opažajnom prostoru.
Sa pravolinijskih koordinata x^p na Dekartove koordinate ξ^p, kao i obrnuto može se preći odgovarajućom linearnom transformacijom $\xi^p = a^p_r x^r$, a koja se može odrediti iz sistema jednačina:

$$\delta_{pr} = c_{ts} \frac{\partial x^t}{\partial \xi^s} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^r} \Rightarrow \delta_{pr} = c_{ts} b^t_p b^s_r \quad (x^p = b^p_r \xi^r).$$

Linearna homogena transformacija koja polazne Dekartove koordinate ξ^p transformiše u nove Dekartove koordinate $(\bar{\xi}^p)$: $\bar{\xi}^p = a^p_r \xi^r$, zove se ortogonalna transformacija. Ova transformacija čuva veličine rastojanja između tačaka i uglove između osa. Za ortogonalne transformacije važi: $|a^p_r| = \pm 1$ i $[a^p_r]^{-1} = [a^p_r]^T$.
Ako je: $|a^p_r| = -1$, transformacija se zove ogledanje, a ako je: $|a^p_r| = 1$, transformacija se zove rotacija. Grupa transformacija tipa paralelno pomeranje $(\bar{\xi}^p = \xi^p + C^p)$ zajedno sa grupom transformacija tipa rotacije čini grupu transformacija kretanja, tj. grupu transformacija koja ne deformiše geometrijske objekte (u smislu punktualnih transformacija)

Generalisane, opšte, koordinatne transformacije. – U N-dimenzionalnom AVP (metričkom i nemetričkom) sa pravolinijskih koordinata x^p može se preći na i krivolinijske, opšte, generalisane koordinate q^p, nelinearnom, generalisanom transformacijom:

$q^p = q^p(x^r)$, $\det \left[\frac{\partial q^p}{\partial x^r} \right]^{N \times N} \neq 0$, čija je inverzna transformacija:

$x^p = x^p(q^r)$, $p, r = 1, 2 \ldots N$

Iz jednačina generalisane transformacije koordinata sledi da se diferencijali koordinata dx^p i dq^p transformišu linearno:

$dx^p = \frac{\partial x^p}{\partial q^r} dq^r$ i $dq^p = \frac{\partial q^p}{\partial x^r} dx^r$, samo što su sada koeficijenti transformacija: $a^p_r = \frac{\partial q^p}{\partial x^r}$ i $b^p_r = \frac{\partial x^p}{\partial q^r}$ funkcije odgovarajućih koordinata: $a^p_r = a^p_r(x^s)$ i $b^p_r = b^p_r(q^s)$, tj. nisu konstantni.

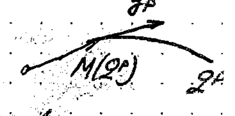
U nastavku će biti razmatrane transformacije Dekartovih koordinata ξ^p kao pravolinijskih koordina u N-dimenzionalnom EP u generalisane koordinate q^p:

$\xi^p = \xi^p(q^r)$, $\det\left[\partial\xi^p/\partial q^r\right] \neq 0 \Rightarrow q^p = q^p(\xi^r)$, odnosno:

$$d\xi^p = \frac{\partial\xi^p}{\partial q^r}dq^r \quad i \quad dq^p = \frac{\partial q^p}{\partial \xi^r}d\xi^r$$

Geometrijsko mesto tačaka koje zadovoljava jednačinu $q^p(\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^N) = C^p$, tj. jednačinu: $q^p = C^p$, u odnosu na N-dimenzionalan DKS predstavlja zakrivljenu hiper površ. N-hiperpovrši: $q^p = C^p$, $p = 1, 2, \ldots, N$ seku se u tački $M(q^p)$. Presek bilo kojih $N-1$ napred navedenih hiper površi predstavlja liniju u N-dimenzionalnom prostoru. Sve tako dobijene linije, njih N, seku se u tački $M(q^p)$ i predstavljaju koordinatne linije koordinatnog sistema generalisanih koordinata q^p, $p = 1 \ldots N$, u tački $M(q^p)$. Svaka od ovih koordinatnih linija predstavlja geometrijsko mesto tačaka prostore koji imaju samo po jednu gen. koordinatu različitu od tačke M. Jednačina jedne takve linije u N-dimenzionalnom Dekartovom koordinatnom sistemu je: $\xi^r = \xi^r(C^1, C^2, \ldots, C^{p-1}, q^p, C^{p+1}, \ldots, C^N)$, $r = 1, 2, \ldots, N$. Vektori tangentni na ove linije su:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^r}, \quad \vec{r} = \xi^p(q^r)\vec{i}_p \Rightarrow \vec{g}_r = \frac{\partial\xi^p}{\partial q^r}\vec{i}_p, \quad \vec{g}_r = \vec{g}_r(q^p), \quad r = 1, \ldots N$$



Vektori $\vec{g}_r$, $r = 1 \ldots N$ obrazuju <u>osnovni koordinatni bazis generalisanih koordinata</u> u <u>tački $M(q^p)$</u>. Vektori ovog bazisa, tj. osnovni bazni vektori se menjaju od tačke do tačke prostora, što znači da se u prostoru koordinata q^r ne može formirati jedinstveni, globalni, koordinatni sistem. Zbog toga se prostor prekriva mrežom koordinatnih linija.

Geometrijski pojmovi u N dimenzionalnom EP (E_N) generalisanih koordinata q^p, su analogni onim uvedenim, još u AMP:

<u>Vektori $\vec{g}^p$ recipročne koordinatne baze</u> određeni su relacijama: $\vec{g}^p \cdot \vec{g}_r = \delta^p_r$

<u>Kovarijantni koeficijenti</u> osnovne metričke forme su: $g_{pr} = \vec{g}_p \cdot \vec{g}_r$, $g_{pr} = g_{pr}(q^s)$ i predstavljaju kovarijantne koordinate metričkog tenzora: $G = g_{pr}\vec{g}^p\vec{g}^r$.

<u>Kontravarijantni koeficijenti osnovne metričke forme</u> su: $g^{pr} = \vec{g}^p \cdot \vec{g}^r$, $g^{pr} = g^{pr}(q^s)$, i predstavljaju kontravarijantne koordinate metričkog tenzora II reda: $G = g^{pr}\vec{g}_p\vec{g}_r$.

Između veličina g^{pr} i g_{pr} postoji veza: $g_{pr}g^{rs} = g_{rp}g^{sr} = \delta_r^s$, tj. $[g_{pr}]^{-1} = [g^{pr}]$

<u>Osnovna metrička forma</u> glasi: $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$, $d\vec{r} = dq^p\vec{g}_p \Rightarrow ds^2 = g_{pr}\,dq^p dq^r$

Vektor $\vec{u}$ u tački $M(q^p)$ je:

a) u osnovnom koordinatnom ~~koordinatnom~~ bazisu: $\vec{u} = u^s\vec{g}_s$, gde su <u>u^s kontravarijantne koordinate vektora $\vec{u}$</u>: $u^s = \vec{u} \cdot \vec{g}^s$

b) u recipročnom koordinatnom bazisu: $\vec{u} = u_s\vec{g}^s$, gde su <u>u_s kovarijantne koordinate vektora $\vec{u}$</u>: $u_s = \vec{u} \cdot \vec{g}_s$

Između veličina u_s i u^s postoji veza: $u^s = g^{sp}u_p$ i $u_s = g_{sp}u^p$

(Veličine g^{pr} i g_{pr} služe za podizanje i spuštanje indeksa)

Intezitet vektora $\vec{u}$ je: $|\vec{u}|^2 = g_{sp}u^s u^p = g^{sp}u_s u_p = u^s u_s$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = g_{pr}u^p v^r = g^{pr}u_p v_r = u^p v_p$

<u>Vektor $\vec{g}_r$ u recipročnoj koordinatnoj bazi</u> je: $\vec{g}_r = g_{rs}\vec{g}^s$.

<u>Vektor $\vec{g}^r$ u osnovnoj koordinatnoj bazi</u> je: $\vec{g}^r = g^{rs}\vec{g}_s$.

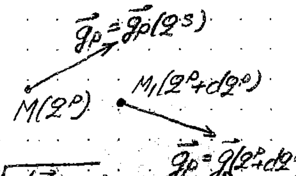
<u>Koeficijenti linearne povezanosti</u> $\Gamma_{pr,s}$ i Γ^s_{pr} kojima se uspostavlja veza između koordinatnih bazisa u dvema bliskim tačkama $M(q^p)$ i $M_1(q^p + dq^p)$ u Rimanovim prostorima su simetrični, tj. važi:

$\Gamma^s_{pr} = \Gamma^s_{rp}$ i $\Gamma_{pr,s} = \Gamma_{rp,s}$

i nazivaju se Kristofelovi simboli II vrste i Kristofelovi simboli I vrste, respektivno.

Veza između Γ^s_{pr} i $\Gamma_{pr,s}$ je: $\Gamma_{pr,s}=\Gamma^t_{pr}\, g_{ts}$ i $\Gamma^s_{pr}=\Gamma_{pr,t}\, g^{ts}$.

Prema definiciji veličine Γ^s_{pr} predstavljaju kontravarijantne koordinate vektora $\frac{\partial \vec g_s}{\partial q^r}=\frac{\partial^2 \vec r}{\partial q^r \partial q^s}$, a veličine $\Gamma_{pr,s}$ kovarijantne tog vektora:



$$\frac{\partial \vec g_s}{\partial q^r}=\Gamma_{sr}{}^{p}\,\vec g_p \quad i \quad \frac{\partial \vec g_s}{\partial q^r}=\Gamma_{sr,p}\,\vec g^p \Rightarrow \Gamma_{sr}{}^{p}=\frac{\partial \vec g_s}{\partial q^r}\cdot\vec g^p \quad i \quad \Gamma_{sr,p}=\frac{\partial \vec g_s}{\partial q^r}\cdot \vec g_p$$

$$\boxed{d\vec g_p\approx \vec g_p(M_1)-\vec g_p(M)} \qquad d\vec g_p=\frac{\partial \vec g_p}{\partial q^s}dq^s$$

Takođe važi: $\frac{\partial \vec g^p}{\partial q^r}=-\Gamma^p_{sr}\,\vec g^s \Rightarrow \Gamma^p_{sr}=\frac{\partial \vec g^p}{\partial q^r}\cdot\vec g_s$

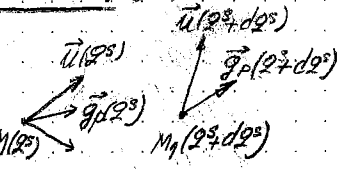
Kristofelov simbol I vrste u Rimanovim prostorima se može izraziti preko osnovnih metričkih koeficijenata: $\Gamma_{pr,s}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^p}+\frac{\partial g_{sp}}{\partial q^r}-\frac{\partial g_{pr}}{\partial q^s}\right)$.

Rimanovi prostori, kako oni kvazi (prostori R_H koji su u suštini euklidski prostori E_H, jer u njima postoje pravolinijske koordinate), tako i oni pravi (R_n prostori); su prostori bez torzije zbog toga što su veličine Γ^s_{pr} i $\Gamma_{pr,s}$ simetrične veličine. To znači da je u njima moguće konstruisati zatvoreni elementarni paralelogram ($\Gamma_{pr,s}=\Gamma_{rp,s}$ i $\Gamma^s_{pr}=\Gamma^s_{rp}$)

Kovarijantni ili totalni diferencijal kontravarijantnog vektora u^p, Du^p, predstavlja diferencijalnu promenu tog vektora pri njegovom premeštanju iz tačke $M(q^p)$ u tačku $M_1(q^p+dq^p)$:

$$Du^p=du^p+\Gamma^p_{rs}\,u^r dq^s \Rightarrow Du^p=\left(\frac{\partial u^p}{\partial q^s}+\Gamma^p_{rs}\,u^r\right)dq^s\Rightarrow \boxed{Du^p=\nabla_s u^p\, dq^s},$$

gde je: $\nabla_s u^p=\frac{\partial u^p}{\partial q^s}+\Gamma^p_{sr}\,u^r$ – kovarijantni izvod vektora u^p



To znači da je:

$d\vec u\approx u^p(q^s+dq^s)\,\vec g_p(q^s+dq^s)-u^p(q^s)\,\vec g_p(q^s)\Rightarrow d\vec u=(Du^p)\,\vec g_p$

i $Du^p=d\vec u\cdot\vec g^p$ – kontravarijantne koordinate vektora $d\vec u$ u koordinatnoj bazi u tački $M(q^p)$ $\Rightarrow$ $d\vec u=Du^p\,\vec g_p$

Kovarijantni (totalni) diferencijal i kovarijantni izvod kovarijantnog vektora v_p su:

$$Dv_p=\nabla_s v_p\, dq^s \quad i \quad \nabla_s v_p=\frac{\partial v_p}{\partial q^s}-\Gamma^r_{ps}\,v_r \quad (Dv_p=d\vec v\cdot\vec g_p\Rightarrow d\vec v=Dv_p\,\vec g^p)$$

Kovarijantni (totalni) diferencijal i kovarijantni izvod osnovnog metričkog tenzora g_{pr} su jednaki nuli:

$$\nabla_p g_{rs}=\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^p}-\Gamma^q_{rp}\,g_{qs}-\Gamma^q_{sp}\,g_{qr}\Rightarrow \nabla_p g_{rs}=0\Rightarrow Dg_{rs}=\nabla_p g_{rs}=0\Rightarrow$$

$$\boxed{dG}=d(g_{rs}\,\vec g^r\vec g^s)=\boxed{(Dg_{rs})\,\vec g^r\vec g^s} \quad \boxed{dG=0} \quad (dG\approx G(q^p+dq^p)-G(q^p))$$

Ovo znači da je tenzor g_{pr} konstantan u odnosu na operacije kovarijantnog izvoda i kovarijantnog diferenciranja, pa je: $\boxed{\nabla_s v_p}=\nabla_s(g_{pr}v^r)=\boxed{g_{pr}\nabla_s v^r}$ i

$\boxed{\nabla_s u^p}=\nabla_s(g^{pr}u_r)\Rightarrow \nabla_s u^p=g^{pr}\nabla_s u_r$.

Vektori $\vec u$ u kvazi-Rimanovom prostoru R_H, kao i u pravom Rimanovom prostoru R_n, obrazuju polje paralelnih vektora, ako je: $Du^k=0\Rightarrow(\nabla_s u^k)dq^s=0\Rightarrow\nabla_s u^k=0$.

Promena intenziteta vektora $\vec u$ pri paralelnom pomeranju u Rimanovom prostoru jednaka je nuli: $\delta(g_{pr}u^pu^r)=\delta(u^pu_p)=0$.

Kovarijantni diferencijal stalne funkcije je jednak običnim diferencijalom te stalne funkcije

Pri opštoj, generalisanoj transformaciji kojom se sa generalisanih koordinata q^p u euklidskom, odnosno, kvazi – Rimanovom N-dimenzionalnom prostoru prevode u nove $\bar{q}^p$: $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$, $\det\left[\frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^r}\right] \neq 0$ i $q^p = q^p(\bar{q}^r)$, diferencijali koordinata se transformišu po formulama: $d\bar{q}^p = \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^r} dq^r$, odnosno, $dq^p = \frac{\partial q^p}{\partial \bar{q}^r} d\bar{q}^r$, (stare) dok se vektori osnovne i recipročne baze, $\vec{g}_p$ i $\vec{g}^p$, transformišu po formulama

$\vec{g}_p = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^p} \Rightarrow \vec{\bar{g}}_p = \frac{\partial q^r}{\partial \bar{q}^p} \vec{g}_r$ (obrnuto od formule za $d\bar{q}^p$) i

$\vec{g}^p \cdot \vec{g}_r = \delta^p_r \Rightarrow \vec{\bar{g}}^p = \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^r} \vec{g}^r$ (isto kao i $d\bar{q}^p$)

Transformacione formule za odgovarajuće metričke koeficijente g_{pr} i g^{pr} su:

$$\bar{g}_{pr} = g_{st} \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^p} \frac{\partial q^t}{\partial \bar{q}^r} \quad i \quad \bar{g}^{pr} = g^{st} \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^s} \frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^t},$$

pa ~~se~~ zbog toga ove veličine predstavljaju dva puta kovarijantne, odnosno, dva puta kontravarijantne koordinate metričkog tenzora $\boldsymbol{G}$ (tenzora drugog reda)

$\boldsymbol{G} = g_{pr} \vec{g}^p \vec{g}^r = g^{pr} \vec{g}_p \vec{g}_r$, gde su $\vec{g}_p \vec{g}_r$ i $\vec{g}^p \vec{g}^r$ dijade baznih vektora koordinata q^p. (pored ovih dijada mogu se posmatrati i dijade $\vec{g}_p \vec{g}^r$ i $\vec{g}_p \vec{g}^r$ koje su jednom kovarijante i jednom kontravarijante; u tim dijadama metrički tenzor je: $\boldsymbol{G} = g^p_r \vec{g}_p \vec{g}^r = g_p^r \vec{g}^p \vec{g}_r$, gde su mešovite koordinate tog tenzora: $g_p^r = g_{ps} g^{sr} = \delta_p^r$ i $g^p_r = g^{ps} g_{sr} = \delta^p_r$)

Transformacione formule za kontravarijantne u^p i kovarijantne vektora, $\vec{u} = u^p \vec{g}_p = u_p \vec{g}^p$, su:

$\bar{u}^p = u^s \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^s}$ i $\bar{u}_p = u^s \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^p}$,

pa se vektori mogu smatrati tenzorima prvog reda, a u^k kontravarijante koordinate tog tenzora, i u_k kovarijantne koordinate tog tenzora.

Transformacione formule mešovitih koordinata nekog tenzora trećeg reda, npr., 2 puta kovarijantnih i jednom kontravarijantnih koordina. $T_{pr}{}^{s}$ glasile bi:

$$\bar{T}_{pr}{}^{s} = T_{ab}{}^{c} \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^p} \frac{\partial q^b}{\partial \bar{q}^r} \frac{\partial \bar{q}^s}{\partial q^c}. \quad (\boldsymbol{T} = T_{pr}{}^{s} \vec{g}^p \vec{g}^r \vec{g}_s)$$

Transformacione formule Kristofelovih simbola druge vrste, Γ_{pr}^{s}, su:

$$\bar{\Gamma}_{pr}^{s} = \Gamma_{ab}^{c} \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^p} \frac{\partial q^b}{\partial \bar{q}^r} \frac{\partial \bar{q}^s}{\partial q^c} + \frac{\partial \bar{q}^s}{\partial q^c} \frac{\partial^2 q^c}{\partial \bar{q}^p \partial \bar{q}^r}$$

i ne predstavljaju koordinate nekog tenzora trećeg reda.

U Dekartovim koordinatama, tj. u odnosu na transformaciju $q^p = q^p(\xi^p)$ je:

$\vec{g}_p = \frac{\partial \xi^s}{\partial q^p} \vec{i}_s$, $\vec{g}^p = \frac{\partial q^p}{\partial \xi^s} \vec{i}^s$;

$g_{pr} = \delta_{st} \frac{\partial \xi^s}{\partial q^p} \frac{\partial \xi^t}{\partial q^r}$, $g^{pr} = \delta^{st} \frac{\partial q^p}{\partial \xi^s} \frac{\partial q^r}{\partial \xi^t}$;

i $\Gamma_{pr,s} = \delta_{uv} \frac{\partial^2 \xi^u}{\partial q^p \partial q^r} \frac{\partial \xi^v}{\partial q^s}$ i $\Gamma_{pr}^{t} = \delta_u^v \frac{\partial^2 \xi^u}{\partial q^p \partial q^r} \frac{\partial q^t}{\partial \xi^v} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^u}{\partial q^p \partial q^r} = \Gamma_{pr}^{t} \frac{\partial \xi^u}{\partial q^t}$

Napomena.-

Tenzorske veličine.- U afinom metričkom prostoru od N dimenzija u kome su uvedene generalisane koordinate q^p (u specijalnom slučaju pravolinijske koordinate x^p), definisani su vektori osnovne baze $\vec{g}_p$, odnosno recipročne baze $\vec{g}^p$ ($\vec{g}^p \cdot \vec{g}_r = \delta^p_r$) u svakoj tački uočenog prostora, koji se pri opštoj transformaciji koordinata $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$ za koju postoji inverzna transformacija $q^p = q^p(\bar{q}^r)$, transformišu po napred navedenim formulama:

$$\vec{\bar{g}}^p = \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^r}\vec{g}_r \quad i \quad \vec{\bar{g}}_p = \frac{\partial q^r}{\partial \bar{q}^p}\vec{g}_r.$$

Polje vektora $\vec{u} = \vec{u}(q^p)$ u posmatranom afinom metričkom prostoru u bilo kojoj tački $M(q^p)$ tog prostora, može se, kao što je pokazano, predstaviti kao zbir komponenata u pravcima osa definisanih osnovnim, odnosno, recipročnih baznih vektora: $\vec{u} = u^p\vec{g}_p = u_s\vec{g}^s$, gde su u_s kovarijantne, a u^s kontravarijantne koordinate tog vektora. Pošto se pri uvedenoj opštoj transformaciji koordinata $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$ veličine u^p i u_s transformišu po formulama: $\bar{u}^s = \frac{\partial \bar{q}^s}{\partial q^r}u^r$ (kontra u odnosu na transformaciju vektora $\vec{g}_s$) i $\bar{u}_s = \frac{\partial q^r}{\partial \bar{q}^s}u_r$ (kao vektori $\vec{g}_s$), vektor $\vec{u}$ predstavlja geometrijski objekat koji se naziva <u>tenzor prvog reda</u>.

Od baznih vektora $\vec{g}_p$ i $\vec{g}^s$ moguće je njihovim tenzorskim množenjem u posmatranom prostoru nove bazne objekte koje se nazivaju <u>diade, triade</u>,... <u>Tenzorski proizvod</u> dva vektora podrazumeva da se ta dva vektora postave jedan pored drugog bez ikakvog znaka između njih, pri čemu je bitan redosled postavljanja tih vektora u diadu, tj. za tenzorski proizvod vektora ne važi zakon komutacije. Od baznih vektora $\vec{g}_p$ i $\vec{g}^s$ moguće je formirati 4 tipa diada: $\vec{g}_p\vec{g}_s$ (2 puta kovarijantne diade), $\vec{g}^p\vec{g}^s$ (2 puta kontravarijantne baze), $\vec{g}_p\vec{g}^s$ i $\vec{g}^p\vec{g}_s$ (mešovite dijade: jedanput kovarijantne i jedanput kontravarijantne dijade), $p, s = 1, 2 \dots N$. Takođe, pošto je broj dijada svakog navedenog tipa N^2, to se pomoću njih, kao baznih objekata, mogu predstaviti geometrijski apstrakne N^2-dimenzionalne veličine $\mathbf{T}$ afinog metričkog prostora:

$$\mathbf{T} = T^{ps}\vec{g}_p\vec{g}_s = T_{ps}\vec{g}^p\vec{g}^s = T_p^{\cdot s}\vec{g}^p\vec{g}_s = T^{p}_{\cdot s}\vec{g}_p\vec{g}^s.$$

Gornji izraz pokazuje da se veličina $\mathbf{T}$, kao linearna kombinacija diada određenog tipa, može predstaviti na 4 načina, pri čemu skalari u svakoj takvoj linearnoj kombinaciji predstavljaju odgovarajuće dvoindeksne koordinate veličine $\mathbf{T}$. Tako su:

T^{ps} – dva puta kontravarijantne koordinate veličine $\mathbf{T}$ drugog reda; $\mathbf{T} = \{T^{ps}\}$

$T^{ps} = \vec{g}^p \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{g}^s$ $\left(T^{ps} = \vec{g}^p \cdot T^{rt}\vec{g}_r\vec{g}_t \cdot \vec{g}^s \Rightarrow T^{ps} = T^{rt}(\vec{g}^p \cdot \vec{g}_r\vec{g}_t \cdot \vec{g}^s) = T^{rt}\delta^p_r\delta^s_t\right)$,

T_{ps} – dva puta kovarijantne koordinate veličine $\mathbf{T}$ drugog reda; $\mathbf{T} = \{T_{ps}\}$

$T_{ps} = \vec{g}_p \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{g}_s$ $\left(T_{ps} = \vec{g}_p \cdot T_{rt}\vec{g}^r\vec{g}^t \cdot \vec{g}_s \Rightarrow T_{ps} = T_{rt}(\vec{g}_p \cdot \vec{g}^r\vec{g}^t \cdot \vec{g}_s) = T_{rt}\delta^r_p\delta^t_s\right)$;

$T_p^{\cdot s} = \vec{g}_p \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{g}^s$ i $T^p_{\cdot s} = \vec{g}^p \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{g}_s$ – mešovite koordinate veličine $\mathbf{T}$ drugog reda, jedan put kovarijantne i jedan put kontravarijantne koordinate, u kojima se tačkom iznad ili ispod odgovarajućeg indeksa označava da je taj indeks prvi ($T_p^{\cdot s}$, indeks p prvi; $T^s_{\cdot p}$, indeks s prvi). U slučajevima kada redosled indeksa u mešovitim koordinatama nije od značaja ova tačka se ne piše ($\mathbf{T} = \{T_p^{\cdot s}\}$ i $\mathbf{T} = \{T^p_{\cdot s}\}$).

Ako se pri transformaciji koordinata $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$, odnosno $q^p = q^p(\bar{q}^r)$ koordinate veličine

$\mathbf{T}$ transformišu po formulama:

$$\overline{T}^{ps} = \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^a}\frac{\partial \bar{q}^s}{\partial q^b} T^{ab}; \quad \overline{T}_{ps} = \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^p}\frac{\partial q^b}{\partial \bar{q}^s} T_{ab}; \quad \overline{T}_p^{\cdot s} = \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^p}\frac{\partial \bar{q}^s}{\partial q^b} T_a^{\cdot b} \text{ i } \overline{T}^p_{\cdot s} = \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^a}\frac{\partial q^b}{\partial \bar{q}^s} T^a_{\cdot b}$$

onda veličina predstavlja tenzor drugog reda u posmatranom prostoru, a veličine $T_{ps}, T^{ps}, T_p^{\cdot s}, T^p_{\cdot s}$ su tada koordinate tog tenzora. Primer tenzora drugog reda u afinom metričkom prostoru je metrički tenzor $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G} = g_{pr}\vec{g}^p\vec{g}^r = g^{st}\vec{g}_s\vec{g}_t = g^p_{\cdot s}\vec{g}_p\vec{g}^s = g_p^{\cdot s}\vec{g}^p\vec{g}_s,$$

koji je simetričan: $g_{ps} = g_{sp}$, $g^{ps} = g^{sp}$, $g_p^{\cdot s} = g_s^{\cdot p} = \delta_p^s$.

Metrički tenzor predstavlja osnovni tenzor posmatranog prostora, jer se pomoću njega kao simetričnog tenzora koji je kovarijantno konstantan (u svim tačkama prostora posmatrana veličina je stacionarna, tj. njeni kovarijantni izvodi u svim tačkama prostora su jednaki nuli) može menjati valentnost drugih tenzorskih veličina:

$$g_{ps}T^{st} = T_p^{\cdot t}, \quad g^{ps}T_{st} = T^p_{\cdot t}; \quad g^{ps}T_p^{\cdot t} = T^{st}, \quad g_{pt}T_s^{\cdot t} = T_{sp} \ldots$$

Sve tenzorske veličine koje se dobijaju iz jedne date dizanjem i spuštanjem indeksa pomoću osnovnog tenzora koji u opštem slučaju ne mora biti metrički nazivaju se <u>veličine asocirane sa datom.</u>

Simetričan deo nekog objekta T_{pr} je: $T_{(pr)} = \frac{1}{2}(T_{pr} + T_{rp})$

Antisimetričan deo nekog objekta T_{pr} je: $T_{[pr]} = \frac{1}{2}(T_{pr} - T_{rp})$

$\Rightarrow T_{pr} = T_{(pr)} + T_{[pr]}$

Analogno, prethodom, od baznih vektora $\vec{g}_p$ i $\vec{g}^p$ mogu se njihovim uzastopnim tenzorskim množenjem formirati bazni objekti višeg reda; ~~triade, odnosno~~ poliade, a pomoću njih je moguće predstaviti N^k-dimenzionalne geometrijske objekte $\mathbf{V}$ ($k=3,4\ldots$) kao linearna kombinacija k dimenzionalnih poliada, čiji koeficijenti predstavljaju k-dimenzionalne kovarijantne, kontravarijantne i mešovite koordinate geometrijskog objekta $\mathbf{V}$ u „pravcima" uočenih poliada. Broj načina predstavljanja N^k-dimenzionalnolnog geometrijskog objekta $\mathbf{V}$ s obzirom na tipove poliada je 2^k.

Za $k=3$ poliade baznih vektora, tj. triade, u N-dimenzionalnom prostoru mogu biti:

$$\vec{g}_p\vec{g}_r\vec{g}_s,\ \vec{g}_p\vec{g}_r\vec{g}^s,\ \vec{g}_p\vec{g}^r\vec{g}_s,\ \vec{g}^p\vec{g}_r\vec{g}_s,\ \vec{g}_p\vec{g}^r\vec{g}^s,\ \vec{g}^p\vec{g}_r\vec{g}^s,\ \vec{g}^p\vec{g}^r\vec{g}_s,\ \vec{g}^p\vec{g}^r\vec{g}^r$$

dakle, njih $2^3=8$, pa se N^3 dimenzionalni geometrijski objekat $\mathbf{V}$ može takođe predstaviti na $2^3=8$ načina:

$$\mathbf{V} = V^{prs}\vec{g}_p\vec{g}_r\vec{g}_s = V^{pr}_{\cdot\cdot s}\vec{g}_p\vec{g}_r\vec{g}^s = V^{p\cdot s}_{\cdot r}\vec{g}_p\vec{g}^r\vec{g}_s = V_p^{\cdot rs}\vec{g}^p\vec{g}_r\vec{g}_s = \ldots = V_{prs}\vec{g}^p\vec{g}^r\vec{g}^s.$$

Ako se pri transformaciji generalisanih koordinata $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$, odnosno, $q^p = q^p(\bar{q}^r)$, koordinate veličine $\mathbf{V}$ transformišu po formulama:

$$\overline{V}^{prs} = \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^a}\frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^b}\frac{\partial \bar{q}^s}{\partial q^c} V^{abc}, \quad \overline{V}^{pr}_{\cdot\cdot s} = \frac{\partial \bar{q}^p}{\partial q^a}\frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^b}\frac{\partial q^c}{\partial \bar{q}^s} V^{ab}_{\cdot\cdot c}, \ldots, \overline{V}_{prs} = \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^p}\frac{\partial q^b}{\partial \bar{q}^r}\frac{\partial q^c}{\partial \bar{q}^s} V_{abc},$$

onda veličina $\mathbf{V}$ predstavlja tenzor III reda. ($p, q, r, a, b, c = 1, 2, \ldots N$)

Tenzor nultog reda u afinom metričkom prostoru je skalarna funkcija $\varphi = \varphi(q^p)$, s obzirom da se ona pri transformaciji koordinata $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$, odnosno, $q^p = q^p(\bar{q}^r)$ ponaša kao invarijanta: $\bar{\varphi}(\bar{q}^p) = \varphi[q^r = q^r(\bar{q}^p)]$. (funkcija $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\bar{q}^p)$ u opštem slučaju ima drugačiji oblik od funkcije $\varphi = \varphi(\bar{q}^p)$, ali je vrednost funkcije $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\bar{q}^p)$ u tački $M(\bar{q}^p)$ jednaka vrednosti funkcije $\varphi = \varphi(q^p)$ u toj tački $M(q^p)$).

Napomena. – Pri transformaciji koordinata $\bar{q}^p = \bar{q}^p(q^r)$, odnosno, $q^p = q^p(\bar{q}^r)$, tenzori, kao višedimenzionalni objekti, se ne menjaju, tj. invarijantni su u odnosu na transformacije koordinata ($\vec{u} = \vec{\bar{u}}$, $\mathbf{T} = \overline{\mathbf{T}}$), što ima za posledicu navedene transformacione formule njihovih koordinata.

Paralelno pomeranje. - Neka je data kriva: $q^p=q^p(t)$, $p=1,2,..,N$, i neki vektor $\vec{v}=v^s(q^p)\vec{g}_s$. Koji uslov moraju da zadovolje koordinate $v^s=v^s(q^p)$ uočenog vektora, ako su vektori u svim tačkama krive paralelni i jednakih intenziteta?
U odnosu na Dekartov koordinatni sistem koordinata ξ^p, koordinate uočenog vektora su V^p, tj.: $\vec{v}=V^p\vec{i}_p$, a traženi uslov glasi: $dV^p/dt=0$.
S obzirom na transformacije koordinata $\xi^p=\xi^p(q^s)$ veza između V^p i v^p je:
$V^p=v^s\dfrac{\partial\xi^p}{\partial q^s} \Rightarrow \vec{v}=V^p\vec{i}_p=v^s\dfrac{\xi^s}{\partial q^p}\vec{i}_p$, pa uslov $dV^p/dt=0$ postaje:

$$\frac{dV^p}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v^s\frac{\partial\xi^p}{\partial q^s}\right)=0 \Rightarrow \frac{dv^p}{dt}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^p}+v^p\frac{\partial^2\xi^s}{\partial q^r\partial q^p}\dot{q}^r=0.$$

Kako je: $\Gamma^t_{rp}=\dfrac{\partial q^t}{\partial\xi^u}\dfrac{\partial^2\xi^u}{\partial q^r\partial q^p} \Rightarrow \dfrac{\partial^2\xi^u}{\partial q^r\partial q^p}=\Gamma^t_{rp}\cdot\dfrac{\partial\xi^u}{\partial q^t}$, to gornja jednačina dobija oblik: $\dfrac{dv^p}{dt}\dfrac{\partial\xi^s}{\partial q^p}+v^p\Gamma^t_{rp}\dfrac{\partial\xi^s}{\partial q^t}\dot{q}^r=0$. Njenim množenjem sa $g^{nm}\dfrac{\partial\xi^s}{\partial q^m}$ i sabiranjem svih tako dobijenih jednačina po indeksu s dobiće se:

$$\frac{dv^p}{dt}g^{nm}\sum_s\frac{\partial\xi^s}{\partial q^p}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^m}+v^p\dot{q}^r\Gamma^t_{rp}g^{nm}\sum_s\frac{\partial\xi^s}{\partial q^t}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^m}=0,$$

gde je: $g_{pm}=\sum_s\dfrac{\partial\xi^s}{\partial q^p}\dfrac{\partial\xi^s}{\partial q^m}$ i $g_{tm}=\sum_s\dfrac{\partial\xi^s}{\partial q^t}\dfrac{\partial\xi^s}{\partial q^m}$,
što, posle sređivanja, konačno daje:

$$\boxed{\frac{dv^s}{dt}+\Gamma^s_{rp}v^p\dot{q}^r=0}, \text{ odnosno } \boxed{\frac{Dv^s}{Dt}=0}$$

Veličine $\dot{q}^r$, $r=1,2,..N$, ima pravac tangente na krivu $q^r=q^r(t)$ koji određuje pravac krive u posmatranoj tački krive. Ako je jednačina krive C duž koje se vrši paralelno pomeranje vektora $\vec{v}$ data u obliku: $q^p=q^p(s)$, gde je s lučna koordinata tačke na krivoj merena duž krive, uslov paralelizma polja vektora $\vec{u}=\vec{u}(q^p)$ duž krive dobija oblik: $\dfrac{Dv^p}{Ds}=0 \Rightarrow \dfrac{dv^p}{ds}+\Gamma^p_{rs}v^r\dfrac{dq^s}{ds}=0. \Rightarrow \boxed{\nabla_r v^p\dfrac{dq^r}{ds}=0}$.
Prema poslednjoj jednačini sledi da se vektor $\vec{v}$ paralelno pomera duž neke krive ako mu je izvod u pravcu te krive u svakoj tački krive jednak nuli.
Za kovarijantne koordinate v_s vektora $\vec{v}$ uslov paralelnog pomeranja tog vektora duž krive C ima oblik:

$$\nabla_r v_p\frac{dq^r}{ds}=0 \Rightarrow \frac{dv_p}{dt}-\Gamma^r_{ps}v_r\frac{dq^s}{ds}=0$$

Pri paralelnom pomeranju vektora $\vec{v}$ duž krive C, intenzitet vektora $\vec{v}$ se ne menja, tj. konstantan je, jer važi:

$$\frac{dv^2}{ds}=\frac{d}{ds}(v^r v_r)=(\nabla_p(v^r v_r))\frac{dq^p}{ds}=\left(\nabla_p v^r\frac{dq^p}{ds}\right)v_r+\left(\nabla_p v_r\frac{dq^p}{ds}\right)v^r \Rightarrow$$

$$\frac{dv^2}{ds}=\frac{Dv^r}{Ds}v_r+\frac{Dv_r}{Ds}v^r\equiv 0$$

Paralelno pomeranje u pravim Rimanovim prostorima se definiše isključivo duž krivih linija.
Paralelizam definisan u jednom prostoru ne povlači uvek i paralelizam u odnosu na neki drugi prostor, pa makar i jedan bio smešten u onom drugom.

<u>Geodezijska linija.</u> – Neka je data kriva C u prostoru generalisanih koordinata ϱ^p:

$C: \varrho^p = \varrho^p(s)$, $p = 1, 2, \ldots N$ $\quad (\xi^p = \xi^p(s) \Rightarrow \varrho^r(s) = \varrho^r[\xi^p(s)]$.

Jedinični vektor tangente $\vec{T}$ na krivu u tački M je: $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$, gde je s lučna koordinata, a $d\vec{r} = d\varrho^p \vec{g}_p$, tako da je:

$$\vec{T} = \frac{d\varrho^p}{ds} \vec{g}_p.$$

Veličine $\frac{d\varrho^p}{ds}$ su kontravarijantne koordinate vektora $\vec{T}$ u osnovnoj koordinatnoj bazi $\vec{g}_p$ postavljenoj u tački M krive čiji je vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}[\varrho(s)]$. Kriva duž koje se jedinični vektor njene tangente $\vec{T} = \vec{T}(s)$ uvek paralelno pomera zove se geodezijska linija. Jednačina ove krive se dobija iz uslova da je:

$\frac{DT^p}{Ds} = 0 \Rightarrow (\nabla_r T^p) \frac{d\varrho^r}{ds} = 0$, tako da je: $\frac{dT^p}{ds} + \Gamma^p_{rt} T^r \frac{d\varrho^t}{ds} = 0$, odnosno

$$\boxed{\frac{d^2\varrho^p}{ds^2} + \Gamma^p_{rt} \frac{d\varrho^r}{ds} \frac{d\varrho^t}{ds} = 0}$$

Gornji sistem jednačina predstavlja u celini diferencijalnu jednačinu geodezijske linije. Svaki vektor koji se paralelno pomera duž neke geodezijske linije mora biti nagnut pod konstantnim uglom prema toj krivoj u svakoj njenoj tački. U euklidskom, i kvazi Rimanovom, prostoru geodezijske linije su prave linije. U takvom prostoru postoji sistem pravouglih Dekartovih koordinata. Kako su u odnosu na te koordinate Kristofelovi simboli jednaki nuli, to jednačine geodezijske linije imaju oblik: $\frac{d^2\xi^p}{ds^2} = 0$. Iz ove jednačine sledi: $\frac{d\xi^p}{ds} = C_1^p$, gde su C_1^p konstante koje, kao koordinate jediničnog vektora $\frac{d\vec{r}}{ds} = \left\{\frac{d\xi^p}{ds}\right\}$, zadovoljavaju uslov: $\sum_p (C_1^p)^2 = 1$. Dakle, u euklidskom prostoru u širem smislu geodezijske linije su date jednačinom: $\xi^p = C_1^p s + C_2^p$ i predstavljaju <u>generalisane prave linije</u>. Generalisane prave linije na površi kružnog cilindra su prave linije, ali su to i kružnice koje su upravne na izvodnice (generatrise) cilindra. Takođe, kao što duži, segmenti prave linije (geodezijske linije) u običnim prostorima, predstavljaju najkraće rastojanje između dve tačke, to u širem smislu, u Rimanovim prostorima, geodezijske linije predstavljaju krive linije na kojima rastojanje između dve tačke prostora ima stacionarnu dužinu, najmanju ili najveću. (u Rimanovom prostoru od dve dimenzije oblika sferne površi nema pravih linija)

Rimanov prostor R_n.-

Euklidski N-dimenzionalan prostor (E_N) ostaje euklidski i onda kada se sa Dekartovih koordinata ξ^p uvedu generalisane koordinate q^p, $p=1,\ldots N$, iako osnovna metrička forma više nije zbir kvadrata diferencijala Dekartovih koordinata, $d\xi^p$, već homogena kvadratna forma diferencijala generalisanih koordinata dq^p.
Ako su, međutim, Dekartove koordinate ξ^p funkcije od $n(n<N)$ međusobno nezavisnih parametara q^i; $i,j,k=1,2,\ldots n$:
$\xi^p=\xi^p(q^i)$, $\operatorname{rang}\left[\partial\xi^p/\partial q^i\right]^{N\times n}=n$, $p=1,2,\ldots,N$ i $i=1,2,\ldots n$
onda sistem gornjih jednačina predstavlja jednačine n-dimenzionalnog potprostora polaznog euklidskog prostora od N dimenzija (E_N). Ovaj potprostor je pravi Rimanov prostor od n dimenzija (R_n). Za prostor R_n se kaže da je potopljen u E_N, pa je prostor E_N obvojni prostor za prostor R_n.
Kako je: $d\xi^p=\dfrac{\partial\xi^p}{\partial q^i}dq^i$, to je osnovna metrička forma prostora R_n:
$ds^2=\delta_{pr}\dfrac{\partial\xi^p}{\partial q^i}\dfrac{\partial\xi^r}{\partial q^j}dq^i dq^j$, odnosno, $ds^2=g_{ij}dq^i dq^j$, gde su: $\boxed{g_{ij}}=\delta_{pr}\dfrac{\partial\xi^p}{\partial q^i}\dfrac{\partial\xi^r}{\partial q^j}$,
$g_{ij}=g_{ij}(q^k)$ kovarijantne koordinate metričkog tenzora prostora R_n
Postavlja se pitanje: da li u potprostoru R_n postoje takve koordinate u kojima se osnovna metrička forma prostora R_n može izraziti kao zbir kvadrata njihovih difencijalnih promena?
Lako je pokazati da na kružnom cilindru (cilindričnoj površi) poluprečnika $\varsigma=1$, kao potprostoru prostora E_3, osnovna metrička forma u polarnim koordinatama (ς,θ,z) glasi: $ds^2=dz^2+d\theta^2$, što znači da je ona formalno ista kao i metrika u ravni: $ds^2=dx^2+dy^2$, gde su x i y Dekartove koordinate u ravni. To znači da sa unutrašnjeg gledišta nema razlike između površi cilindra i ravni, dok je ta razlika očigledna ako se te površi posmatraju iz obvojnog prostora. Razlog za to leži u činjenici da koordinate θ i z na cilindričnoj površi nisu obe pravolinijske (imaju različite dimenzije), kao što su to koordinate x i y u ravni (imaju iste dimenzije). Cilindrična površ u E_3 je euklidski prostor E_2, jer su polarne koordinate z i θ na cilindričnoj površi, iako krivolinijske, zbog oblika osnovne metričke forme, koordinate euklidskog tipa - euklidske koordinate.
Na sfernoj površi poluprečnika $r=1$, kao potprostoru prostora E_3, osnovna metrička forma u sfernim koordinatama (r,φ,θ) ima oblik: $ds^2=d\varphi^2+d\theta^2\cos^2\varphi$. U ovom slučaju nemoguće je naći takve realne, međusobno nezavisne parametre u i v u kojima bi osnovna metrička forma imala oblik: $ds^2=C_1du^2+C_2dv^2$, C_1 i C_2 - konstante. U poređenju sa ravni i cilindričnom površi, sfera ima drugičije unutrašnje osobine od njihovih. Površ sfere, dakle, nema unutrašnju euklidsku metriku, pa ona u E_3 predstavlja prostor R_2.
Dakle, u euklidskom prostoru postoje neki njegovi potprostori čija metrika nije euklidska, što ukazuje na nove metričke prostore, pri čemu metrička forma ostaje pozitivno definitna.
Drugi problem koji treba razmotriti je problem smeštanja prostora R_n čiji su metrički koeficijenti g_{ij}, njih $\frac{1}{2}n(n+1)$, različitih ($g_{ij}=g_{ji}$; broj članova na glavnoj dijagonali matrice $[g_{ij}]^{n\times n}$ plus broj članova u gornjem, odnosno, donjem trouglu ove matrice),

u odgovarajući E_N. To znači da se iz sistema od $\frac{1}{2}n(n+1)$ jednačine

$$g_{ij} = \delta_{sp}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^p}{\partial q^j} \Rightarrow g_{ij} = \sum_{p=1}^{N}\frac{\partial\xi^p}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^p}{\partial q^j},$$

može odrediti $N=\frac{1}{2}n(n+1)$ funkcija $\xi^p=\xi^p(q^i)$, $p=1,\dots,N$, što ima za posledicu da se prostor R_n može smestiti u E_N, gde je $N=\frac{1}{2}n(n+1)$.

Koordinatni sistem generalisanih koordinata q^i prostora R_n, u tački $M(q^i)$ koja se istovremeno nalazi i u E_N: $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\xi^p(q^i)\vec{i}_p \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}(q^i)$, gradi se na isti način kao i koordinatni sistem generalisanih koordinata q^p prostora E_N u bilo kojoj tački tog prostora. On se sastoji od n koordinatnih linija koje se seku u tački $M(q^i)$, pri čemu svaka od tih linija predstavlja geometrijsko mesto tačaka prostora R_n koje imaju po jednu koordinatu različitu od odgovarajuće koordinate tačke M. Vektori tangentni na koordinatne linije u tački M, $\vec{g}_i=\partial\vec{r}/\partial q^i$, su osnovni bazni vektori koordinatnog sistema generalisanih koordinata u tački $M(q^i)$. Recipročni bazni vektori, $\vec{g}^i$, određeni su relacijom: $\vec{g}^i\cdot\vec{g}_j=\delta^i_j$. Kovarijantne i kontravarijantne koordinate metričkog tenzora u okolini tačke $M(q^i)$ su:

$$g_{ij}=\vec{g}_i\cdot\vec{g}_j,\quad g^{ij}=\vec{g}^i\cdot\vec{g}^j \quad i \quad [g^{ij}]=[g_{ij}]^{-1} \Rightarrow g_{ij}g^{jk}=\delta^i_k \quad i \quad g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$$

Koeficijenti linearne povezanosti baziso u dvesusedne tačke prostora R_n, tj. Kristofelovi simboli II i I vrste su:

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right),\quad \Gamma^j_{ik}=\Gamma_{ik,\ell}\,g^{\ell j},\quad \Gamma_{ik,j}=\Gamma^{\ell}_{ik}\,g_{\ell j},$$

$$\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ji,k},\quad \Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$$

Vektor $\vec{u}$ koji pripada prostoru R_n, tj. afinom tangentnom prostoru prostora R_n (geometrijski pojam analogan pojmu tangentne ravni prostora R_2 u E_3), može se izraziti preko vektora osnovne, odnosno, recipročne baze u posmatranoj tački prostora R_n:

$$\vec{u}=u^i\vec{g}_i=u_i\vec{g}^i,\ \text{gde je: } u^i=g^{ij}u_j=\vec{u}\cdot\vec{g}^i \ \ i \ \ u_i=g_{ij}u^j=\vec{u}\cdot\vec{g}_i.$$

Svaki vektor prostora R_n je istovremeno i vektor obuhvatnog prostora E_N, ali obrnuto ne važi.

Jednačine prostora R_n koji je potopljen u E_N: $\xi^p=\xi^p(q^1,\dots,q^n)$, $\operatorname{rang}\left[\partial\xi^p/\partial q^i\right]^{N\times n}=n$, mogu se u E_N dati i u formi $d=N-n$ jednačina oblika: $F^{(\alpha)}(\xi^1,\dots,\xi^p,\dots,\xi^N)=0$, $\alpha=1,2,\dots,d$, gde svaka od tih jednačina predstavlja jednačinu hiperpovrši u E_N (indeks α nema tenzorsku prirodu i zato je stavljen u zagradu). Vektor $\vec{m}^{(\alpha)}$ upravan na hiperpovrš $F^{(\alpha)}(\xi^p)=0$ je: $\vec{m}^{(\alpha)}=\frac{1}{|\operatorname{grad}F^{(\alpha)}|}\operatorname{grad}F^{(\alpha)}$, tj. $\vec{m}^{(\alpha)}=\frac{1}{|\operatorname{grad}F^{(\alpha)}|}\left(\frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial\xi^p}\vec{i}^p\right)$; $\alpha=1,2,\dots,d$ $(|\vec{m}^{(\alpha)}|=1)$

Svi vektori $\vec{m}^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\dots,d$ su međusobno linearno nezavisni i određuju potprostor R_d prostora E_N koji je upravan na R_n, jer je svaki vektor $\vec{m}^{(\alpha)}$ upravan na vektore $\vec{g}_i$ koordinatne baze u posmatranoj tački prostora R_n, tj. važi:

$$\vec{m}^{(\alpha)}\cdot\vec{g}_i=\frac{1}{|\operatorname{grad}F^{(\alpha)}|}\left(\frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial\xi^p}\vec{i}^p\cdot\frac{\partial\xi^r}{\partial q^i}\vec{i}_r\right)\Rightarrow \vec{m}^{(\alpha)}\cdot\vec{g}_i=\frac{1}{|\operatorname{grad}F^{(\alpha)}|}\left(\frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial\xi^p}\frac{\partial\xi^p}{\partial q^i}\right)\Rightarrow \vec{m}^{(\alpha)}\cdot\vec{g}_i=0$$

$$\left(F^{(\alpha)}[\xi^p(q^i)]=0 \Rightarrow \frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial q^i}=0\right)$$

Iz jednačine, $\vec{g}_i \cdot \vec{m}^{(\alpha)} = 0$ dobija se da je: $\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial \varrho^k} \cdot \vec{m}^{(\alpha)} = -\vec{g}_i \cdot \frac{\partial \vec{m}^{(\alpha)}}{\partial \varrho^k}$, tj. da je $\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial \varrho^k} \cdot \vec{m}^{(\alpha)} \neq 0$.
To znači da vektor $\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial \varrho^k}$ ne leži u celini u afinom tangentnom prostoru na R_n u tački $M(\varrho^i)$, pa je: $\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial \varrho^k} = \Gamma^j_{ik} \vec{g}_j + \sum_{\alpha=1}^{d} h^{(\alpha)}_{ik} \vec{m}^{(\alpha)}$, gde prvi član $\Gamma^j_{ik} \vec{g}_j$ određuje unutrašnju geometriju prostora R_n u tački $M(\varrho^i)$ tog prostora, dok komponenta $\sum_{\alpha=1}^{d} h^{(\alpha)}_{ik} \vec{m}^{(\alpha)}$ u tački $M(\varrho^i)$ prostora R_n ne pripada prostoru R_n, već njegovom obvojnom prostoru $E_N = n+d$ i može se odrediti ukoliko se zna spoljašnja geometrija prostora E_{n+d} u okolini tačke $M(\varrho^i)$ prostora R_n. Veličine $h_{ik}^{(\alpha)}$ i $\vec{m}^{(\alpha)}$, dakle, određuju se u prostoru E_{n+d}, a u tačkama prostora R_n.
Na osnovu ovoga sledi da je diferencijalna promena polja kontravarijantnog vektora $\vec{u} = u^i \vec{g}_i$ prostora R_n u dvema bliskim tačkama $M(\varrho^i)$ i $M_1(\varrho^i + d\varrho^i)$ tog prostora.

$$d\vec{u} = d(u^k \vec{g}_k) = \left(\frac{\partial u^k}{\partial \varrho^i} + \Gamma^k_{ij} u^j\right) d\varrho^i \vec{g}_k + d\varrho^i u^k \left(\sum_{\alpha=1}^{d} h^{(\alpha)}_{ik} \vec{m}^{(\alpha)}\right),$$

Veličine:
$d\vec{u} \cdot \vec{g}^l = Du^l$; $Du^l = (\nabla_i u^l) d\varrho^i$, gde je $\nabla_i u^l = \frac{\partial u^l}{\partial \varrho^i} + \Gamma^l_{ik} u^k$ kovarijantni izvod vektora $\vec{u} = u^e \vec{g}_e$, predstavlja totalni (kovarijantni) diferencijal Du^l vektora $\vec{u} = u^e \vec{g}_e$. Vektor $Du^e \vec{g}_e$ je komponenta vektora $d\vec{u}$ u afinom tangentnom prostoru na R_n u tački $M(\varrho^i)$ tog prostora, dok je vektor $d\varrho^i u^k \left(\sum_{\alpha} h^{(\alpha)}_{ik} \vec{m}^{(\alpha)}\right)$ komponenta vektora $d\vec{u}$ u tački $M(\varrho^i)$ prostora R_n, ali u prostoru E_{n+d}.
Kovarijantni izvod vektora $\vec{u} = u_k \vec{g}^k$ je:

$$\nabla_i u_k = \nabla_i (g_{kj} u^j) = g_{kj} \nabla_i u^j \Rightarrow \nabla_i u_k = \frac{\partial u_k}{\partial \varrho^i} - \Gamma^j_{ki} u_j ,$$

pa je:
$Du_k = (\nabla_i u_k) d\varrho^i$ i $Du_k = d(u_i \vec{g}^i) \cdot \vec{g}_k$ u prostoru R_n.
Vektor $\vec{g}^k Du_k$ predstavlja komponentu vektora $d(u_k \vec{g}^k)$ u prostoru R_n. Pored ove komponente vektor $d(u_k \vec{g}^k)$ ima komponentu u obvojnom prostoru E_{n+d} u tački $M(\varrho^i)$ prostora R_n.

Riman Kristofelov tenzor. - Kovarijantni izvod nekog tenzora je opet tenzor, pa se može obrazovati drugi kovarijantni izvod. Ovaj postupak kovarijantnog diferenciranja može se nastaviti, u opštem slučaju, kada su funkcije diferencijabilne, neograničeni broj puta.
Posmatra se kovarijantni izvod nekog kovarijatnog vektora u_i: $\nabla_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial q^j} - \Gamma^r_{ij} u_r$.
Kovarijantni izvod tenzora $\nabla_j u_i$ biće:
$\nabla_k(\nabla_j u_i) = \frac{\partial}{\partial q^k}(\nabla_j u_i) - \nabla_j u_r \Gamma^r_{ik} - \nabla_r u_i \Gamma^r_{jk} \Rightarrow$
$$\boxed{\nabla_k(\nabla_j u_i)} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial u_r}{\partial q^k}\Gamma^r_{ij} - \frac{\partial u_r}{\partial q^j}\Gamma^r_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial q^r}\Gamma^r_{jk} - u_s\left[\frac{\partial}{\partial q^k}\Gamma^s_{ij} - \Gamma^s_{rj}\Gamma^r_{ik} - \Gamma^s_{ir}\Gamma^r_{jk}\right]$$
Ako se promeni red kovarijantnog diferenciranja i formira tenzor $\nabla_j(\nabla_k u_i)$, a zatim izvrši oduzimanje od ovog tenzora tenzor $\nabla_k(\nabla_j u_i)$ dobiće se:
$$\boxed{\nabla_k(\nabla_j u_i) - \nabla_j(\nabla_k u_i) = R^l{}_{ijk}\, u_l,}$$
gde je: $\boxed{R^l{}_{ijk}} = \frac{\partial}{\partial q^j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial q^k}\Gamma^l_{ij} + \Gamma^l_{rj}\Gamma^r_{ik} - \Gamma^l_{rk}\Gamma^r_{ij}$, tenzor 4-tog reda i to jednom kontravarijantan i tri puta kovarijantan, a zove se Riman-Kristofelov tenzor ili Rimanov simbol druge vrste.
Ako bi se gornji postupak sproveo nad kontravarijantnim koordinatama u^i vektora $\vec{u}$ dobilo bi se:
$$\boxed{\nabla_k(\nabla_j u^i) - \nabla_j(\nabla_k u^i) = -R^i{}_{ljk}\, u^l}, \quad -R^i{}_{ljk} = \frac{\partial}{\partial q^k}\Gamma^i_{jl} - \frac{\partial}{\partial q^j}\Gamma^i_{kl} + \Gamma^r_{jl}\Gamma^i_{kr} - \Gamma^r_{kl}\Gamma^i_{jr}$$

Riman-Kristofelov tenzor, dakle, karakteriše razlike između drugih kovarijantnih izvoda nekog vektora, datog bilo kovarijantnim bilo kontravarijantnim koordinatama, kad se ovi izvodi razlikuju samo redom diferenciranja ($\nabla_k \nabla_j \neq \nabla_j \nabla_k$)

Svojstva Riman-Kristofelovog tenzora su:
1.- antisimetričan u odnosu na poslednja dva indeksa: $R^l{}_{ijk} = -R^l{}_{ikj}$.
2.- zbir 3 tenzora dobijena cikličnim permutovanjem donjih indeksa jednak je nuli:
$R^l{}_{ijk} + R^l{}_{jki} + R^l{}_{kij} = 0$
3.- $\boxed{R_{lijk}} = g_{lm} R^m{}_{ijk} \Rightarrow \boxed{R_{lijk}} = \frac{\partial}{\partial q^j}[ik,l] - \frac{\partial}{\partial q^k}[ij,l] + \Gamma^m_{ij}[kl,m] - \Gamma^m_{ik}[jl,m]$ je kovarijantni Riman-Kristofelov tenzor ili Rimanov simbol prve vrste.

Svojstva tenzora R_{lijk} su:
1.- antisimetričnost u odnosu poslednja dva indeksa $R_{lijk} = -R_{likj}$
2.- $R_{lijk} + R_{ljki} + R_{lkij} = 0$
3.- antisimetričan u odnosu na prva dva indeksa: $R_{lijk} = -R_{iljk}$
4.- simetričan u odnosu na parove prva dva i poslednja dva indeksa:
$R_{lijk} = R_{jkli}$
Broj nezavisnih koordinata Riman-Kristofelovog tenzora R_{lijk} u prostoru od N dimenzija je: $\frac{1}{12}N^2(N^2-1)$
U svakom euklidskom prostoru Riman-Kristofelov tenzor identički je jednak nuli bez obzira na to u odnosu na koji se koordinatni sistem u tom prostoru posmatra. Ovo zato što je $\frac{\partial^2 u_i}{\partial q^j \partial q^k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial q^k \partial q^j}$, a svi Kristofelovi simboli su jednaki nuli.

U prostoru od 3 dimenzije i samo u tom prostoru, može se uspostaviti veza između kovarijantnog Riman-Kristofelovog tenzora R_{lijk} i nekog simetričnog dvostruko kovarijantnog tenzora S^{ij}: $S^{ij} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}R_{klmn}$, gde su ε^{ikl} i ε^{jmn} poznati ε tenzori;

Prostori kretanja slobodnih i vezanih materijalnih sistema

A) <u>Slobodni materijalni sistem</u>. - Neka je dat sistem N slobodnih tačaka M_ν, $\nu=1,2,\dots N$, masa m_ν. Položaj materijalnog sistema poznat je ukoliko je poznat položaj svake tačke M_ν tog sistema. Pošto se kretanje materijalnog sistema vrši u 3D-euklidskom (našem opažajnom) prostoru, položaj tog sistema u odnosu na DKS $Oxyz$ tog prostora biće određen sa N trojki Dekartovih koordina (x_ν, y_ν, z_ν) tačaka M_ν, $\nu=1,2,\dots N$. Ako se uvedu oznake: $\xi^{3\nu-2}=x_\nu$, $\xi^{3\nu-1}=y_\nu$ i $\xi^{3\nu}=z_\nu$, dobiće se skup skup od $3N$ nezavisnih parametara, kojim se na jednoznačan način može odrediti položaj materijalnog sistema u 3D-euklidskom prostoru. S druge strane, $3N$ međusobno nezavisnih parametara ξ^p $p=1,2,\dots,3N$ ukazuje na postojanje $3N$-dimenzionalnog euklidskog prostora E_{3N} i u njemu $3N$-dimenzionalnog Dekartovog koordinatnog sistema, u odnosu na koji uređena $3N$-torka vrednosti ovih parametara $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^p, \dots, \xi^{3N})$ predstavlja koordinate jedne tačke posmatranog E_{3N} prostora. Na ovaj način je svakoj konfiguraciji mat. sistema dodeljena jedna tačka prostora E_{3N}. To ima za posledicu da se kretanje posmatranog mat. sistema opisano jednačinama: $\xi^p=\xi^p(t)$, u E_3, može opisati kretanjem jedne tačke, tzv., reprezentativne tačke, u prostoru E_{3N}, a u odnosu na uvedeni $3N$ dimenzionalni Dekartov koordinatni sistem. Reprezentativna tačka je tačka jedinične mase, a njene koordinate ξ^p_R su: $\xi_R^{3\nu-2}=\sqrt{m_\nu}\,\xi^{3\nu-2}=\sqrt{m_\nu}\,x_\nu$, $\xi_R^{3\nu-1}=\sqrt{m_\nu}\,\xi^{3\nu-1}=\sqrt{m_\nu}\,y_\nu$ $\xi_R^{3\nu}=\sqrt{m_\nu}\,\xi^{3\nu}=\sqrt{m_\nu}\,z_\nu$, tako da je vektor položaja reprezentativne tačke u odnosu koordinatni početak:

$$\vec{r}=\sum_\nu \xi_R^{3\nu-2}\vec{i}_{3\nu-2}+\xi_R^{3\nu-1}\vec{i}_{3\nu-1}+\xi_R^{3\nu}\vec{i}_{3\nu}=\sum_\nu\sqrt{m_\nu}\left(\xi^{3\nu-2}\vec{i}_{3\nu-2}+\xi^{3\nu-1}\vec{i}_{3\nu-1}+\xi^{3\nu}\vec{i}_{3\nu}\right),\ \text{tj.}$$

$\vec{r}=\sum_\nu m_\nu\vec{r}_\nu$, gde je $\vec{r}_\nu=\xi^{3\nu-2}\vec{i}_{3\nu-2}+\xi^{3\nu-1}\vec{i}_{3\nu-1}+\xi^{3\nu}\vec{i}_{3\nu}$, vektor položaja tačke M_ν mat. sistema u E_{3N} u odnosu na koordinatni početak $3N$-dimenzionalnog DKS. Brzina $\vec{u}$ i ubrzanje reprezentativne tačke u E_{3N} su:

$$\vec{u}=\dot{\vec{r}}=\sum_\nu\sqrt{m_\nu}\left(\dot{\xi}^{3\nu-2}\vec{i}_{3\nu-2}+\dot{\xi}^{3\nu-1}\vec{i}_{3\nu-1}+\dot{\xi}^{3\nu}\vec{i}_{3\nu}\right)\Rightarrow\vec{u}=\sum_\nu\sqrt{m_\nu}\,\vec{v}_\nu$$

$$\text{i}\ \vec{W}=\dot{\vec{u}}=\sum_\nu\sqrt{m_\nu}\left(\ddot{\xi}^{3\nu-2}\vec{i}_{3\nu-2}+\ddot{\xi}^{3\nu-1}\vec{i}_{3\nu-1}+\ddot{\xi}^{3\nu}\vec{i}_{3\nu}\right)\Rightarrow\vec{W}=\sum_\nu\sqrt{m_\nu}\,\vec{a}_\nu,$$

gde su $\vec{v}_\nu$ i $\vec{a}_\nu$ vektori brzina i ubrzanja tačaka M_ν.

Ako su diferencijalne jednačine kretanja tačaka M_ν materijalnog sistema: $m_\nu\vec{a}_\nu=\vec{F}_\nu$, tj., $\sqrt{m_\nu}\,\vec{a}_\nu=\frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu$, gde je $\vec{F}_\nu$ rezultanta aktivnih sila koje deluju na tačku M_ν, onda se nakon sabiranja tih jednačina dobija jednačina:

$$\sum_\nu\sqrt{m_\nu}\,\vec{a}_\nu=\sum_\nu\frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu\Rightarrow\vec{W}=\vec{Q}.$$

Ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja reprezentativne tačke na koju deluje sila $\vec{Q}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu$. Projekcije na ose DKS sile $\vec{Q}$ su:

$Q^r = \vec{Q}\cdot\vec{\imath}^r = \vec{Q}\cdot\vec{\imath}_r \Rightarrow Q^r = Q_r \quad , \; r = 1,2,\ldots 3N$

i $Q^{3\nu-2} = \vec{Q}\cdot\vec{\imath}^{3\nu-2} = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} F^{3\nu-2} = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} F_{\nu x}$, $Q^{3\nu-1} = \vec{Q}\cdot\vec{\imath}^{3\nu-1} = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} F^{3\nu-1} = F_{\nu y}$

i $Q^{3\nu} = \vec{Q}\cdot\vec{\imath}^{3\nu} = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} F^{3\nu} = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} F_{\nu z}$.

Uvođenjem generalisanih krivolinijskih koordinata q^p umesto Dekartovih ξ^p pomoću opštih, generalisanih koordinatnih transformacija: $\xi^p = \xi^p(q^r)$, $\det\left[\partial\xi^p/\partial q^r\right] \neq 0$, $p, r = 1,2,\ldots 3N$, iz prostora E_{3N} prelazi se u euklidski, kvazi Rimanov prostor R_{3N}. Vektori položaja tačaka M_ν materijalnog sistema u odnosu na koordinatni početak prethodno uvedenog DKS dobijaju sada oblik: $\vec{r}_\nu = \xi^{\nu-2}(q^p)\,\vec{\imath}_{3\nu-2} + \xi^{\nu-1}(q^p)\,\vec{\imath}_{3\nu-1} + \xi^{3\nu}(q^p)\,\vec{\imath}_{3\nu}$, tj. $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q^p)$. Osnovni bazni vektori koordinatnog sistema generalisanih koordinata q^p u prostoru R_{3N} u tački M_ν su: $\vec{g}_{p(\nu)} = \partial\vec{r}_\nu/\partial q^p$, $\vec{g}_{p(\nu)} = \vec{g}_{p(\nu)}(q^r)$.

Metrika prostora R_{3N} u okolini tačke M_ν određena je kovarijantnim koordinatama metričkog tenzora: $g_{pr(\nu)} = \vec{g}_{p(\nu)}\cdot\vec{g}_{r(\nu)} = \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^p}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^r}$, $g_{pr(\nu)} = g_{pr(\nu)}(q^s)$ i $g_{pr(\nu)} = g_{rp(\nu)}$.

Kristofelovi simboli I vrste kojima se uspostavlja veza između koordinatnih baza u tački M_ν i njoj bliske tačke u prostoru R_{3N}, $\Gamma_{pr,s(\nu)}$, su:

$\Gamma_{pr,s(\nu)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs(\nu)}}{\partial q^p} + \frac{\partial g_{sp,r(\nu)}}{\partial q^r} - \frac{\partial g_{pr(\nu)}}{\partial q^s}\right)$, $\Gamma_{pr,s(\nu)} = \Gamma_{pr,s(\nu)}(q^t)$

dok su Kristofelovi simboli II vrste: $\Gamma^s_{pr(\nu)} = \Gamma_{pr,t(\nu)}\, g^{ts}_{(\nu)}$ $\left(g^{pr}_{(\nu)} g_{rs(\nu)} = \delta^p_r\right)$, pri čemu važi:

$\frac{\partial\vec{g}_{p(\nu)}}{\partial q^s} = \Gamma^r_{ps(\nu)}\vec{g}_{r(\nu)}$, $\frac{\partial\vec{g}_{p(\nu)}}{\partial q^s} = \Gamma_{ps,r(\nu)}\vec{g}^r_{(\nu)}$ i $\frac{\partial\vec{g}^p_{(\nu)}}{\partial q^s} = -\Gamma^p_{sr(\nu)}\vec{g}^r_{(\nu)}$.

Kretanje materijalnog sistema u R_{3N} biće poznato ukoliko su poznati zakoni promena generalisanih koordinata q^p u vremenu, tj. funkcije: $q^p = q^p(t)$ koje su neprekidne, jednoznačne i dva puta diferencijabilne. Funkcije $q^p = q^p(t)$ su konačne jednačine ~~jednačine~~ kretanja mat. sistema u generalisanim koordinatama, a u prostoru R_{3N} one predstavljaju parametarske jednačine krive linije.

Brzine $\vec{v}_\nu$ i ubrzanja $\vec{a}_\nu$ tačaka M_ν mat. sistema u R_{3N}. Kinetička energija mat. sistema. – Neka su poznate konačne jednačine kretanja mat. sistema: $q^p = q^p(t)$, pa su vektorske jednačine kretanja tačaka M_ν tog mat. sistema: $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu\left[q^p(t)\right]$.

Brzine tačaka M_ν su koordinatnim sistema gen. koordinata q^p u tim tačkama su:

$\vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} \Rightarrow \vec{v}_\nu = \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^p}\cdot\frac{dq^p}{dt} \Rightarrow \vec{v}_\nu = \dot{q}^p\vec{g}_{p(\nu)} \Rightarrow \vec{v}_\nu = \vec{v}_\nu(q^p, \dot{q}^p)$,

gde su $\dot{q}^p = \dot{q}^p(t)$ generalisane brzine. Brzine $\vec{v}_\nu$ su linearne po gener. brzinama $\dot{q}^p$. Kontravarijantne i kovarijantne koordinate vektora $\vec{v}_\nu$, $v^p_{(\nu)}$ i $v_{p(\nu)}$, respektivno, su:

$v^p_{(\nu)} = \vec{v}_\nu\cdot\vec{g}^p_{(\nu)} = \dot{q}^p$ i $v_{p(\nu)} = g_{pr(\nu)} v^r_{(\nu)} = g_{pr(\nu)}\dot{q}^r$

Ubrzanje tačke M_ν u koordinatnom sistemu generalisanih koordinata q^p u tački M_ν je:

$\vec{a}_\nu = \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \Rightarrow \vec{a}_\nu = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^p\vec{g}_{p(\nu)}\right) = \ddot{q}^p\vec{g}_{p(\nu)} + \dot{q}^p\frac{\partial\vec{g}_{p(\nu)}}{\partial q^r}\cdot\dot{q}^r \Rightarrow$

$\vec{a}_\nu = \left(\ddot{q}^p + \Gamma^p_{rs(\nu)}\dot{q}^r\dot{q}^s\right)\vec{g}_{p(\nu)}$.

Kontravarijantne i kovarijantne koordinate vektora $\vec{a}_\nu$, $a^p_{(\nu)}$ i $a_{p(\nu)}$, respektivno, su:

$a^p_{(\nu)} = \vec{a}_\nu\cdot\vec{g}^p_{(\nu)} \Rightarrow a^p_{(\nu)} = \ddot{q}^p + \Gamma^p_{rs(\nu)}\dot{q}^r\dot{q}^s$

i $a_{p(\nu)} = g_{pr(\nu)} a^r_{(\nu)} \Rightarrow a_{p(\nu)} = g_{pr(\nu)}\ddot{q}^r + \Gamma_{rs,p(\nu)}\dot{q}^r\dot{q}^s$

Na osnovu izraza za brzine tačaka M_ν, $\vec{v}_\nu = \dot{q}^p \vec{g}_{p(\nu)}$, slede relacije:

$$\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}^p} = \vec{g}_{p(\nu)} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}^p} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\nu} \quad i \quad \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q^p} = \frac{\partial}{\partial q^p}\frac{d\vec{r}_\nu}{dt} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q^p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^p}\right),$$

pa se kovarijantne koordinate ubrzanja te tačke, $a_{p(\nu)}$, mogu predstaviti u obliku:

$$a_{p(\nu)} = \vec{a}_\nu \cdot \vec{g}_{p(\nu)} = \frac{d\vec{v}_\nu}{dt}\cdot \vec{g}_{p(\nu)} \Rightarrow a_{p(\nu)} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_\nu \cdot \vec{g}_{p(\nu)}) - \vec{v}_\nu \cdot \frac{d\vec{g}_{p(\nu)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}^p}\right) - \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q^p} \Rightarrow$$

$$a_{p(\nu)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta_\nu}{\partial \dot{q}^p}\right) - \frac{\partial \Theta_\nu}{\partial q^p},$$

gde je: $\Theta_\nu = \frac{1}{2} v_\nu^2 = \frac{1}{2}\vec{v}_\nu \cdot \vec{v}_\nu$ i $\Theta_\nu = \frac{1}{2}(\dot{q}^p \vec{g}_{p(\nu)})\cdot(\dot{q}^r \vec{g}_{r(\nu)}) \Rightarrow \Theta_\nu = \frac{1}{2} g_{pr(\nu)} \dot{q}^p \dot{q}^r$.

Kako je kinetička energija tačke M_ν: $T_\nu = m_\nu \Theta_\nu \Rightarrow T_\nu = \frac{1}{2} m_\nu g_{pr(\nu)} \dot{q}^p \dot{q}^r$, to je kinetička energija mat. sistema:

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} T_\nu \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\sum_\nu m_\nu g_{pr(\nu)}\right)\dot{q}^p \dot{q}^r, \text{ tj. } T = \frac{1}{2} a_{pr} \dot{q}^p \dot{q}^r, \quad T = T(q^s, \dot{q}^s)$$

gde je: $a_{pr} = \sum_\nu m_\nu g_{pr(\nu)} = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^p}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^r}$, $a_{pr} = a_{pr}(q^s)$

S obzirom da je: $T = \sum \frac{1}{2} m_\nu v_\nu^2$, to je $T \geq 0$, pa prema: $T = \frac{1}{2} a_{pr} \dot{q}^p \dot{q}^r$, sledi da je kinetička energija pozitivno definitna kvadratna forma generalisanih brzina $\dot{q}^p$.

To znači da kvadratna matrica matrica koeficijenata a_{pr}, $[a_{pr}]^{3N\times 3N}$, zadovoljava kriterijum Silvestra:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Posledica napred navedene činjenice je da se u euklidskom (kvazi) Rimanovom prostoru može uvesti metrika upravo pomoću ovih koeficijenata: $d\sigma^2 = 2T dt^2 = a_{pr}\, dq^p dq^r$, tako da sveukupnost koeficijenata a_{pr} predstavlja kovarijantni metrički tenzor prostora R_{3N}. Koeficijenti a_{pr} osim od gen. koordina. q^p zavise i od inercijalnih i geometrijskih karakteristika materijalnog sistema, što znači da metrički tenzor, u određenom smislu, unosi te karakteristike u geometrijska svojstva konfiguracionog prostora. Matrica $[a_{ij}]$ se zbog toga naziva i matrica (tenzor) inercije ili matrica masa.

Uopštavanje kovarijantnog metričkog tenzora omogućava uopštavanje i ostalih geometrijskih pojmova i objekata u R_{3N}:

- kontravarijantne koordinate metričkog tenzora a^{pq}: $a^{pq} a_{qr} = \delta^p_r$, $[a^{pr}] = [a_{pr}]^{-1}$
- Kristofelov simbol I vrste: $[ps, r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{sr}}{\partial q^p} + \frac{\partial a_{rp}}{\partial q^s} - \frac{\partial a_{ps}}{\partial q^r}\right)$
- Kristofelov simbol II vrste: $\left\{ {r \atop ps} \right\} = [ps, z]\, a^{zr}$
- kovarijantni izvodi i kovarijantni (totalni) diferencijali vektora (tenzora):

$$\nabla_p u^s = \frac{\partial u^s}{\partial q^p} + \left\{ {s \atop pr} \right\} u^r \quad i \quad Du^s = du^s + \left\{ {s \atop pr} \right\} u^r dq^p$$

$$\nabla_p u_s = \frac{\partial u_s}{\partial q^p} - \left\{ {r \atop sp} \right\} u_r \quad i \quad Du_s = du_s - \left\{ {r \atop sp} \right\} u_r dq^p$$

Veza između koeficijenata metričkih tenzora prostora R_n u bilo kojoj tački M_ν mase m_ν je:

$$a_{pr(\nu)} \overset{def}{=} m_\nu g_{pr(\nu)} \quad i \quad a^{pr}_{(\nu)} = \frac{1}{m_\nu} g^{pr}_{(\nu)}$$

tako da je:

$$[ps, r]_{(\nu)} = m_\nu \Gamma_{ps,r(\nu)} \quad i \quad \left\{ {r \atop ps} \right\}_{(\nu)} = \Gamma^r_{ps(\nu)}$$

Takođe, ako se pod reprezentativnom tačkom M materijalnog sistem podrazumeva tačka jedinične mase čiji je položaj određen vektorom:

$$\vec{r} = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\, \vec{r}_\nu,$$

tada se može pokazati da metričkim koeficijentima g_{pr} u toj tački prostora R_{3N} odgovaraju metričkim koeficijentima a_{pr}. Naime, uvođenjem generalisanih koordinata q^p, u E_{3N}, reprezentativna tačka M postoje tačka euklidskog $R_{3N}(V_{3N})$ tj. važi: $\vec r = \vec r(q^p)$, pa su osnovni bazni vektori tački M:

$$\vec g_p = \frac{\partial \vec r}{\partial q^p} = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q^p} \Rightarrow \vec g_p = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec g_{p(\nu)} \quad i \quad \vec g_{p(\nu)} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q^p}\vec i_{3\nu-2} + \frac{\partial y_\nu}{\partial q^p}\vec i_{3\nu-1} + \frac{\partial z_\nu}{\partial q^p}\vec i_{3\nu},$$

tako da je: $\boxed{\vec g_p\cdot\vec g_r} = \sum_\nu m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q^p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q^r} + \frac{\partial y_\nu}{\partial q^p}\frac{\partial y_\nu}{\partial q^r} + \frac{\partial z_\nu}{\partial q^p}\frac{\partial z_\nu}{\partial q^r}\right) = \boxed{\sum_\nu m_\nu \vec g_{p(\nu)}\cdot\vec g_{r(\nu)}}$ (*)

Osnovni metrički koeficijenti prostora R_{3N} u reprezentativnoj tački su prema tome:

$$\boxed{a_{pr}} = \vec g_p\cdot\vec g_r = \sum_\nu m_\nu\, \vec g_{p(\nu)}\cdot \vec g_{r(\nu)} \Rightarrow \boxed{a_{pr} = \sum_\nu m_\nu\, g_{pr(\nu)}}$$

Diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke M. — Pri kretanju materijalnog sistema generalisane koordinate tog materijalnog sistema su funkcije vremena, $q^p = q^p(t)$, pa se kreće i reprezentativna tačka M, tj: $\vec r = \vec r[q^p = q^p(t)]$. Brzina reprezentativne tačke u generalisanim koordinatama je: $\vec u = \dot{\vec r} = \frac{\partial \vec r}{\partial q^p}\dot q^p \Rightarrow \vec u = \dot q^p \vec g_p \Rightarrow \frac{\partial \vec u}{\partial \dot q^p} = \frac{\partial \vec r}{\partial q^p}$ i $\frac{\partial \vec u}{\partial q^p} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r}{\partial q^p}$.

Ubrzanje reprezentativne tačke $\vec W$ je:

$$\vec W = \frac{d\vec u}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot q^p \vec g_p) \Rightarrow \vec W = \left(\ddot q^p + \left\{ {p \atop rs} \right\}\dot q^r \dot q^s\right)\vec g_p, \quad \boxed{W^s} = \ddot q^s + \left\{ {s \atop pr} \right\}\dot q^p \dot q^r$$

pa su kovarijantne koordinate ubrzanja: $\boxed{W_s} = \vec W\cdot\vec g_s = a_{ps}\ddot q^p + [rs,p]\dot q^r \dot q^s$.

Iz diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke slobodnog mat. sistema: $\vec W = \vec Q$, gde je $\vec Q = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec F_\nu$ aktivna sila koja deluje na tačku M, nakon skalarnog množenja leve i desne strane osnovnim vektorima $\vec g_p$ koordinatne baze, dobija se sistem od 3N diferencijalnih jednačina kretanja reprezentativne tačke u generalisanim koordinatama, u kovarijantnom obliku:

$$\vec W\cdot\vec g_s = \vec Q\cdot\vec g_s \Rightarrow W_s = Q_s \Rightarrow \boxed{a_{ps}\ddot q^p + [rs,p]\dot q^r \dot q^s = Q_s}, \quad p = 1,2,\dots,3N,$$

gde su: $\boxed{Q_s} = \vec Q\cdot\vec g_s = \boxed{\sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec F_\nu\cdot\vec g_s}$ i $\boxed{Q_s = \sum_\nu \vec F_\nu\cdot\vec g_{s(\nu)}}$ (**) - generalisane sile po generalisanim koordinatama q^s, tj. kovarijantne koordinate sile $\vec Q$ u tački M

Diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke u kontravarijantnom obliku su:

$$\vec W\cdot\vec g^s = \vec Q\cdot\vec g^s \Rightarrow a^{sp}\vec W\cdot\vec g_p = a^{sp}\vec Q\cdot\vec g_p \Rightarrow a^{sp}W_p = a^{sp}Q_p \Rightarrow W^s = Q^s \Rightarrow$$

$\boxed{\ddot q^s + \left\{ {s \atop pr} \right\}\dot q^p \dot q^r = Q^s}$, gde su $\boxed{Q^s = a^{sp}Q_p}$

Kako su kovarijantne koordinate ubrzanja reprezentativne tačke:

$$W_s = \frac{d\vec u}{dt}\cdot\vec g_s = \frac{d}{dt}\left(\vec u\cdot\frac{\partial \vec r}{\partial q^s}\right) - \vec u\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r}{\partial q^s} \Rightarrow W_s = \frac{d}{dt}\left(\vec u\cdot\frac{\partial \vec u}{\partial \dot q^s}\right) - \vec u\cdot\frac{\partial \vec u}{\partial q^s} \Rightarrow$$

$\Rightarrow W_s = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q^s}\left(\frac12 u^2\right) - \frac{\partial}{\partial q^s}\left(\frac12 u^2\right)$, tj. $\boxed{W_s = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^s} - \frac{\partial T}{\partial q^s}}$, gde je T kinetička energija reprezentativne tačke, tj. mat. sistema, jer je:

$$T = \frac12 u^2 = \frac12\left(\sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec v_\nu\right)\left(\sum_s \sqrt{m_s}\,\vec v_s\right) \Rightarrow T = \frac12 u^2 = \sum_\nu m_\nu \frac{v_\nu^2}{2}; \quad (***)$$

to se diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke mogu predstaviti i u obliku: $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^s} - \frac{\partial T}{\partial q^s} = Q_s}$ $s = 1,2,\dots,3N$

Elementarno stvarno i elementarno virtuelno pomeranje slobodnog materijalnog sistema u generalisanim koordinatama.-

Elementarno stvarno pomeranje slobodnog materijalnog sistema na bilo kom intervalu vremena beskonačno male dužine $[t, t+dt]$, a pod dejstvom poznatog sistema aktivnih sila određeno je skupom elementarnih stvarnih pomeranja $d\vec{r}_\nu$ tačaka tog sistema, a na posmatranom intervalu vremena, gde je:

$$d\vec{r}_\nu \approx \vec{r}_\nu(t+dt) - \vec{r}_\nu(t) \Rightarrow d\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu dt \Rightarrow d\vec{r}_\nu = \dot{q}^p \vec{g}_{p(\nu)} dt \Rightarrow d\vec{r}_\nu = dq^p \vec{g}_{p(\nu)}, \quad \nu = 1 \ldots N$$

Veličina dq^p predstavlja beskonačno malu promenu vrednosti koordinate q^p na intervalu vremena $[t, t+dt]$: $dq^p \approx q^p(t+dt) - q^p(t)$.

Elementarno virtuelno pomeranje slobodnog materijalnog sistema u posmatranom trenutku, tj. iz uočenog položaja mat. sistema određeno je elementarnim virtuelnim pomeranjima tačaka M_ν tog sistema $\delta\vec{r}_\nu$ koja su u generalisim koordinatama data izrazima:

$$\delta\vec{r}_\nu(q^p) = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^p}\delta q^p \Rightarrow \delta\vec{r}_\nu = \delta q^p \vec{g}_{p(\nu)}, \quad \nu = 1, 2 \ldots N,$$

gde su δq^p elementarne virtuelne, bilo kakve, promene vrednosti gen. koordina mat sistema u posmatranom položaju tog mat. sistema, tj. u posmatranom trenutku. →

Napomene.-

1.- Vektore brzine i ubrzanja tačke M_ν ispravnije je označiti sa $\vec{v}_{(\nu)}$ i $\vec{a}_{(\nu)}$, tj. indeks ν koji označava redni broj tačke mat. sistema i koji nema tenzorsku prirodu, treba staviti u zagradu, ali je ovde zbog jednostavnosti ova zagrada izostavljena.

2.- (*) $a_{pr} = \vec{g}_p \cdot \vec{g}_r = \left(\sum_\nu \sqrt{m_\nu}\, \vec{g}_{p(\nu)}\right) \cdot \left(\sum_s \sqrt{m_s}\, \vec{g}_{r(s)}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{pr} = \left[\sum_\nu \sqrt{m_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q^p}\vec{i}_{3\nu-2} + \frac{\partial y_\nu}{\partial q^p}\vec{i}_{3\nu-1} + \frac{\partial z_\nu}{\partial q^p}\vec{i}_{3\nu}\right)\right] \cdot \left[\sum_s \sqrt{m_s}\left(\frac{\partial x_s}{\partial q^r}\vec{i}_{3s-2} + \frac{\partial y_s}{\partial q^r}\vec{i}_{3s-1} + \frac{\partial z_s}{\partial q^r}\vec{i}_{3s}\right)\right],$$

gde je:
$\vec{i}_{3\nu-2} \cdot \vec{i}_{3s-2} = 1$ za $s=\nu \Rightarrow \vec{i}_{3\nu-2} \cdot \vec{i}_{3s-1} = 0$ i $\vec{i}_{3\nu-2} \cdot \vec{i}_{3s} = 0$
$\vec{i}_{3\nu-1} \cdot \vec{i}_{3s-1} = 1$ za $s=\nu \Rightarrow \vec{i}_{3\nu-1} \cdot \vec{i}_{3s-2} = 0$ i $\vec{i}_{3\nu-1} \cdot \vec{i}_{3s} = 0$
i $\vec{i}_{3\nu} \cdot \vec{i}_{3s} = 1$ za $s=\nu \Rightarrow \vec{i}_{3\nu} \cdot \vec{i}_{3s-2} = 0$ i $\vec{i}_{3\nu} \cdot \vec{i}_{3s-1} = 0$,

tako da je:

$$a_{pr} = \sum_\nu m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q^p}\cdot\frac{\partial x_\nu}{\partial q^r} + \frac{\partial y_\nu}{\partial q^p}\cdot\frac{\partial y_\nu}{\partial q^r} + \frac{\partial z_\nu}{\partial q^p}\cdot\frac{\partial z_\nu}{\partial q^r}\right) \Rightarrow \boxed{a_{pr} = \sum_\nu m_\nu \vec{g}_{p(\nu)} \cdot \vec{g}_{r(\nu)} = \vec{g}_p \cdot \vec{g}_r}$$

(**) $Q_s = \left(\sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu\right) \cdot \vec{g}_s = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu \cdot \left(\sum_s \sqrt{m_s}\, \vec{g}_{s(s)}\right) = \sum_\nu \sum_s \frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu \cdot \vec{g}_{s(s)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_s = \sum_\nu \sum_s \frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_\nu}}\left(F_{\nu x}\vec{i}_{3\nu-2} + F_{\nu y}\vec{i}_{3\nu-1} + F_{\nu z}\vec{i}_{3\nu}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_s}{\partial q^s}\vec{i}_{3s-2} + \frac{\partial y_s}{\partial q^s}\vec{i}_{3s-1} + \frac{\partial z_s}{\partial q^s}\vec{i}_{3s}\right) \xRightarrow{\boxed{\nu = s}}$$

$$Q_s = \sum_\nu F_{\nu x}\frac{\partial x_\nu}{\partial q^s} + F_{\nu y}\frac{\partial y_\nu}{\partial q^s} + F_{\nu z}\frac{\partial z_\nu}{\partial q^s} \Rightarrow Q_s = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \vec{g}_{s(\nu)}, \text{ pa je}$$

$$\boxed{Q_s = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu \cdot \vec{g}_s = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \vec{g}_{s(\nu)} = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}}$$

(***)

$$u^2 = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec{v}_\nu \cdot \sum_s \sqrt{m_s}\,\vec{v}_s = \sum_\nu \sum_s \sqrt{m_s m_\nu}\left(v_{\nu x}\vec{i}_{3\nu-2} + v_{\nu y}\vec{i}_{3\nu-1} + v_{\nu z}\vec{i}_{3\nu}\right) \cdot \left(v_{sx}\vec{i}_{3s-2} + v_{sy}\vec{i}_{3s-1} +\right.$$

$$\left. + v_{sz}\vec{i}_{3s}\right) \xRightarrow{s=\nu} \vec{u}\cdot\vec{u} = \sum_\nu m_\nu\left(v_{\nu x}^2 + v_{\nu y}^2 + v_{\nu z}^2\right) \Rightarrow \boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = \sum_\nu m_\nu v_\nu^2}$$

Elementarna virtuelna pomeranja tačaka M_ν sistema iz bilo kog položaja tog materijalnog sistema (u bilo kom trenutku t), $\delta\vec{r}_\nu$, $\nu=1,2,\dots N$, su međusobno nezavisna, što znači da bilo kakvo elementarno virtuelno pomeranje bilo koje tačke mat. sistema ne izaziva elementarno virtuelno pomeranje nijedne od preostalih tačaka mat. sistema. U koordinatnom, analitičkom smislu to znači da su elementarne virtuelne promene $\delta\xi^p$, $p=1,\dots,3N$, Dekartovih koordinata ξ^p u E_{3N}, u bilo kom trenutku t, međusobno nezavisne (posledica činjenice da su ξ^p koordinate mat. sistema). Kako je: $\delta q^p = \frac{\partial q^p}{\partial \xi^r}\delta\xi^r$, to su i elementarne virtuelne promene δq^p, $p=1,2,\dots 3N$, generalisanih koordinata mat. sistema q^p u E_{3N}, takođe su nezavisne. To, dalje, znači da slobodan mat. sistem može da vrši $3N$ nezavisnih kretanja u našem opažajnom prostoru, tj. da je broj stepeni slobode slobodnog mat. sistema, $n=3N$, pri čemu su prostor E_{3N} konfiguracioni prostori tog mat. sistema, jer sadrže sve njegove moguće konfiguracije (položaje i oblike).

U slučaju vezanog mat. sistema, elementarna virtuelna pomeranja $\delta\vec{r}_\nu$, $\nu=1,2,\dots N$, njegovih tačaka M_ν nisu međusobno nezavisna, s obzirom na činjenicu da će bilo kakvo elementarno virtuelno pomeranje bilo koje tačke mat. sistema, zbog veza, u posmatranom položaju tog mat. sistema na vezama, dovesti do elementarnih virtuelnih pomeranja preostalih tačaka mat. sistema, koja će biti u skladu sa vezama, tako da mat. sistem ostane na vezama, tj. da se veze ne naruše. U analitičkom smislu to znači elementarne virtuelne promene $\delta\xi^p$ Dekartovih koordinata ξ^p u E_{3N} nisu međusobno nezavisne ($\delta\vec{r}_\nu = \delta\xi_{3\nu-2}\vec{i}_{3\nu-2} + \delta\xi_{3\nu-1}\vec{i}_{3\nu-1} + \delta\xi_{3\nu}\vec{i}_{3\nu}$). Zbog toga je broj nezavisnih kretanja vezanog mat. sistema, kao broj stepeni slobode n tog mat. sistema manji od $3N$, tj. $n<3N$.

U nastavku će biti razmatrani samo holonomni mat. sistemi, tj. oni čije je kretanje ograničeno zadržavajućim geometrijskim (stacionarnim i nestacionarnim) vezama.

Broj stepeni slobode ovih sistema jednak je broju nezavisnih Dekartovih koordinata ξ^i, $i=1,2,\dots,n$, pa su konfiguracioni prostori holonomnih sistema n-dimenzionalni prostori koji predstavljaju potprostore prostora E_{3N}, tj. potopljeni su E_{3N}. Ovi konfiguracioni prostori su u opštem slučaju pravi Rimanovi prostori R_n, jer se njihova metrika u opštem slučaju ne može dati u formi: $ds^2=\sum_{i=1}^{n} a_i (d\xi^i)^2$, $a_i=const.$

B_1) Holonomni stacionarni materijalni sistemi. – Neka je kretanje mat. sistema od N tačaka M_ν, masa m_ν ograničeno sa p geometrijskih stacionarnih zadržavajućih veza:

$$f^{(\alpha)}(x_\nu, y_\nu, z_\nu)=0 \Rightarrow f^{(\alpha)}(\xi^p)=0, \quad \alpha=1,2,\dots,p, \quad rang\left[\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \xi^p}\right]^{p\times 3N} = p.$$

Ove veze ograničavaju položaje tačaka M_ν u E_{3N}, tj. položaje reprezentativne tačke mat. sistema u E_{3N}. U matematičkom smislu, jednačina $f^{(\alpha)}(\xi^p)=0$ predstavlja jednačinu hiperpovrši u E_{3N}, dok sistem od p takvih jednačina predstavlja jednačinu potprostora prostora E_{3N}, čiji je broj dimenzija $n=3N-p$ i koji u opštem slučaju predstavlja Rimanov prostor R_n. Jednačine ovog potprostora mogu se dati i u parametarskom obliku: $\xi^p=\xi^p(\xi^i)$, gde su $\xi^i=1,2,\dots, n=3N-p$ međusobno nezavisne Dekartove koordinate. ($\xi^i=\xi^i$, $i=1,2,\dots n$ i $\xi^{\alpha'}=\xi^{\alpha'}(\xi^i)$, $\alpha'=n+1, n+2,\dots, n+p=3N$).

Uvođenjem međusobno nezavisnih parametara q^i ($i,j,k,m=1,2,\dots,n$) umesto ξ^i pomoću opštih generalisanih transformacija koordinata:

$\xi^i=\xi^i(q^k)$, $\det\left[\partial\xi^i/\partial q^k\right]\neq 0$ $\left(rang\left[\partial\xi^i/\partial q^k\right]^{n\times n}=n\right)$

jednačina posmanog prostora R_n u E_{3N} dobijaju oblik: $\xi^P = \xi^P(q^k)$, rang$[\partial\xi^P/\partial q^k]^{3N\times n} = n$. (1)
S druge strane, zbog toga što je: $\xi^P = \xi^P(q^i)$, vektori položaja tačaka M_ν mat. sistema su:
$\vec{r}_\nu = \xi^{3\nu-2}(q^i)\vec{i}_{3\nu-2} + \xi^{3\nu-1}(q^i)\vec{i}_{3\nu-1} + \xi^{3\nu}(q^i)\vec{i}_{3\nu} \Rightarrow \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q^i)$, $\nu = 1,2,\dots,N$ i $i = 1,2,\dots,n$
to mat. sistem pripada, kako prostoru E_{3N}, tako i prostoru R_n, pa su generalisane koordinate q^i $i = 1,2,\dots,n$ prostora R_n istovremeno i generalisane koordinate materijalnog sistema. Prostor R_n u tom smislu predstavlja konfiguracioni prostor holonomnog materijalnog sistema, jer sadrži sve njegove moguće položaje i oblike. Takođe, jednačine veza: $f^{(\alpha)}(\xi^P) = 0$, holonomnog materijalnog sistema su u generalisanim koordinatama q^i identički zadovoljene, tako da važi: $f^{(\alpha)}(\xi^P(q^i)) \equiv 0$, pa se pri analizi kretanja ovakvog mat. sistema u R_n ne uzimaju u obzir, što znači da holonomni mat. sistem može da vrši n međusobno nezavisnih kretanja, tj. njegov broj stepeni slobode je jednak broju koordinata tog mat. sistema n.

Geometrija u prostoru R_n.-

Osnovni bazni vektori generalisanih koordinata q^i, $i = 1,2,\dots,n$ u prostoru R_n, u tački M_ν mat. sistema: $\vec{g}_{i(\nu)} = \dfrac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}$, $\vec{g}_{i(\nu)} = \vec{g}_{i(\nu)}(q^j)$; $\vec{g}^i_{(\nu)} \cdot \vec{g}_{j(\nu)} = \delta^i_j$

Koordinate metričkog tenzora prostora R_n u okolini tačke M_ν:
$g_{ij(\nu)} = \vec{g}_{i(\nu)} \cdot \vec{g}_{j(\nu)}$, $g_{ij(\nu)} = g_{ij(\nu)}(q^k)$; $[g^{ij}_{(\nu)}] = [g_{ij(\nu)}]^{-1}$ i $g^{ij}_{(\nu)} g_{jk(\nu)} = \delta^i_k$

Kristofelovi simboli I i II vrste:
$\Gamma_{ij,k(\nu)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{jk(\nu)}}{\partial q^i} + \dfrac{\partial g_{ki(\nu)}}{\partial q^j} - \dfrac{\partial g_{ij(\nu)}}{\partial q^k}\right)$, $\Gamma_{ij,k(\nu)} = \Gamma_{ij,k(\nu)}(q^m)$; $\Gamma^k_{ij(\nu)} = \Gamma_{ij,m(\nu)} g^{mk}_{(\nu)}$, i
$\dfrac{\partial\vec{g}_{i(\nu)}}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij(\nu)}\vec{g}_{k(\nu)} + \sum_{\alpha=1}^{p} h^{(\alpha)}_{ij(\nu)}\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)}$, gde su $\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)}$ međusobno, linearno nezavisni vektori prostora R_p, $p = 3N-n$ koji je upravan na R_n u tački M_ν: $\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)} = \dfrac{\mathrm{grad}_\nu f^{(\alpha)}}{|\mathrm{grad}_\nu f^{(\alpha)}|}$

Kretanje materijalnog sistema u R_n biće poznato ukoliko su poznati zakoni promena generalisanih koordinata q^i u vremenu, tj. funkcije $q^i = q^i(t)$ koje su neprekidne, jednoznačne i dva puta diferencijabilne. Funkcije $q^i = q^i(t)$ su konačne jednačine kretanja holonomnog materijalnog sistema u generalisanim koordinatama, a u prostoru R_n one predstavljaju parametarske jednačine krive linije.

Brzine $\vec{v}_\nu$ i ubrzanja $\vec{a}_\nu$ tačaka M_ν u generalisanim koordinatama q^i. Kinetička energija holonomnog stacionarnog mat. sistema

Brzina tačke M_ν je: $\vec{v}_\nu = \dfrac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \dfrac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i \Rightarrow \vec{v}_\nu = \dot{q}^i\vec{g}_{i(\nu)}$; $\vec{v}_\nu = \vec{v}_\nu(q^i, \dot{q}^i)$, vektori brzina $\vec{v}_\nu$ tačaka M_ν leže u R_n, tj. u afinim tangentnim prostorima prostora R_n

Kontravarijantne i kovarijantne koordinate vektora brzine $\vec{v}_\nu$:
$v^i_{(\nu)} = \dot{q}^i$ i $v_{i(\nu)} = g_{ij(\nu)}\dot{q}^j$

Ubrzanje tačke M_ν je: $\vec{a}_\nu = (\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk(\nu)}\dot{q}^j\dot{q}^k)\vec{g}_{i(\nu)} + \vec{a}_{\nu\perp}$,
gde su:
$a^i_{(\nu)} = \ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk(\nu)}\dot{q}^j\dot{q}^k$ - kontravarijantne koordinate vektora ubrzanja tačke M_ν,
$a_{i(\nu)} = a_{ij(\nu)}\ddot{q}^j + \Gamma_{jk,i(\nu)}\dot{q}^j\dot{q}^k$ - kovarijantne koordinate vektora ubrzanja tačke M_ν,
$a^i_{(\nu)}\vec{g}_{i(\nu)} = a_{j(\nu)}\vec{g}^j_{(\nu)}$ - komponenta ubrzanja tačke M_ν u prostoru R_n
$\vec{a}_{(\nu)} - a^i_{(\nu)}\vec{g}_{i(\nu)} = \vec{a}_{\nu\perp}$ i $\vec{a}_{\nu\perp} = \dot{q}^j\dot{q}^k\sum_{\alpha=1}^{p} h^{(\alpha)}_{jk(\nu)}\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)}$ - komponenta ubrzanja u prostoru R_p koji je upravan na R_n.

Vektori ubrzanja $\vec{a}_\nu$ tačaka M_ν u celini ne pripadaju konfiguracionom prostoru sistema R_n, tj. ne leže u afinim tangentnim prostorima u tačkama M_ν prostora R_n.

Zbog toga što je: $\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} = \vec{g}_{i(\nu)}$ i $\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\vec{g}_{i(\nu)}$, to se, analogno postupku prikazanom za slobodne materijalne sisteme, može pokazati da za kovarijantne koordinate ubrzanja tačaka M_ν holomnog materijalnog sistema važi:

$a_{i(\nu)} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta_\nu}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \Theta_\nu}{\partial q^i}$, gde je $\Theta_\nu = \frac{1}{2}v_\nu^2 = \frac{1}{2}g_{ij(\nu)}\dot{q}^i\dot{q}^j$

Kinetička energija holonomnog stacionarnog mat. sistema u prostoru gen. koordinata q^i je:

$T = \sum_\nu m_\nu \Theta_\nu = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$, $a_{ij} = a_{ji}$,

gde su: $a_{ij}(q^k) = \sum_\nu m_\nu \vec{g}_{i(\nu)} \cdot \vec{g}_{j(\nu)}$, kao što je u prethodnom poglavlju pokazano, koeficijenti matrice masa, odnosno, matrice (tenzora) inercije. Pošto je kinetička energija mat. sistema pozitivno definitna homogena kvadratna forma generalisanih brzina $\dot{q}^i$ $(T \geq 0)$, koeficijenti matrice $[a_{ij}]$ zadovoljavaju kriterijum Silvestra, pa se u prostor R_n može uvesti metrika: $d\sigma^2 = 2Tdt \geq a_{ij}dq^i dq^j$. U tom smislu sveukupnost koeficijenata $a_{ij} = a_{ij}(q^k)$ predstavlja kovarijantni metrički tenzor prostora R_n, pomoću kojeg se inercijalne i geometrijske karakteristike mat. sistema uvode u strukturu konfiguracionog prostora holonomnog stacionarnog mat. sistema.

Kristofelovi simboli I i II vrste u odnosu metrički tenzor a_{ij} su:

$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}\right)$ i $\left\{{k \atop ij}\right\} = [ij,l]a^{lk}$,

Odnos između veličina unutrašnje geometrije prostora R_n u bilo kojoj tački M_ν mase m_ν je:

$a_{ij(\nu)} \overset{def}{=} m_\nu g_{ij(\nu)}$, $a^{ij}_{(\nu)} = \frac{1}{m_\nu}g^{ij}_{(\nu)}$

$[ij,k]_{(\nu)} = m_\nu \Gamma_{ij,k(\nu)}$ i $\left\{{k \atop ij}\right\}_{(\nu)}^{M} = \Gamma^k_{ij(\nu)}$

Takođe, kao i u slučaju analize konfiguracionih prostora slobodnih mat. sistema, koeficijenti $a_{ij} = a_{ij}(q^k)$ konfiguracionih prostora holonomnih stacionarnih mehaničkih sistema R_n, određuju metriku tih prostora u okolini reprezentativne tačke ovih mehaničkih sistema:

$a_{ij} = \sum_\nu g_{ij(\nu)} \Rightarrow a_{ij} = \sum_\nu m_\nu \vec{g}_{i(\nu)} \cdot \vec{g}_{j(\nu)} = \sum_\nu \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$,

gde su: $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$, osnovni bazni vektori generalisanih koordinata q^i prostora R_n u reprezentativnoj tački; $\vec{g}_i = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec{g}_{i(\nu)}$

<u>Diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke u R_n.</u> – Konačne jednačine kretanja reprezentativne tačke M u R_n su: $q^i = q^i(t)$, pa su brzina $\vec{v}$ i ubrzanje $\vec{a}$ reprezentativne tačke u generalisanim koordinatima:

$\vec{u} = \dot{q}^i\vec{g}_i \Rightarrow u^i = \dot{q}^i$ i $u_i = a_{ij}\dot{q}^j$

$\vec{W} = \left(\ddot{q}^i + \left\{{i \atop jk}\right\}\dot{q}^j\dot{q}^k\right)\vec{g}_i + \vec{W}_\perp \Rightarrow W^i = \ddot{q}^i + \left\{{i \atop jk}\right\}\dot{q}^j\dot{q}^k$, $W_i = a_{ij}\ddot{q}^j + [jk,i]\dot{q}^j\dot{q}^k$ i

$\vec{W}_\perp = \dot{q}^j\dot{q}^k \sum_{\alpha=1} h_{jk}^{(\alpha)}\vec{m}^{(\alpha)}$, gde su: $\vec{m}^{(\alpha)} = \frac{grad_{(\alpha)}f^{(\alpha)}}{|grad_{(\alpha)}f^{(\alpha)}|}$, $\vec{m}^{(\alpha)} \cdot \vec{g}_i = 0$

vektori prostora R_p $(p = 3N - n)$ koji je upravan na afini tangentni prostor u reprezentativnoj tački M prostora R_n, tako da važi: $\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial q^j} = \left\{{k \atop ij}\right\}\vec{g}_k + \sum_{\alpha=1}^{p} h_{ij}^{(\alpha)}\vec{m}^{(\alpha)}$

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja reprezentativne tačke kao slobodne, je:

$\vec{W} = \vec{Q} + \vec{R}$,

gde je: $\vec{Q} = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu$, rezultanta aktivnih sila, a $\vec{R} = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{R}_\nu$, <u>reakcija idealnih geometrijskih stacionarnih veza u reprezentativnoj tački</u> koja leži u R_p $(R_p \perp R_n)$:

$\vec{R} = \sum_\alpha \lambda_{(\alpha)} grad_{(\alpha)} f^{(\alpha)} = \sum_\alpha \lambda_{(\alpha)} |grad_{(\alpha)} f^{(\alpha)}| \vec{m}^{(\alpha)}$ (2)

Skalarnim množenjem leve i desne strane jednačine $\vec{W}=\vec{Q}+\vec{R}$ osnovnim baznim vektorima $\vec{g}_i$ dobijaju se:

$\vec{W}\cdot\vec{g}_i=\vec{Q}\cdot\vec{g}_i+\vec{R}\cdot\vec{g}_i \Rightarrow W_i=Q_i \Rightarrow a_{ij}\ddot{q}^j+[jk,i]\dot{q}^k\dot{q}^j=Q_i$ – kovarijantne dif. jednačine kretanja reprezentativne tačke, odnosno: $\ddot{q}^i+\left\{{i \atop jk}\right\}\dot{q}^k\dot{q}^j=Q^i$ – kontravarijantne dif. jednačine kretanja reprezentativne tačke. Iz ovih jednačina se, za poznate kovarijantne koordinate sile $\vec{Q}$ u M: $Q_i=\vec{Q}\cdot\vec{g}_i=\sum_\nu \vec{F}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)}$, i poznate početne uslove, konačne jednačine kretanja reprezentativne tačke: $q^i=q^i(t)$, jer one ne sadrže nepoznatu reakciju veze. Reakcija veze $\vec{R}$ u reprezentativnoj tački, tj. nepoznati Lagranževi množitelji veza $\lambda_{(\alpha)}$ određuju se sistema jednačina koji se dobija skalarnim množenjem leve i desne strane jednačine: $\vec{W}=\vec{Q}+\vec{R}$ jediničnim vektorima $\vec{n}^{(\alpha)}$.

Uvođenjem kinetičke energije reprezentativne tačke: $T=\frac{1}{2}u^2=\sum_\nu\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2$, $T=\frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$, i vodeći računa o relacijama: $\frac{\partial\vec{u}}{\partial\dot{q}^i}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}=\vec{g}_i$ i $\frac{\partial\vec{u}}{\partial q^i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}=\dot{\vec{g}}_i$, kovarijantne diferencijalne jednačine: $W_i=Q_i$, mogu se predstaviti u obliku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i\ ,\quad i=1,2,\dots,n$$

Elementarno stvarno pomeranje holonomnog stacionarnog mat. sistema na intervalu vremena $[t,t+dt]$ u prostoru R_n je: $d\vec{r}_\nu=\vec{v}_\nu dt=dq^i\vec{g}_{i(\nu)}$, $\nu=1,2,\dots N$ i može se predstaviti elementarnim stvarnim pomeranjem reprezentativne tačke M u R_n na posmatranom intervalu vremena: $d\vec{r}=dq^i\vec{g}_i$.

Elementarno virtuelno pomeranje holonomnog stacionarnog mat. sistema u bilo kom trenutku t, tj. iz bilo kog položaja materijalnog sistema na vezama, a koje je u skladu sa njima, u prostoru R_n je: $\delta\vec{r}_\nu=\delta q^i\vec{g}_{i(\nu)}$ može se, takođe, predstaviti elementarnim virtuelnim pomeranjem reprezentativne tačke M u R_n, a u posmatranom trenutku t: $\delta\vec{r}=\delta q^i\vec{g}_i$.

Elementarno stvarno pomeranje holonomnog stacionarnog mat. sistema na intervalu vremena $[t,t+dt]$ je iz skupa mogućih elementarnih virtuelnih pomeranja tog mat. sistema u trenutku t.

Napomene.-

1.- Metrika prostora R_n čije su jednačine $\xi^p=\xi^p(\xi^i)$, $p=1,2,\dots,N$, $i=1,2,\dots n$ je:

$$ds^2=\delta_{pr}\frac{\partial\xi^p}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^r}{\partial\xi^j}\Rightarrow \boxed{ds^2}=\sum_{i=1}^n(d\xi^i)^2+\delta_{\alpha'\beta'}\frac{\partial\xi^{\alpha'}}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^{\beta'}}{\partial\xi^j}d\xi^i d\xi^j\ ,\quad i\neq j\ (\alpha',\beta'=n+1,\dots,n+p)$$

i ona se u opštem slučaju ne može, uvođenjem novih međusobno nezavisnih parametara u^i, svesti na oblik: $\sum_i c_i(du^i)^2$, $i=1,2,\dots,n$, $c^i=const$. To znači da unutrašnja geometrija prostora R_n nije u opštem slučaju euklidska, iako se gledano iz obvojnog prostora E_{3N} rastojanje između dve bliske tačke u R_n može izraziti kao zbir kvadrata diferencijala Dekartovih koordinata euklidskog E_{3N} prostora. U slučaju kada u R_n postoji takav sistem koordinata u^i da važi: $ds^2=\sum_i c_i(du^i)^2$, a koje se nazivaju euklidske koordinate iako mogu biti i krivolinijske, za Rimanov prostor se kaže da je pseudo rimanski prostor.

2.- $\mathrm{grad}_{(R)}f^{(\alpha)}=\sum_\nu\frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\mathrm{grad}_{(\nu)}f^{(\alpha)}=\sum_\nu\frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial\xi^{3\nu-2}}\vec{i}_{3\nu-2}+\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial\xi^{3\nu-1}}\vec{i}_{3\nu-1}+\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial\xi^{3\nu}}\vec{i}_{3\nu}\right)$

$\boxed{\vec{R}^{(\alpha)}}\overset{def}{=}\sum_\nu\frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{R}_\nu^{(\alpha)}=\sum_\nu\frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\lambda_{(\alpha)}\mathrm{grad}_{(\nu)}f^{(\alpha)}\Rightarrow\boxed{\vec{R}^{(\alpha)}}=\lambda_{(\alpha)}\mathrm{grad}_{(R)}f^{(\alpha)}$; $\vec{R}=\sum_\alpha\vec{R}^{(\alpha)}$

B₂) Holonomni nestacionarni materijalni sistemi. – Neka je kretanje materijalnog sistema tačaka M_ν, $\nu=1,2,\dots,N$ čije su mase m_ν ograničeno sa p geometrijskih nestacionarnih veza:

$$f^{(\alpha)}(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu)=0 \Rightarrow f^{(\alpha)}(t,\xi^P)=0\,;\ \operatorname{rang}\left[\partial f^{(\alpha)}/\partial\xi^P\right]^{n\times 3N}=p$$

U matematičkom smislu gornji sistem p jednačina veza predstavlja jednačinu $n=3N-p$ dimenzionalnog Rimanovog podprostora R_n prostora E_{3N}. Parametarske jednačine prostora R_n koji je potopljen u E_{3N} su: $\xi^P=\xi^P(t,\xi^i)$, $P=1,\dots,N$, $i=1,2,\dots n$ ($\xi^i=\xi^i$ i $\xi^{\alpha'}=\xi^{\alpha'}(t,\xi^i)$, $\alpha'=n+1,n+2,\dots,n+p=3N$). Kako su jednačine prostora R_n eksplicitno funkcija vremena t, to je prostor R_n gledano iz obvojnog prostora E_{3N}, deformabilan i/ili pokretan. Uvođenjem međusobno nezavisnih parametara q^i umesto međusobno nezavisnih Dekartovih koordinata ξ^i, jednačine prostora R_n mogu se dati i u obliku:

$$\xi^P=\xi^P(t,q^i),\quad \operatorname{rang}\left[\partial\xi^P/\partial q^i\right]^{3N\times n}=n\quad (\xi^i=\xi^i(q^i)\ \text{i}\ \xi^{\alpha'}=\xi^{\alpha'}(t,\xi^i=\xi^i(q^i))),$$

pa su vektori položaja tačaka M_ν mat. sistema:

$\vec{r}_\nu=\xi^{3\nu-2}(t,q^i)\vec{i}_{3\nu-2}+\xi^{3\nu-1}(t,q^i)\vec{i}_{3\nu-1}+\xi^{3\nu}(t,q^i)\vec{i}_{3\nu} \Rightarrow \vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t,q^i)$. To znači da materijalni sistem pripada kako prostoru E_{3N}, tako i prostoru R_n, pri čemu parametri q^i, $i=1,\dots n$, predstavljaju generalisane koordinate holonomnog nestacionarnog materijalnog sistema, dok je prostor R_n konfiguracioni prostor tog materijalnog sistema. U prostoru R_n jednačine geometrijskih nestacionarnih veza su identički zadovoljene: $f^{(\alpha)}(t,\xi^P(t,q^i))=f^{(\alpha)}(t,q^i)\equiv 0$, pa je broj nezavisnih kretanja u R_n jednak broju n generalisanih koordinata sistema, tj. broj stepeni slobode holonomnog nestacionarnog materijalnog sistema je n.

Unutrašnja geometrija prostora R_n. – Činjenica da su vektori položaja tačaka mat. sistema, kao tačaka prostora R_n, eksplicitne funkcije vremena: $\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t,q^i)$, ima za posledicu da su i veličine koje karakterišu unutrašnju geometriju prostora R_n funkcije vremena. Naime, pošto je prostor R_n gledano iz obvojnog prostora deformabilan (pokretan), to su i tačke M_ν tog prostora, gledano iz obvojnog prostora, takođe, pokretne, iako nemaju svoje kretanje u R_n.

Osnovni i recipročni vektori, $\vec{g}_{i(\nu)}$ i $\vec{g}^i_{(\nu)}$, koordinatne baze generalisanih koordinata q^i, u tački M_ν prostora R_n: $\vec{g}_{i(\nu)}=\dfrac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}$, $\vec{g}_{i(\nu)}=\vec{g}_{i(\nu)}(t,q^i)$ i $\vec{g}^i_{(\nu)}\cdot\vec{g}_{j(\nu)}=\delta^i_j$; $\vec{g}^i_{(\nu)}=\vec{g}^i_{(\nu)}(t,q^i)$

Koeficijenti metričkog tenzora u M_ν prostora R_n: $g_{ij(\nu)}=\vec{g}_{i(\nu)}\cdot\vec{g}_{j(\nu)}$, $g_{ij(\nu)}=g_{ij(\nu)}(t,q^i)$ i $[g^{ij}_{(\nu)}]=[g_{ij(\nu)}]^{-1}$, $g^{ij}_{(\nu)}\cdot g_{jk(\nu)}=\delta^i_k$, $g^{ij}_{(\nu)}=g^{ij}_{(\nu)}(t,q^k)$

Kristofelovi simboli I i II vrste u M_ν prostora R_n: $\Gamma_{ij,k(\nu)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{jk(\nu)}}{\partial q^i}+\dfrac{\partial g_{ki(\nu)}}{\partial q^j}-\dfrac{\partial g_{ij(\nu)}}{\partial q^k}\right)$, $\Gamma_{ij,k(\nu)}=\Gamma_{ij,k(\nu)}(t,q^\ell)$ i $\Gamma^k_{ij(\nu)}=g^{k\ell}_{(\nu)}\Gamma_{ij,\ell(\nu)}$, $\Gamma^k_{ij(\nu)}=\Gamma^k_{ij(\nu)}(t,q^\ell)$, pri čemu je:

$\dfrac{\partial\vec{g}_{i(\nu)}}{\partial q^j}=\Gamma^k_{ij(\nu)}\vec{g}_{k(\nu)}+\sum\limits_{\alpha=1}^{p}h^{(\alpha)}_{ij(\nu)}\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)}$, gde su $\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)}=\dfrac{\operatorname{grad}_{(\nu)}f^{(\alpha)}}{|\operatorname{grad}_{(\nu)}f^{(\alpha)}|}$ jedinični vektori deformabilnog Rimanovog prostora R_p ($p=3N-n$) koji je upravan na afini tangentni prostor prostora R_n u tački M_ν: $\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)}=\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)}(t,q^i)$.

Kretanje nestacionarnog, holonomnog materijalnog sistema u generalisanim koordinatama q^i su: $q^i=q^i(t)$, $i=1,\dots,n$, pa su konačne jednačine kretanja njegovih tačaka M_ν u vektorskom obliku: $\vec r_\nu = \vec r_\nu(t, q^i=q^i(t)) \Rightarrow \vec r_\nu=\vec r_\nu(t)$, funkcije vremena t na dva načina: preko jednačina veza i preko konačnih jednačina kretanja $q^i=q^i(t)$ mat. sistema.

<u>Brzine $\vec v_\nu$ i ubrzanja $\vec a_\nu$ tačaka M_ν mat. sistema. Kinetička energija holonomnog, nestacionarnog mat. sistema. Kinetička energija sistema</u>

Brzine $\vec v_\nu$ tačaka sistema M_ν su:
$$\vec v_\nu = \frac{d\vec r_\nu}{dt} \Rightarrow \vec v_\nu = \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q^i}\dot q^i + \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t} \Rightarrow \vec v_\nu = \dot q^i \vec g_{i(\nu)} + \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t} \Rightarrow \vec v_\nu = \vec v_\nu(t, q^i, \dot q^i)$$
i sastoje se od 2 komponente: komponente $\dot q^i \vec g_{i(\nu)}$ koja leži u afinom tangentnom prostoru prostora R_n u tački M_ν i komponente $\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}$ koja ne leži u tom prostoru. Dakle, vektori brzina $\vec v_\nu$ tačaka M_ν u celini ne pripadaju afinom tangentnom prostoru prostora R_n u trenutku t, u tački M_ν tog prostora.
Kontravarijantne koordinate $v^i_{(\nu)}$ vektora $\vec v_\nu$ su: $v^i_{(\nu)} = \dot q^i + \vec g^i_{(\nu)} \cdot \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}$
Kovarijantne koordinate $v_{i(\nu)}$ vektora $\vec v_\nu$ su: $v_{i(\nu)} = g_{ij(\nu)} v^j_{(\nu)} \Rightarrow v_{i(\nu)} = g_{ij(\nu)}\dot q^j + \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}\cdot \vec g_{i(\nu)}$
Ubrzanja $\vec a_\nu$ tačaka sistema su:
$$\vec a_\nu = \frac{d}{dt}\left(\dot q^i \vec g_{i(\nu)} + \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}\right) = \left(\ddot q^i + \Gamma^i_{jk(\nu)}\dot q^j\dot q^k\right)\vec g_{i(\nu)} + \dot q^j \dot q^k \sum_{\alpha=1}^{f} h^{(\alpha)}_{jk(\nu)} \vec m^{(\alpha)}_{(\nu)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}\right) + \dot q^i \frac{\partial \vec g_{i(\nu)}}{\partial t}$$
pa su kovarijantne i kontravarijantne koordinate ubrzanja $\vec a_\nu$:
$$a_{i(\nu)} = g_{ij(\nu)}\ddot q^j + \Gamma_{jk,i(\nu)}\dot q^j \dot q^k + \vec g_{i(\nu)}\cdot\frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial t^2} + 2\vec g_{i(\nu)}\cdot\frac{\partial \vec g_{k(\nu)}}{\partial t}\dot q^k$$
i $a^i_{(\nu)} = g^{ij}_{(\nu)} a_{j(\nu)}$
Vodeći računa da i u ovom slučaju važe relacije: $\frac{\partial \vec v_\nu}{\partial \dot q^i} = \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q^i} = \vec g_{i(\nu)}$ i $\frac{\partial \vec v_\nu}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q^i} = \frac{d\vec g_{i(\nu)}}{dt}$)
to se kovarijantne koordinate $a_{i(\nu)}$ ubrzanja $\vec a_\nu$ i u ovom slučaju mogu napisati u obliku:
$$a_{i(\nu)} = \frac{d\vec v_\nu}{dt}\cdot\vec g_{i(\nu)} = \frac{d}{dt}(\vec v_\nu\cdot\vec g_{i(\nu)}) - \vec v_\nu\cdot\frac{d\vec g_{i(\nu)}}{dt} \Rightarrow a_{i(\nu)} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial\dot q^i} - \frac{\partial\Theta_\nu}{\partial q^i},$$
gde je: $\Theta_\nu = \frac12 v_\nu^2 \Rightarrow \Theta_\nu = \frac12 g_{ij(\nu)}\dot q^i\dot q^j + b_{i(\nu)}\dot q^i + \frac12 c_{o(\nu)}$ i
$$g_{ij(\nu)} = \vec g_{i(\nu)}\cdot\vec g_{j(\nu)};\quad b_{i(\nu)} = \vec g_{i(\nu)}\cdot\frac{\partial\vec r_\nu}{\partial t}\quad i\quad c_{o(\nu)} = \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec r_\nu}{\partial t}$$
Kinetička energija holonomnog nestacionarnog sistema je:
$$T=\sum_\nu T_\nu = \sum_\nu m_\nu\Theta_\nu \Rightarrow T = \frac12 a_{ij}\dot q^i\dot q^j + b_i\dot q^i + \frac12 c_o,$$
gde su:
$$a_{ij} = \sum_\nu m_\nu g_{ij(\nu)} = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial\vec r_\nu}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q^j},\quad a_{ij}=a_{ij}(t,q^k)$$
$$b_i = \sum_\nu m_\nu b_{i(\nu)} = \sum_\nu m_\nu\frac{\partial\vec r_\nu}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\vec r_\nu}{\partial t},\quad b_i=b_i(t,q^k)$$
i
$$c_o = \sum_\nu m_\nu c_{o(\nu)} = \sum_\nu m_\nu\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec r_\nu}{\partial t},\quad c_o=c_o(t,q^k)$$
Kinetička energija holonomnog nestacionarnog sistema $T=T(t,q^i,\dot q^i)$ je nehomogena kvadratna forma generalisanih brzina i može se simbolički izraziti kao:
$$T=T_2+T_1+T_0,$$
gde su: $T_2=\frac12 a_{ij}\dot q^i\dot q^j$, $T_1=b_i\dot q^i$ i $T_0=\frac12 c_o$.
(Kada su veze geometrijske stacionarne: $\frac{\partial\vec r_\nu}{\partial t}=0 \Rightarrow b_i=0$; $c_o=0$ i $T=T_2$)
Pomoću koeficijenata $a_{ij}=a_{ij}(t,q^k)$ u izrazu za kinetičku energiju holonomnog reonomnog sistema <u>može se</u> definisati nova metrika konfiguracionog prostora R_n tog materijalnog sistema, kao što je to bilo moguće u slučaju holonomnih stacionarnih mat. sistema i slobodnih mat. sistema. Prostor sa metrikom:

$$d\sigma^2 = 2T\,dt = a_{ij}(t,q^k)dq^i dq^j + 2b_i(t,q^k)dq^i dt + c_0(t,q^k)(dt)^2;$$

nazivaju se reonomni prostori. Ovi prostori su $(n+1)$ dimenzionalni prostori R_{n+1}, u kojima n generalisanih koordinata predstavljaju upravo generalisane koordinate q^i, dok je $n+1$ generalisana koordinata vreme t koje figurie u jednačinama veza: $q^{n+1} = t$.

Diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke u R_n. - Imajući u vidu da je vektor položaja reprezentativne tačke holonomnog nestacionarnog materijalnog sistema: $\vec{r} = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec{r}_\nu(t,q^i)$, i da je: $\vec{g}_i = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec{g}_{i(\nu)}(t,q^i)$ i $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}$, to su koeficijenti $a_{ij} = a_{ij}(t,q^k)$, $b_i = b_i(t,q^k)$ i $c_0 = c_0(t,q^k)$ u izrazu za kinetičku energiju ovih sistema:

$$a_{ij} = \sum_\nu m_\nu \vec{g}_{i(\nu)} \cdot \vec{g}_{j(\nu)} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$$

$$b_i = \sum_\nu m_\nu \vec{g}_{i(\nu)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = \vec{g}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

$$c_0 = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

gde su $\vec{g}_i = \vec{g}_i(t,q^i)$ osnovni bazni vektori prostora R_n u reprezentativnoj tački. Brzina reprezentativne tačke $\vec{u}$ za $q^i = q^i(t)$, $i = 1,2,..n$ je:

$$\vec{u} = \sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec{v}_\nu \quad i \quad \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Rightarrow \vec{u} = \dot{q}^i \vec{g}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$ pri čemu važi:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \vec{g}_i \quad i \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \dot{\vec{g}}_i.$$

Ubrzanje reprezentativne tačke je $\vec{W} = \frac{d\vec{u}}{dt}$, pa su kovarijantne koordinate W_i vektora $\vec{W}$: $W_i = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{g}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}$, gde je T kinetička energija reprezentativne tačke $T = \frac{1}{2}u^2$, koja je s obzirom na napred navede formule jednaka kinetičkoj energiji holonomnog nestacionarnog prostora, tj:

$$T = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + b_i\dot{q}^i + \frac{1}{2}c_0.$$

Skalarnim množenjem leve i desne strane vektorske dif. jednačine kretanja reprezentativne tačke: $\vec{W} = \vec{Q} + \vec{R}$, sa osnovnim baznim vektorima $\vec{g}_i$ dobijaju se diferencijalne jednačine njenog kretanja u kovarijantnom obliku:

$$\vec{W}\cdot\vec{g}_i = \vec{Q}\cdot\vec{g}_i + \vec{R}\cdot\vec{g}_i \Rightarrow W_i = Q_i \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i, \quad i = 1,2..n,$$

gde je $\vec{R}\cdot\vec{g}_i = 0$, jer je rezultanta reakcija idealnih geometrijskih veza $\vec{R} = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_{(\alpha)}\,\mathrm{grad}_{(\alpha)} f^{(\alpha)}$ upravna na vektore $\vec{g}_i$, tj. afini tangentni prostor u M prostora R_n, u trenutku t.

Elementarno stvarno pomeranje holonomnog nestacionarnog mat. sistema na intervalu vremena $[t, t+dt]$ u prostoru generalisanih koordinata q^i je:

$$d\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu dt = dq^i \vec{g}_{i(\nu)} + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}dt, \quad i = 1,2,..n \quad i \quad \nu = 1,2,..N$$

i može se predstaviti elementarnim stvarnim pomeranjem reprezentativne tačke na posmatranom intervalu vremena:

$$d\vec{r} = \vec{u}\,dt = dq^i\vec{g}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}dt,$$ koje ne leži u afinom tangentnom prostoru prostora R_n, u referentnoj tački, a u trenutku t.

Elementarno virtuelno pomeranje holonomnog nestacionarnog mat. sistema u bilo kom trenutku t, iz bilo kog položaja tog sistema na geometrijskim

nestacionarnim vezama, a koje je tim vezama dozvoljeno je:
$\delta\vec{r}_\nu = \delta q^i \vec{g}_{i(\nu)}$, $i=1,2\ldots n$, $\nu = 1,2\ldots N$, pri čemu svaki od vektora $\delta\vec{r}_\nu$ leži u afinom tangentnom prostoru prostora R_n u tački M_ν, u trenutku t.
Elementarno virtuelno pomeranje reprezentativne tačke mat. sistema je $\delta\vec{r} = \delta q^i \vec{g}_i$ i leži u afinom tangentnom prostoru prostora R_n u reprezentativnoj tački, a u posmatranom trenutku t.
Na bazi napred rečenog sledi da elementarno stvarno pomeranje holonomnog nestacionarnog mat. sistema nije iz skupa mogućih elementarnih virtuelnih pomeranja ovog mat. sistema, a u posmatranom trenutku.

Napomena.- Pri transformaciji koordinata $\bar{q}^i = \bar{q}^i(q^j)$ u deformabilnom konfiguracionom prostoru za koju je $\det|\partial\bar{q}^i/\partial q^j| \neq 0$ ($\mathrm{rang}[\partial\bar{q}^i/\partial q^j] = n$), diferencijali koordinata dq^i i $d\bar{q}^i$ se transformišu po zakonu:

$$\boxed{d\bar{q}^i} = \frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^j} dq^j \quad i \quad dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} d\bar{q}^j.$$

Vektori položaja tačaka sistema M_ν, $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q^i)$ u novim koordinatama su:

$$\vec{\bar{r}}_\nu = \vec{\bar{r}}_\nu(t, \bar{q}^i) = \vec{r}_\nu(t, q^i = q^i(\bar{q}^j)),$$

pa su osnovni bazni vektora $\vec{\bar{g}}_{i(\nu)}$ i recipročni bazni vektori $\vec{\bar{g}}^i_{(\nu)}$ generalisanih koordinata $\bar{q}^i$ u tačkama M_ν prostora R_n:

$$\vec{\bar{g}}_{i(\nu)} = \frac{\partial\vec{\bar{r}}_\nu}{\partial\bar{q}^i} \Rightarrow \vec{\bar{g}}_{i(\nu)} = \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^k}\cdot\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i} \Rightarrow \boxed{\vec{\bar{g}}_{i(\nu)}} = \vec{g}_{k(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i} \quad i \quad \vec{\bar{g}}^i_{(\nu)}\cdot\vec{\bar{g}}_{k(\nu)} = \delta^i_k \Rightarrow \boxed{\vec{\bar{g}}^i_{(\nu)}} = \vec{g}^k_{(\nu)}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k},$$

Transformacije vektora $\vec{g}_{i(\nu)}$ su suprotne u odnosu na transformacije za dq^i, a transformacije vektora $\vec{\bar{g}}^i_{(\nu)}$ su istog tipa kao i transformacije za dq^i.
Kovarijantni i kontravarijantni metrički koeficijenti $g_{ij(\nu)}$ i $g^{ij}_{(\nu)}$, kao i metrički koeficijenti $a_{ij(\nu)}$ i $a^{ij}_{(\nu)}$, transformišu su se kao koordinate odgovarajućih metričkih tenzora II reda:

$$\bar{g}_{ij(\nu)} = \vec{\bar{g}}_{i(\nu)}\cdot\vec{\bar{g}}_{j(\nu)} \Rightarrow \bar{g}_{ij(\nu)} = \left(\vec{g}_{k(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}\right)\cdot\left(\vec{g}_{l(\nu)}\frac{\partial q^l}{\partial\bar{q}^j}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{g}_{ij(\nu)}} = g_{kl(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}\frac{\partial q^l}{\partial\bar{q}^j}$$

$$\bar{a}_{ij(\nu)} = m_\nu \bar{g}_{ij(\nu)} \Rightarrow \boxed{\bar{a}_{ij(\nu)}} = a_{kl(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}\frac{\partial q^l}{\partial\bar{q}^j}$$

$$\bar{g}^{ij}_{(\nu)} = \vec{\bar{g}}^i_{(\nu)}\cdot\vec{\bar{g}}^j_{(\nu)} \Rightarrow \bar{g}^{ij}_{(\nu)} = \left(\vec{g}^k_{(\nu)}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}\right)\cdot\left(\vec{g}^l_{(\nu)}\frac{\partial\bar{q}^j}{\partial q^l}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{g}^{ij}_{(\nu)}} = g^{kl}_{(\nu)}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}\frac{\partial\bar{q}^j}{\partial q^l}$$

$$i \quad \bar{a}^{ij}_{(\nu)} = \frac{1}{m_\nu}\bar{g}^{ij}_{(\nu)} \Rightarrow \boxed{\bar{a}^{ij}_{(\nu)}} = a^{kl}_{(\nu)}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}\frac{\partial\bar{q}^j}{\partial q^l}$$

Kovarijantne i kontravarijantne vektora brzine $\vec{v}_\nu$ se transformišu kao odgovarajuće koordinate tenzora I reda:

$$\vec{\bar{v}}_\nu = \frac{d\vec{\bar{r}}_\nu}{dt} = \dot{\bar{q}}^i\vec{\bar{g}}_{i(\nu)} + \frac{\partial\vec{\bar{r}}_\nu}{\partial t} \Rightarrow \quad \bar{v}^i_{(\nu)} = \vec{\bar{v}}_{(\nu)}\cdot\vec{\bar{g}}^i_{(\nu)} = \dot{\bar{q}}^i + \vec{\bar{g}}^i_{(\nu)}\cdot\frac{\partial\vec{\bar{r}}_\nu}{\partial t} \Rightarrow \bar{v}^i_{(\nu)} = \dot{q}^k\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k} + \vec{g}^k\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}$$

$$\boxed{\bar{v}^i_{(\nu)}} = v^k_{(\nu)}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}$$

$$\bar{v}_{i(\nu)} = \bar{g}_{ij(\nu)}\bar{v}^j_{(\nu)} \Rightarrow \boxed{\bar{v}_{i(\nu)}} = v_{k(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}$$

Kovarijantne koordina vektora ubrzanja $\vec{a}_\nu$ transformišu se kao odgovarajuće koordinate tenzora I reda:

$$a_{i(\nu)} = \vec{a}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial\theta_\nu}{\partial q^i}, \text{ gde je } \theta_\nu = \frac{1}{2}v_\nu^2 \text{ i } \theta_\nu = \theta_\nu(t, q^i, \dot{q}^i)$$

U generalisanim koordinatama $\bar{q}^i = \bar{q}^i(q^k)$, tj $q^i = q^i(\bar{q}^k)$ je:

$$\bar{a}_{i(\nu)} = \vec{\bar{a}}_\nu\cdot\vec{\bar{g}}_{i(\nu)} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{\theta}_\nu}{\partial\dot{\bar{q}}^i} - \frac{\partial\bar{\theta}_\nu}{\partial\bar{q}^i}, \text{ gde je: } \bar{\theta}_\nu = \frac{1}{2}\vec{\bar{v}}_\nu\cdot\vec{\bar{v}}_\nu \text{ i } \bar{\theta}_\nu = \bar{\theta}_\nu(t, \bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i)$$

Kako je:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{\theta}_\nu}{\partial\dot{\bar{q}}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial\dot{q}^k}{\partial\dot{\bar{q}}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\right)\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i} + \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\cdot\frac{\partial^2 q^k}{\partial\bar{q}^l\partial\bar{q}^i}\dot{\bar{q}}^l \quad \left(\frac{\partial\dot{q}^k}{\partial\dot{\bar{q}}^i} = \frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{\theta}_\nu}{\partial\dot{\bar{q}}^i}\right)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\right)\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i} + \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial^2 q^k}{\partial\bar{q}^l\partial\bar{q}^i}\left(\frac{\partial\bar{q}^l}{\partial q^m}\dot{q}^m\right) \quad \left(\dot{\bar{q}}^l = \dot{q}^m\frac{\partial\bar{q}^l}{\partial q^m}\right) - \Lambda^\circ$$

$$\frac{\partial\bar{\Theta}_\nu}{\partial\bar{q}^i}=\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}+\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial\dot{q}^k}{\partial\bar{q}^i}=\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}+\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial}{\partial\bar{q}^i}\left(\dot{\bar{q}}^m\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^m}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\bar{\Theta}_\nu}{\partial\bar{q}^i}=\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}+\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial^2 q^k}{\partial\bar{q}^i\partial\bar{q}^m}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\bar{q}^m}{\partial q^l}\dot{q}^l\right)}_{\dot{\bar{q}}^m}\Rightarrow\boxed{\frac{\partial\bar{\Theta}_\nu}{\partial\bar{q}^i}}=\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}+\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial^2 q^k}{\partial\bar{q}^i\partial\bar{q}^l}\frac{\partial\bar{q}^l}{\partial q^m}\dot{q}^m\ (m\leftrightarrow l)$$

to je konačno:

$$\bar{a}_{i(\nu)}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{\Theta}_\nu}{\partial\dot{\bar{q}}^i}-\frac{\partial\bar{\Theta}_\nu}{\partial\bar{q}^i}\Rightarrow\boxed{\bar{a}_{i(\nu)}}=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial\dot{q}^k}-\frac{\partial\Theta_\nu}{\partial q^k}\right)\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}=a_{k(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}$$

Generalisana ubrzanja $\ddot{q}^i$ nisu kontravarijantne koordinate vektora u R_n, jer se ove veličine, pri transformaciji koordinata $\bar{q}^i=\bar{q}^i(q^i)$, transformišu po formuli:

$$\ddot{\bar{q}}^i=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}^k\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}\right)=\ddot{q}^k\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}+\frac{\partial^2\bar{q}^i}{\partial q^k\partial q^l}\dot{q}^k\dot{q}^l,$$ a ne po formuli $\ddot{\bar{q}}^i=\ddot{q}^k\dfrac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^k}$.

<u>Transformacije kovarijantnih sila:</u>

$$F_{i(\nu)}=\vec{F}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)}\quad i\quad\bar{F}_{i(\nu)}=\vec{F}_\nu\cdot\vec{\bar{g}}_{i(\nu)}=\vec{F}_\nu\cdot\vec{g}_{k(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}\Rightarrow\boxed{\bar{F}_{i(\nu)}}=F_{k(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}$$

Transformacija generalisanih sila:

$$Q_i=\sum_\nu F_{i(\nu)}\quad i\quad\bar{Q}_i=\sum_\nu\bar{F}_{i(\nu)}=\sum_\nu F_{k(\nu)}\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}\Rightarrow\bar{Q}_i=\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}\sum_\nu F_{k(\nu)}\Rightarrow\boxed{\bar{Q}_i}=Q_k\frac{\partial q^k}{\partial\bar{q}^i}.$$

Lagranževe jednačine druge vrste za holonomne materijalne sisteme

Posmatra se kretanje holonomnog materijalnog sistema N tačaka M_ν, masa m_ν čije je kretanje ograničeno geometrijskim, zadržavajućim, stacionarnim i nestacionarnim vezama, a pod dejstvom aktivnih sila $\vec{F}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots N$. Ako je broj stepeni slobode materijalnog sistema n, gde je $n=3N-p$, p ukupan broj veza i ako su generalisane koordinate materijalnog sistema q^i, $i=1,2,\ldots,n$, tada su $\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t,q^i)$, $\vec{r}_\nu=\overrightarrow{OM_\nu}$, pa je konfiguracioni prostor materijalnog sistema Rimanov, deformabilni prostor R_n u kome su uvedene generalisane koordinate q^i.

Neka je u proizvoljnom trenutku t uočen položaj materijalnog sistema na vezama u kome su $\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t,q^i)$. Pod elementarnim virtuelnim pomeranjem materijalnog sistema, $\delta\vec{r}_\nu$, $\nu=1,2\ldots,N$ u trenutku t podrazumeva se bilo kakvo malo, vezama dozvoljeno pomeranje mat. sistema, a iz položaja koje on zauzima na vezama u tom trenutku. Ovo pomeranje je u R_n određeno izrazima:

$$\delta\vec{r}_\nu=\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}\delta q^i \Rightarrow \delta\vec{r}_\nu=\delta q^i\vec{g}_{i(\nu)},\ \nu=1,2,\ldots N,$$

tj. određeno je elementarnim virtuelnim promenama generalisanih koordinata materijalnog sistema u posmatranom trenutku, δq^i, $i=1,2\ldots,n$, koje su međusobno nezavisne veličine ($a_i(q^j,t)\delta q^i=0$ akko $a_i(q^j,t)\equiv 0$). Svaki od vektora $\delta\vec{r}_\nu$, pak, leži u afinonom tangentnom prostoru prostora R_n u tački M_ν tog prostora.(*)

<u>Generalisane sile</u>. - Elementarni virtuelni rad sila F_ν, $\nu=1\ldots N$ koje deluju na materijalni sistem u trenutku t, $\delta'A=\sum_\nu\vec{F}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu$, u odnosu na generalisane koordinate biće:

$\delta'A=\sum_\nu\vec{F}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)}\delta q^i \Rightarrow \delta'A=Q_i\delta q^i$, gde su $Q_i=Q_i(t,q^j,\dot{q}^j)=\sum\vec{F}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)}$, $i=1\ldots n$ generalisane sile mehaničkog sistema od aktivnih sila $\vec{F}_\nu$. Izraz za bilo koju generalisanu silu Q_i, tj. za generalisanu silu u odnosu na generalisanu koordinatu q^i, pokazuje da je ona određena zbirom kovarijantnih koordinata, $F_{i(\nu)}=\vec{F}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)}$, sila $\vec{F}_\nu$, $\nu=1,2\ldots N$, a u odnosu na pravce osnovnih baznih vektora $\vec{g}_{i(\nu)}$ u tačkama M_ν prostora R_n koji su tangentni na q^i-koordinatne linije u tačkama M_ν. S druge strane, generalisane sile Q_i predstavljaju koeficijente uz sinhrone varijacije δq^i generalisanih koordinata q^i u izrazu za elementarni virtuelni rad aktivnih sila $\vec{F}_\nu$, a u proizvoljnom trenutku t.

Veličine $Q_i=\sum F_{i(\nu)}$ se pri transformaciji koordinata $\bar{q}^i=\bar{q}^i(q^j)$, odnosno, $q^i=q^i(\bar{q}^j)$, ponašaju kao kovarijantne koordinate vektora $\vec{Q}=\{Q_i\}$ u R_n:

$$\bar{Q}_i=\sum_\nu \bar{F}_{i(\nu)}=\sum_\nu\vec{F}_\nu\cdot\vec{\bar{g}}_{i(\nu)} \Rightarrow \bar{Q}_i=\sum_\nu\vec{F}_\nu\cdot\frac{\partial q^j}{\partial\bar{q}^i}\vec{g}_{j(\nu)} \Rightarrow \bar{Q}_i=\frac{\partial q^j}{\partial\bar{q}^i}\sum_\nu\vec{F}_\nu\cdot\vec{g}_{j(\nu)} \Rightarrow \boxed{\bar{Q}_i=\frac{\partial q^j}{\partial\bar{q}^i}Q_j}$$

Kontravarijantne generalisane sile Q^i su:

$$\boxed{Q^i=\sum_\nu F^i_{(\nu)}} \Rightarrow Q^i=\sum_\nu\vec{F}_\nu\cdot\vec{g}^i_{(\nu)},$$

odnosno: $Q^i=\sum_\nu\vec{F}_\nu\cdot g^{ij}_{(\nu)}\vec{g}_{j(\nu)} \Rightarrow \boxed{Q^i=\sum_\nu g^{ij}_{(\nu)}F_{j(\nu)}}$ i $\boxed{Q_i=\sum_\nu g_{ij(\nu)}F^j_{(\nu)}}$,

gde su: $F^i_{(\nu)}$ - kontravarijantne koordinate sile $\vec{F}_\nu$ u tački M_ν prostora R_n, a u odnosu na bazne vektore generalisanih koordinata q^i u toj tački:

$\vec{F}_\nu=F^i_{(\nu)}\vec{g}_{i(\nu)}=F_{i(\nu)}\vec{g}^{i(\nu)}$, $\vec{g}^i_{(\nu)}=\vec{g}^i_{(\nu)}(q^j,t)$, $\vec{g}_{i(\nu)}=\vec{g}_{i(\nu)}(t,q^j)$,

a $g_{ij(\nu)}=g_{ij(\nu)}(t,q^k)$ i $g^{ij}_{(\nu)}=g^{ij}_{(\nu)}(t,q^k)$ - kovarijantne i kontravarijantne koordinate metričkog tenzora prostora R_n u tački M_ν.

(*) Elementarno virtuelno pomeranje mat. sistema: $\delta\vec{r}_\nu$, $\nu=1\ldots N$ u R_n predstavlja pomeranje mat. sistema iz bilo koje konfiguracije: $\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t,q^i)$ u beskonačno blisku, bilo koju, virtuelnu konfiguraciju mat. sistema u R_n: $\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t,q^{i*})$, gde je: $\delta q^i=q^{i*}-q^i$ i $\delta\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t,q^{i*})-\vec{r}_\nu(t,q^i)$

Takođe, treba imati u vidu da generalisane sile sistema Q_i predstavljaju kovarijantne koordinate sile $\vec{Q}=\sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{F}_\nu$ koja deluje u tački M prostora R_n čiji je vektor položaja $\vec{r}$: $\vec{r}=\sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec{r}_\nu$, i koja predstavlja reprezentativnu tačku materijalnog sistema, tako da važi: $Q_i=\vec{Q}\cdot\vec{g}_i$; gde su: $\vec{g}_i=\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ i $\vec{g}_i=\sum_\nu \sqrt{m_\nu}\,\vec{g}_{i(\nu)}$ osnovni bazni vektori generalisanih koordinata q^i u tački M prostora R_n. U tom smislu su: $Q^i=\vec{Q}\cdot\vec{g}^i$ kontravarijantne koordinate sile $\vec{Q}$ u tački M generalisane sile sistema u kontravarijantnom obliku i:

$Q^i=a^{ij}Q_j$ i $Q_i=a_{ij}Q^j$,

gde su $\vec{g}^i=\sum_\nu \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}\vec{g}^i_{(\nu)}$ recipročni bazni vektori generalisanih koordinata q^i u tački M prostora R_n, a $a_{ij}=a_{ij}(t,q^k)$ i $a^{ij}=a^{ij}(t,q^k)$ kovarijantne i kontravarijantne koordinate metričkog tenzora u tački M:

$a_{ij}=\vec{g}_i\cdot\vec{g}_j=\sum_\nu m_\nu \vec{g}_{i(\nu)}\cdot\vec{g}_{j(\nu)}$ i $a^{ij}=\sum_\nu \frac{1}{m_\nu}\vec{g}^i_{(\nu)}\cdot\vec{g}^j_{(\nu)}$

Generalisane sile sistema reakcija idealnih spoljašnjih i unutrašnjih (geometrijskih) veza $\vec{R}_\nu$ su jednake nuli, jer je elementarni virtuelni rad ovih sila u bilo kom trenutku t jednak nuli: $\sum_\nu \vec{R}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu=0 \Rightarrow (\sum_\nu \vec{R}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)})\delta q^i=0 \Rightarrow Q_i^R=\sum_\nu \vec{R}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)}=0$.

$(\vec{R}_\nu=\sum_{\alpha=1}^{p}\lambda_{(\alpha)}|grad_{(\nu)}f^{(\alpha)}|\vec{m}^{(\alpha)}_{(\nu)})$

Generalisane inercijalne sile Q_i^{in}. - Sistem inercijalnih sila koji deluje na materijalni sistem čine inercijalne sile $\vec{F}_\nu=-m_\nu\vec{a}_\nu$, $\nu=1,2,\dots,N$ gde su $\vec{a}_\nu$ ubrzanje tačaka M_ν materijalnog sistema. Elementarni virtuelni rad inercijalnih sila u bilo kom trenutku t, tj. u bilo kom položaju holonomnog materijalnog sistema na vezama, je:

$\delta' A^{in}=\sum_\nu \vec{F}^{in}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu \Rightarrow \delta' A^{in}=-\sum_\nu m_\nu\vec{a}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu$.

Vodeći računa da je: $\delta\vec{r}_\nu=\delta q^i\vec{g}_{i(\nu)}$, kao i da je $\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}^i}=\vec{g}_{i(\nu)}$ i $\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial q^i}=\dot{\vec{g}}_{i(\nu)}$, gde su $\vec{v}_\nu(t,q^i,\dot{q}^i)=\dot{q}^i\vec{g}_{i(\nu)}+\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}$ brzine tačaka M_ν materijalnog sistema u generalisanim koordinatama q^i i generalisanim brzinama $\dot{q}^i$, moguće je izraz za $\delta' A^{in}$ napisati u obliku:

$\delta' A^{in}=-\sum_\nu m_\nu a_{i(\nu)}\delta q^i=-\delta q^i\sum_\nu m_\nu a_{i(\nu)}$

gde su: $a_{i(\nu)}=\vec{a}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)}$ i $a_{i(\nu)}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial\theta_\nu}{\partial q^i}$ kovarijantne koordinate vektora ubrzanja tačaka M_ν i $\theta_\nu=\frac{1}{2}v_\nu^2$.

Generalisane inercijalne sile sistema Q_i^{in} su, dakle:

$Q_i^{in}=\sum_\nu \vec{F}^{in}_{(\nu)}\cdot\vec{g}_{i(\nu)}=-\sum_\nu m_\nu\vec{a}_\nu\cdot\vec{g}_{i(\nu)} \Rightarrow Q_i^{in}=-\sum_\nu m_\nu a_{i(\nu)}$, odnosno:

$Q_i^{in}=-\sum_\nu m_\nu\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial\theta_\nu}{\partial q^i}\right) \Rightarrow Q_i^{in}=\frac{\partial T}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}$,

gde je: $T=\sum_\nu m_\nu\theta_\nu$ - kinetička energija holonomnog materijalnog sistema.

Upoređujući izraz za generalisane inercijalne sile sistema, sa izrazom za kovarijantne koordinate ubrzanja reprezentativne tačke M, može se zaključiti da je:

$W_i=-Q_i^{in}$ i $W_i=\sum_\nu m_\nu a_{i(\nu)}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}$.

Opšta jednačina dinamike u generalisanim koordinatama. - Opšta jednačina dinamike za holonomne i neholonomne materijalne sisteme čije je kretanje ograničeno idealnim geometrijskim i kinematskim vezama ima oblik:

$\sum_{\nu}(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu)\cdot\delta\vec{r}_\nu = 0 \Rightarrow \sum_{\nu}(\vec{F}_\nu + \vec{F}_\nu^{in})\cdot\delta\vec{r}_\nu = 0,$

S obzirom na izraze za elementarne virtuelne radove aktivnih i inercijalnih sila, $\delta' A$ i $\delta' A^{in}$ opšta jednačina dinamike, dalje, postaje:

$\delta' A + \delta' A^{in} = 0,$

i izražava tvrđenje Lagranž-Dalamberovom principa da je ukupan rad aktivnih i inercijalnih sila mehaničkog sistema na ma kom elementarnom virtuelnom pomeranju materijalnog sistema jednak nuli.

Vodeći računa o tome da je: $\delta' A = Q_i \delta q^i$ i $\delta' A^{in} = Q_i^{in}\delta q^i$, gornja jednačina u odnosu na generalisane koordinate q^i mehaničkog sistema glasi:

$(Q_i + Q_i^{in})\,\delta q^i = 0,$

i predstavlja opštu jednačinu dinamike u generalisanim koordinatama.

Lagranževe jednačine druge vrste. -

Teorema. - Diferencijalne jednačine kretanja holonomnog reonomnog mehaničkog sistema čije je kretanje ograničeno idealnim geometrijskim zadržavajućim vezama i čiji je broj stepeni n, su:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i\,, \quad i = 1,2,..n$

Dokaz. - Holonomni mehanički sistem koji ima n stepeni slobode, može da vrši n nezavisnih kretanja pa su elementarne virtuelne promene generalisanih koordinata q^i tog sistema, δq^i, $i = 1,2,\ldots,n$, međusobno nezavisne veličine. Jednačina: $(Q_i + Q_i^{in})\delta q^i = 0$, čija leva strana predstavlja linearnu formu upravo veličina δq^i, biće zadovoljena ako i samo ako koeficijent uz svaku od varijacija gen. koordinata bude jednak nuli u bilo kom trenutku t. Na taj način se dobija n jednačina:

$Q_i + Q_i^{in} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i\,, \quad i = 1,2,..n,$

koje se nazivaju Lagranževe jednačine druge vrste

Kao što je pokazano kinetička energija holonomnog nestacionarnog mehaničkog sistema ima oblik nehomogene kvadratne forme generalisanih brzina $\dot{q}^i$:

$T = T_2 + T_1 + T_0$, gde je $T_2 = \frac{1}{2}a_{ij}(t,q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j$; $T_1 = b_i(t,q^k)\dot{q}^i$ i $T_0 = \frac{1}{2}c_0(t,q^k)$,

pa je:

$\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}} = a_{ij}\dot{q}^j + b_i\,, \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}} = a_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^j\dot{q}^k + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial b_i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j + \frac{\partial b_i}{\partial t}$ i

i $\boxed{\frac{\partial T}{\partial q^i}} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial b_k}{\partial q^i}\dot{q}^k + \frac{1}{2}\frac{\partial c_0}{\partial q^i}$

S obzirom na strukturu članova na levoj strani Lagranževih jednačina druge vrste, kao i činjenice da su generalisane sile Q_i funkcije t, q^j i $\dot{q}^j$, tj.:

$Q_i = \sum_{\nu}\vec{F}_\nu(t,\vec{r}_\nu,\dot{\vec{r}}_\nu)\cdot\vec{g}_{i(\nu)}(t,q^k) \Rightarrow Q_i = \sum_{\nu}F_{i(\nu)}(t,q^k,\dot{q}^k) \Rightarrow Q_i = Q_i(t,q^k,\dot{q}^k),$

sledi da su Lagranževe jednačine druge vrste predstavljaju sistem od n diferencijalnih jednačina drugog reda po n funkcija $q^i = q^i(t)$. Opšte rešenje ovog sistema jednačina sadrži $2n$ integracionih konstanti koje se određuju iz $2n$ početnih uslova: $q_0^i = q^i(t_0)$ i $\dot{q}_0^i = \dot{q}^i(t_0)$. Ovim početnim uslovima jednoznačno je određeno početno stanje kretanja sistema, s obzirom da oni određuju početne položaje i početne brzine tačaka M_ν sistema:

$\vec{r}_{\nu 0} = \vec{r}_\nu(t_0)$ i $\vec{v}_{\nu 0} = \dot{q}_0^i \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}\right)_0 + \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)_0$.

Partikularni integral sistema Lagranževih jednačina II vrste: $q^i = q^i(t, q_0^i, \dot{q}_0^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ predstavlja u mehanici konačne jednačine kretanja materijalnog sistema u generalisanim koordinatama, odnosno reprezentativne tačke M tog sistema u R_n. U vezi sa tim treba se podsetiti da sistem diferencijalnih jednačina kretanja reprezentativne tačke holonomnog materijalnog sistema u R_n u kovarijantnom obliku: $W_i = Q_i$, gde su: W_i kovarijantne koordinate ubrzanja $\vec{W}$ reprezentativne tačke date izrazima $W_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}$, predstavlja Lagranževe jednačine druge vrste holonomnog mat. sistema.

Pošto Lagranževe jednačine druge vrste ne sadrži veličine reakcija idealnih veza, što znači da je problem određivanja reakcija idealnih veza odvojen od problema određivanja kretanja mehaničkog sistema. Naime, nakon određivanja kretanja sistema u generalisanim koordinatama $q^i = q^i(t)$, moguće je odrediti konačne jednačine kretanja tačaka M_ν sistema: $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q^i(t))$, kao i brzina $\vec{v}_\nu = \vec{v}_\nu(t)$ i ubrzanja $\vec{a}_\nu = \vec{a}_\nu(t)$ tih tačaka. Imajući ovo u vidu, moguće je sada odrediti rezultantu reakcija veza $\vec{R}_\nu$ u svakoj tački M_ν iz drugog Njutnovog zakona: $\vec{R}_\nu = m_\nu \vec{a}_\nu - \vec{F}_\nu$.

Takođe, reakcije veza je moguće dobiti iz diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke holonomnog materijalnog sistema: $\vec{W} = \vec{Q} + \vec{R}$, nakon određivanja njenih konačnih jednačina kretanja, $q^i = q^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots n$, iz jednačina: $W_i = Q_i$. U tom cilju potrebno je levu i desnu stranu jednačine: $\vec{W} = \vec{Q} + \vec{R}$, projektovati na pravce normala na prostor njenog kretanja R_n, tj. skalarno ih pomnožiti jediničnim vektorima: $\vec{m}^{(\alpha)} = \frac{1}{|\mathrm{grad}_{(R)} f^{(\alpha)}|} \mathrm{grad}_{(R)} f^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots p$ ($f^{(\alpha)}(t, \xi^\rho) = 0$ - jednačine geometrijskih stacionarnih veza)

<u>Struktura Lagranževih jednačina druge vrste za holonomne stacionarne mehaničke sisteme.</u> - U slučaju holonomnog stacionarnog mehaničkog sistema za koje je $\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = 0$, kinetička energija ima oblik: $T = \frac{1}{2} a_{ij}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j$, gde su $a_{ij}(q^k) = \sum_\nu m_\nu g_{ij(\nu)}$, tj. $a_{ij}(q^k) = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^j}$, koeficijenti matrice inercije, odnosno kovarijantne koordinate metričkog tenzora prostora R_n u reprezentativnoj tački. Kako je:

$\frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^j \dot{q}^k$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}\dot{q}^j$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^j \dot{q}^k$,

kao i: $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^j \dot{q}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j \dot{q}^k$ $\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^j \dot{q}^k = \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j \dot{q}^k\right)$,

to su kovarijantne koordinate ubrzanja reprezentativne tačke materijalnog sistema:

$W_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = a_{ij}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k \dot{q}^j$, tj.

$W_i = a_{ij}\ddot{q}^j + [jk,i]\dot{q}^j\dot{q}^k$,

gde su $[jk,i]$ Kristofelovi simboli I vrste formirani u odnosu koeficijente metričkog tenzora $a_{ij} = a_{ij}(q^k)$. Jednačine:

$a_{ij}\ddot{q}^j + [jk,i]\dot{q}^j\dot{q}^k = Q_i$,

predstavljaju Lagranževe jednačine II vrste u kovarijantnom obliku.

Vodeći dalje računa o tome da je: $a_{ij}\ddot{q}^j = \frac{d}{dt}(a_{ij}\dot{q}^j) - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^j\dot{q}^k$, kao i da je: $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} = [jk,i] + [ik,j]$, izraz za W_i postaje: $W_i = \frac{d}{dt}(a_{ij}\dot{q}^j) - [ik,j]\dot{q}^j\dot{q}^k$, odnosno $W_i = \frac{d}{dt}(a_{ij}\dot{q}^j) - \left\{ {l \atop ik} \right\}(a_{lj}\dot{q}^j)\dot{q}^k$, gde je: $\left\{ {l \atop ik} \right\} = a^{lj}[ik,j]$, Kristofelov simbol II vrste konfiguracionog prostora holonomnog stacionarnog mehaničkog sistema R_n.

Imajući, takođe, u vidu da je: $W_i = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{g}_i = \frac{Du_i}{dt}$, gde su $u_i = a_{ij}\dot{q}^j$ kovarijantne koordinate vektora brzine reprezentativne tačke: $\vec{u} = \dot{q}^i\vec{g}_i$, sledi da se Lagranževe jednačine u kovarijantnom obliku mogu napisati u obliku:

$\frac{D(a_{ij}\dot{q}^j)}{Dt} = Q_i$.

Lagranževe jednačine druge vrste u kontravarijantnom obliku: $W^i = Q^i$, u razvijenom obliku su:

$\ddot{q}^i + \left\{ {i \atop jk} \right\}\dot{q}^j\dot{q}^k = Q^i$, odnosno $\frac{D\dot{q}^i}{Dt} = Q^i$,

s obzirom da je: $W^i = a^{ij}W_j = \ddot{q}^i + \left\{ {i \atop jk} \right\}\dot{q}^j\dot{q}^k$, $W^i = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{Du^i}{Dt}$, $u^i = \dot{q}^i$, i $Q^i = a^{ij}Q_j$.

Kontravarijantne generalisane sile Q^i imaju dimenzije odgovarajućih generalisanih ubrzanja $\ddot{q}^i$, dok kovarijantne generalisane sile Q_i imaju dimenzije sile, ako generalisane koordinate q^i imaju dimenzije dužine ili dimenzije momenta sile, ako su generalisane koordinate q^i bezdimenzionalne veličine (uglovi).

Sistem potencijalnih sila. - Ako na tačke M_ν materijalnog sistema u bilo kom položaju tog sistema u prostoru deluje sistem sila $(\vec{F}_1^p, \vec{F}_2^p \dots \vec{F}_\nu^p \dots \vec{F}_N^p)$ takav da svaka od sila $\vec{F}_\nu^p$ u tački M_ν zavisi od položaja materijalnog sistema u odnosu na referentni objekat: $\vec{F}_\nu^p = \vec{F}_\nu^p(\vec{r}_\mu) \Rightarrow \vec{F}_\nu^p = \vec{F}_\nu^p(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$, pri čemu je elementarni rad posmatranog sistema sila jednak totalnom diferencijalu skalarne funkcije $E_p = E_p(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$, tako da važi: $\delta A^p = \sum_\nu \vec{F}_\nu^p \cdot d\vec{r}_\nu = -dE_p(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$, onda takav sistem sila predstavlja sistem, polje potencijalnih stacionarnih sila.

Kako je: $\delta A^p = \sum_\nu F_{\nu x}^p dx_\nu + F_{\nu y}^p dy_\nu + F_{\nu z}^p dz_\nu$; $dE_p = \sum_\nu \frac{\partial E_p}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial E_p}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial E_p}{\partial z_\nu}dz_\nu$ i $\delta A^p = -dE_p$, to su potencijalne sile $\vec{F}_\nu^p$ koje deluju na tačke M_ν materijalnog sistema:

$\vec{F}_\nu^p = -\mathrm{grad}_{(\nu)} E_p$, tj. $\vec{F}_\nu^p = -\frac{\partial E_p}{\partial x_\nu}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y_\nu}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z_\nu}\vec{k}$.

Funkcija $E_p = E_p(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ predstavlja potencijalnu energiju materijalnog sistema u stacionarnom potencijalnom polju sila.

Rad sistema potencijalnih sila $(\vec{F}_1^p, \dots \vec{F}_\nu^p \dots \vec{F}_N^p)$ na konačnom pomeranju sistema materijalnih tačaka M_ν ne zavisi od oblika trajektorija tačaka M_ν, već samo od njihovog početnog i krajnjeg položaja pri posmatranom pomeranju mat. sistema. U slučaju da su trajektorije tačaka M_ν pri tome zatvorene krive linije, rad potencijalnih sila koje deluju na mat. sistem jednak je nula.

Virtuelni rad sistema potencijalnih sila $(\vec{F}_1^p, \dots \vec{F}_\nu^p \dots \vec{F}_N^p)$ na bilo kojem veznama dozvoljenom elementarnom virtuelnom pomeranju $\delta\vec{r}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, u proizvoljnom položaju tog mat. sistema na vezama je: $\delta' A^{\Pi} = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}^{\Pi} \cdot \delta\vec{r}_{\nu} = -\sum_{\nu} \operatorname{grad}_{(\nu)} E_p \cdot \delta\vec{r}_{\nu} \Rightarrow$

$$\delta' A^{\Pi} = -\sum_{\nu} \frac{\partial E_p}{\partial x_{\nu}} \delta x_{\nu} + \frac{\partial E_p}{\partial y_{\nu}} \delta y_{\nu} + \frac{\partial E_p}{\partial z_{\nu}} \delta z_{\nu} \Rightarrow \delta' A^{\Pi} = -\delta E_p .$$

Ako su sile $\vec{F}_{\nu}^{\Pi} = \vec{F}_{\nu}^{\Pi}(t, \vec{r}_{\nu})$ onda one pripadaju nestacionarnom polju potencijalnih sila, a potencijalna energija materijalnog sistema u takvom polju je: $E_p = E_p(t, x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu})$.
Elementarni rad nestacionarnih potencijalnih sila koje deluju na tačke M_{ν} mat. sistema je: $\delta A^{\Pi} = -\sum_{\nu} \operatorname{grad}_{(\nu)} E_p \cdot d\vec{r}_{\nu} \Rightarrow \delta A^{\Pi} = -(dE_p - \frac{\partial E_p}{\partial t} dt)$,
dok je njihov elementarni virtuelni rad: $\delta' A^{\Pi} = -\sum_{\nu} \operatorname{grad}_{(\nu)} E_p \cdot \delta\vec{r}_{\nu} \Rightarrow \delta' A^{\Pi} = -\delta E_p$.
Pri prelasku na generalisane koordinate q^i holonomnog nestacionarnog mat. sistema je: $\vec{r}_{\nu} = \vec{r}_{\nu}(t, q^i)$; funkcija potencijalne energije mat. sistema u nestacionarnom potencijalnom polju sila je: $\Pi = \Pi(t, q^i) = E_p[t, x_{\nu}(t, q^i), y_{\nu}(t, q^i), z_{\nu}(t, q^i)]$.
Imajući u vidu da je: $\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = \sum_{\nu} \operatorname{grad}_{(\nu)} E_p \cdot \vec{g}_{i(\nu)}$, gde je $\vec{g}_{i(\nu)} = \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q^i} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial q^i}\vec{i} + \frac{\partial y_{\nu}}{\partial q^i}\vec{j} + \frac{\partial z_{\nu}}{\partial q^i}\vec{k}$,
to je: $\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = -\sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}^{\Pi} \cdot \vec{g}_{i(\nu)}$, to je generalisana potencijalna sila $Q_i^{\Pi} = Q_i^{\Pi}(t, q^k)$:
$\boxed{Q_i^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}}$. U tom smislu je elementarni virtuelni rad potencijalnih sila u generalisanim koordinatama je: $\delta' A = Q_i^{\Pi} \delta q^i \Rightarrow \boxed{\delta' A^{\Pi} = -\delta \Pi = -\delta E_p}$.
Međutim, kako je: $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial E_p}{\partial t} + \sum_{\nu} \frac{\partial E_p}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial y_{\nu}} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z_{\nu}} \frac{\partial z_{\nu}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial t} =} \frac{\partial E_p}{\partial t} + \sum_{\nu} \operatorname{grad}_{(\nu)} E_p \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t}$,
to će elementarni rad nestacionarnog potencijalnog sistema sila biti:
$\delta A^{\Pi} = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}^{\Pi} \cdot d\vec{r}_{\nu} = -\sum_{\nu} \operatorname{grad}_{(\nu)} E_p \cdot d\vec{r}_{\nu} \Rightarrow \boxed{\delta A^{\Pi} = -(dE_p - \frac{\partial E_p}{\partial t} dt)}$,
odnosno: $\delta A^{\Pi} = -(d\Pi - \frac{\partial E_p}{\partial t} dt)$, tj: $\boxed{\delta A^{\Pi} = -(d\Pi - \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt) - \sum_{\nu} \operatorname{grad}_{(\nu)} E_p \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} dt}$
Ako je $\frac{\partial \Pi}{\partial t} \equiv 0$ potencijalne sile predstavljaju konzervativne sile.
Iz izraza za elementarni rad potencijalnih nestacionarnih sila sledi da taj rad zavisi od „oblika trajektorije" kojom se sistem kreće pri prelasku iz jednog u drugi položaj.
U daljoj analizi potrebno je izvršiti podelu sila u sistemu na potencijalne $\vec{F}_{\nu}^{\Pi}$ i nepotencijalne $\vec{F}_{\nu}^{*}$ sile: $\vec{F}_{\nu} = \vec{F}_{\nu}^{\Pi} + \vec{F}_{\nu}^{*}$, pa se i generalisane sile mogu razdvojiti na potencijalne Q_i^{Π} i nepotencijalne $Q_i^{*} = Q_i^{*}(t, q^j, \dot{q}^j)$ generalisane sile, tj.: $Q_i = Q_i^{\Pi} + Q_i^{*}$, gde je: $Q_i^{*} = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}^{*} \cdot \vec{g}_{i(\nu)}$.

Dodatak. - Stabilnost ravnoteže konzervativnog mehaničkog sistema

Položaj ravnoteže materijalnog sistema je takav položaj u kome će sistem mirovati sve vreme, ako se u njemu nalazio u trenutku t_0 i ako su tada sve njegove brzine bile jednake nuli. U konfiguracionom prostoru u kome je položaj sistema određen generalisanim koordinatama q^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, gde je n-broj stepeni slobode i na koji deluju generalisane sile $Q_i = Q_i(q^j, \dot{q}^j)$, uslovi ravnoteže mehaničkog sistema su: $Q_i(q^j, \dot{q}^j = 0) = 0$. Stanje ravnoteže mehaničkog sistema je: $q^j = q^j_*$, $\dot{q}^j = 0$, $\forall t > t_0$, gde su $q^j = q^j_*$ realna rešenja napred navedenih uslova njegove ravnoteže.
Potreban uslov da postoji oscilatorno kretanje mehaničkog sistema je da u tom konfiguracionom prostoru postoji položaj stabilne ravnoteže. O stabilnosti položaja ravnoteže može da se sudi samo na osnovu ponašanja sistema u njegovoj okolini, tj. na osnovu njegovog poremećenog kretanja.

U nastavku će se ne ugrožavajući opštost izlaganja, početak koordinatnog sistema generalisanih koordinata postaviti u ravnotežnom položaju ($q^i_* = 0$), pa će stanje ravnoteže biti: $q^i = 0$ i $\dot{q}^i = 0$, $\forall t \geq t_0$. Prema Ljapunovljevoj teoriji stabilnosti mehaničkih sistema, stanje ravnoteže $q^i = 0, \dot{q}^i = 0$ mehaničkog sistema biće stabilno ukoliko sistem pri dovoljno malim početnim poremećajima tog stanja: $q^i_0 = q^i(t_0)$ i $\dot{q}^i_0 = \dot{q}^i(t_0)$, vrši kretanje $q^i = q^i(t)$ u nekoj maloj, unapred zadatoj, okolini ε položaja ravnoteže, imajući pri tome proizvoljno male brzine.

Prema Lagranž-Dirihleovoj teoremi, pak, položaj konzervativnog sistema sa geometrijskim stacionarnim vezama u kome potencijalna energija ima izolovan minimum, predstavlja položaj stabilne ravnoteže sistema. Prema ovoj teoremi, dakle, ispitivanje stabilnosti ravnotežnog stanja mehaničkog sistema sa stacionarnim vezama na koji deluju konzervativne sile svodi se na ispitivanje minimuma potencijalne energije tog sistema $\Pi = \Pi(q^i)$, koja zavisi od svih generalisanih koordinata sistema. Pošto su generalisane potencijalne sile: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}$, uslovi ravnoteže posmatranog sistema ima oblik: $\partial \Pi / \partial q^i = 0$, obl se ispitivanje stabilnosti određenih položaja ravnoteže zasniva na ispitivanju tipa tog ekstremuma pomoću izvoda višeg reda. Naime, ako se funkcija $\Pi = \Pi(q^i)$ razvije u red u okolini položaja ravnoteže $q^i = q^i_*$ biće: $\Pi(q^i) = \Pi(q^i_*) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}\right)_{q^k = q^k_*} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}\right)_{q^k = q^k_*}(q^i - q^i_*)(q^j - q^j_*)$, tj. za $q^i_* = 0$:
$\Pi(q^i) = \Pi(q^i_* = 0) + \frac{1}{2} c_{ij} q^i q^j$, gde su $c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}\right)_{q^k = 0}$. Ova aproksimacija funkcije potencijalne energije $\Pi = \Pi(q^j)$ predstavlja homogenu kvadratnu formu generalisanih koordinata i ona će imati minimum u položaju $q^k_* = 0$, ukoliko matrica koeficijenata c_{ij}, $[c_{ij}]^{n \times n}$ zadovoljava Silvesterov kriterijuma:

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 \ldots, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Kinetička energija razmatranog sistema je $T = \frac{1}{2} a_{ij}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j$, pa se kinetička energija tog mehaničkog sistema u okolini ravnotežnog položaja: $q^i_* = 0$, može dati u aproksimativnom obliku: $T \approx \frac{1}{2} a_{ij}(q^k = q^k_*) \dot{q}^i \dot{q}^j$, u kojoj su koeficijenti inercije konstantne veličine. Lagranževe jednačine II vrste u okolini položaja stabilne ravnoteže u linearizovanom obliku imaju oblik: $a_{ij} \ddot{q}^j + c_{ij} q^j = 0$ i predstavljaju dif. jednačine malih oscilacija mehaničkog sistema u okolini položaja stabilne ravnoteže.

Snaga sila. - Snaga sila u posmatranom trenutku t je po definiciji:

$$P(t) = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu}{dt} \Rightarrow P(t) = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \vec{v}_\nu.$$

Za holonomne reonomne sisteme je: $P = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\dot{q}^i \vec{g}_{i(\nu)} + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) \Rightarrow P = Q_i \dot{q}^i + \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}$

Za holonomne stacionarne sisteme je: $P = Q_i \dot{q}^i$

Disipativne sile. - Za nepotencijalne generalisane sile sistema čija je snaga negativna ili jednaka nuli, $Q^*_i \dot{q}^i \leq 0$, nazivaju se disipativne.

Specijalni slučaj disipativnih sila su linearne disipativne sile:

$Q^*_i = -b_{ij} \dot{q}^j$, $b_{ij} = b_{ji}$ i $b_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \geq 0$

Snaga ovih sila je: $P = Q^*_i \dot{q}^i = -b_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \leq 0$.

Funkcija $\Phi = \frac{1}{2} b_{ij}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j \geq$ zove se Rejlijeva disipativna funkcija i iz nje se mogu odrediti linearne disipativne sile i njihova snaga: $Q^*_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^i}$ i $P = Q^*_i \dot{q}^i = -2\Phi$.

Primer linearnih disipativnih sila su sile viskoznog trenja, sile otpora kretanja tela kroz sredinu. Kada je viskozna sredina nepokretne ove sile su proporcionalne brzinama tačaka mat. sistema:

$\vec{F}_v = -b_v \vec{v}_v = -b_v \dot{q}^i \vec{g}_{i(v)}$, $b_v \geq 0$ – koeficijenti otpora $(\partial \vec{r}_v / \partial t = 0)$

$Q_i^* = \sum_v \vec{F}_v \cdot \vec{g}_{i(v)} = -\sum_v b_v \dot{q}^j \vec{g}_{i(v)} \vec{g}_{j(v)}$

tj. $Q_i^* = -b_{ij} \dot{q}^j$, $b_{ij} = \sum_v b_v g_{ij(v)}$.

<u>Giroskopske sile.</u> – Nepotencijalne sile Q_i^* koje ne vrše rad, odnosno, čija je snaga jednaka nuli:

$Q_i^* \dot{q}^i = 0$,

nazivaju se giroskopske sile. Linearne giroskopske sile imaju oblik:

$Q_i^* = \gamma_{ij} \dot{q}^j$,

gde su koeficijenti: $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}(t, q^i)$, antisimetrični:

$$[\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma_{n1} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

Lagranževa funkcija (kinetički potencijal)

Lagranževe jednačine II vrste holonomnog sistema sa n stepeni slobode na koji deluju i potencijalne i nepotencijalne sile su:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*$$

Funkcija:

$L(t, q^i, \dot{q}^i) = T(t, q^i, \dot{q}^i) - \Pi(t, q^i)$

naziva se <u>Lagranževa funkcija</u> ili <u>Lagranžijan</u> materijalnog sistema i predstavlja razliku T i Π. Lagranževe jednačine II vrste se preko Lagranževe funkcije mogu napisati u obliku: (1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i^* \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)$$

Ako na sistem ne deluju nepotencijalne sile, tj. <u>za $Q_i^* = 0$, stanje kretanja holonomnog sistema opisano je jednom skalarnom funkcijom, tj. Lagranžijanom:</u> (2)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

Struktura Lagranževe funkcije u slučaju holonomnih reonomnih sistema je: (3)

$L = L_2 + L_1 + L_0$,

gde je:

$L_2 = T_2$, $L_1 = T_1$, $L_0 = T_0 - \Pi$, što znači da je Lagranžijan, kao i T, kvadratna funkcija generalisanih brzina.

Funkcije oblika:

$$L^*(t, q^i, \dot{q}^i) = L(t, q^i, \dot{q}^i) + \frac{df(t, q^i)}{dt}$$

takođe zadovoljavaju jednačine (1), jer važi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j}\dot{q}^j\right] - \frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j}\dot{q}^j\right] \equiv 0$$

<u>Prvi integrali Lagranževih jednačina II vrste</u>. - Pod prvim integralom diferencijalnih jednačina kretanja sistema podrazumeva se funkcija $f = f(t, \vec{r}_v, \vec{v}_v)$ koja ima konstantnu vrednost duž „trajektorije" materijalnog sistema (njegove reprezentativne tačke) određene diferencijalnim jednačinama kretanja. Dakle, ako je:

$$f(t, \vec{r}_v, \vec{v}_v) = const,$$

tada je:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_v grad_{(v)} f \cdot \vec{v}_v + \sum_v grad_{(\vec{v}_v)} f \cdot \vec{a}_v \equiv 0,$$

za $\vec{a}_v = \frac{1}{m_v}(\vec{F}_v + \vec{R}_v)$

Prvi integrali kretanja mat. sistema u konfiguracionom prostoru R_n imaju oblik:

$$f(t, q^i, \dot{q}^i) = const$$

i oni su saglasni sa Lagranževim jednačinama II vrste, tako da važi:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i \equiv 0,$$

za $\ddot{q}^i = G^i(t, q^j, \dot{q}^j)$

<u>Ciklična koordinata i ciklični integral</u>. - Ako jedna od generalisanih koordinata, npr. q^K, $1 \le K \le n$, ne figuriše eksplicitno u Lagranževoj funkciji sistema i ako je $Q_K^* = 0$, tada jednačina:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K} - \frac{\partial L}{\partial q^K} = 0,$$

ima prvi integral, tzv. ciklični integral, koji glasi:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K} = const,} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial q^K} = 0, \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^K} = const \right)$$

Generalisana koordinata q^K za koju je: $\partial L / \partial q^K = 0$ i $Q_K^* = 0$ zove se <u>ciklična koordinata</u>.

Struktura cikličnog integrala je:

$$a_{iK}\dot{q}^i + a_K = const.$$

Ciklični integral predstavlja linearnu funkciju generalisanih brzina i u određenim situacijama u vezi je sa zakonom održanja količine kretanja i momenta količine kretanja. Egzistencija cikličnog integrala zavisi od izbora generalisanih koordinata. Sistem u jednom sistemu gen. koordinata može da ima, a u drugom da nema ciklični integral.

Jakobijev integral. – Ako Lagranževa funkcija holonomnog mehaničkog sistema ne zavisi eksplicitno od vremena, tj: $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, i ako na sistem ne deluju nepotencijalne sile $Q_i^*=0,\ i=1,2,\dots n$, tada Lagranževe jednačine imaju prvi integral:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L=const$$

Dokaz. – $\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right]\dot{q}^i=0$; $\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i$;

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i \Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L=const.$$ – Jakobijev integral

a) holonomni stacionarni sistemi:

$L=T_2-\Pi$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i=\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i=2T_2$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L=T_2+\Pi=T+\Pi=E$

E – ukupna mehanička energija.

$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(T_2+\Pi)=\frac{\partial \Pi}{\partial t}=0 \Rightarrow \Pi=\Pi(q^i)$)

Dakle, ako na holonomni stacionarni sistem deluju konzervativne sile $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}=0\right)$ Jakobijev integral ima oblik: $E=const$, tj. predstavlja integral energije

b) holonomni reonomni sistem:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L=(2T_2+T_1)-(T_2+T_1+T_0-\Pi)=T_2-T_0+\Pi$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow \boxed{T_2-T_0+\Pi=const}$$ – Jakobijev integral ima oblik Penleveovog integrala (opšti integral energije)

Teorema o promeni mehaničke energije. – Teorema o promeni mehaničke energije i zakoni njenog održanja spadaju u najznačajnija tvrđenja klasične mehanike. Razlog za to leži u koncepciji po kojoj se mehaničko kretanje može transformisati u neke druge vidove kretanja materije.

Kako je ukupna mehanička energija sistema:

$E = T + \Pi$

i kako za holonomne sisteme važi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q_i^* \dot{q}^i,$$

gde je:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L} = T_2 - T_0 + \Pi = \boxed{E - (T_1 + 2T_0)}$$

i $\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} - \dfrac{\partial \Pi}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = Q_i^* \dot{q}^i - \frac{\partial}{\partial t}(T - \Pi) + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0)}$$

zakon promene meh. energije holonomnog mat. sistema

a) za skleronoman nekonzervativan sistem:

$T_1 = T_0 = 0$ i $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dfrac{dE}{dt} = Q_i^* \dot{q}^i + \dfrac{\partial \Pi}{\partial t}$

b) za skleronoman nekonzervativan sistem koji je pod dejstvom potencijalnih stacionarnih sila:

$T_1 = T_0 = 0, \quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dfrac{dE}{dt} = Q_i^* \dot{q}^i$

c) za skleronoman konzervativan sistem koji se kreće u stacionarnom polju potencijalnih sila

$T_1 = T_0 = 0, \quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad Q_i^* = 0 \Rightarrow E = const$

Hamiltonova mehanika

Integralni principi

Hamiltonova mehanika

Uvod. – U Lagranževoj mehanici veličine stanja su $t, q^i, \dot{q}^i$, pa se ove promenljive zovu i Lagranževe promenljive, a postupak izvođenja diferencijalnih jednačina kretanja i njihova analiza u n-dimenzionalnom konfiguracionom prostoru Lagranžev formalizom.
Formiranje novih matematičkih modela kretanja materijalnih sistema zasniva se na uvođenju novih veličina stanja materijalnih sistema. U Hamiltonovom formalizmu stanje kretanje kretanja materijalnih sistema određeno je Hamiltonovim (kanonskim) promenljivim koje čine: vreme t, generalisane koordinate q^i i generalisani impulsi p_i, $i=1,2...n$, umesto generalisanih brzina $\dot{q}^i$.
Postupak u kome se sa koordinata i gen. brzina prelazi na gen. koordinate i gen. impulse kao nezavisne promenljive naziva se Ležandrova transformacija.
Takođe, u Hamiltonovom formalizmu osnovna energetska funkcija je, umesto Lagranževe funkcije, Hamiltonova funkcija, tj. Hamiltonijan.

Ležandrova transformacija. – Neka je data funkcija $X=X(x^i, \alpha^r)$, $i=1,...,n$ i $r=1,2,...,m$, gde su x^i aktivne nezavisne promenljive, a α^r pasivne nezavisne promenljive funkcije X. Takođe, neka postoji transformacija promenljivih x^i u promenljive y_i po formuli:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x^i}, \quad y_i = y_i(x^j, \alpha^r) \quad i \quad \det\left[\partial y_i / \partial x^j\right] \neq 0, \qquad (1)$$

tako da postoji inverzna transformacija:

$$x^i = x^i(y_j, \alpha^r) \qquad (2)$$

Pod navedenim uslovima postoji funkcija $Y=Y(y_j,\alpha^r)$ koja je data izrazom:

$$Y = Y(y_j;\alpha^r) = (y_i x^i - X)_{x^i \to y_i} \Rightarrow Y = Y(y_j;\alpha^r) = y_i \hat{x}^i - \hat{X}, \qquad (3)$$

gde su $\hat{x}^i$ označene funkcije (2), a sa $\hat{X}$ funkcija:

$$\hat{X} = \hat{X}(y_i, \alpha^r) \quad i \quad \hat{X} = X(x^i = \hat{x}^i(y_j, \alpha^r), \alpha^\rho), \quad (x^i = \hat{x}^i) \qquad (4)$$

pomoću koje je moguće proizvesti inverznu transformaciju (2), a po formuli:

$$x^i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \qquad (5)$$

pri čemu je

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha^r} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha^r}. \qquad (6)$$

Dokaz.- Vodeći računa o (2), (3) i (4) biće:

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}\left(y_j\hat{x}^j-\hat{X}\right)=\hat{x}^i+y_j\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial y_i}-\frac{\partial\hat{X}}{\partial y_i}=\hat{x}^i+y_j\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial y_i}-\frac{\partial X}{\partial x^j}\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial y_i},$$

pa je: $\frac{\partial Y}{\partial y_i}=\hat{x}^i+y_j\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial y_i}-y_j\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial y_i} \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial y_i}=x^i$

Takođe je:

$$\frac{\partial Y}{\partial\alpha^r}=\frac{\partial}{\partial\alpha^r}\left(y_i\hat{x}^i-\hat{X}\right)=y_i\frac{\partial\hat{x}^i}{\partial\alpha^r}-\frac{\partial X}{\partial\alpha^r}-\frac{\partial X}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\hat{x}^i}{\partial\alpha^r}\Rightarrow\frac{\partial Y}{\partial\alpha^r}=-\frac{\partial X}{\partial\alpha^r}$$

Da bi se primenom opisane Ležandrove transformacije prešlo sa Lagranževih i Hamiltonove promenljive, potrebno je Lagranževu funkciju holonomnih mehaničkih sistema, $L=L(t,q^i,\dot{q}^i)$ posmatrati kao funkciju X u kojoj su aktivne promenljive $\dot{q}^i$ $(x^i=\dot{q}^i)$, a pasivne promenljive t i q^i $(\alpha^r=t,q^i)$. Nove nezavisne promenljive Ležandrove transformacije biće generalisani impulsi $(y_i=p_i)$, a ulogu funkcije Y pomoću koje se generiše inverzna transformacija ima Hamiltonova funkcija $H=H(t,q^i,p_i)$.

Generalisani impulsi.- Prema Ležandrovim transformacija veza između generalisanih impulsa p_i i generalisanih brzina $\dot{q}^i$ je:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i} \qquad (7)$$

(potencijalna energija $\Pi=\Pi(t,q^i)$ ne zavisi od generalisanih brzina)

U slučaju reonomnih mehaničkih sistema relacije (7) su:

$$p_i=a_{ij}\dot{q}^j+b_i. \qquad (8)$$

Iz ovog sistema jednačina određuju se generalisane brzine kao funkcija veličina: t, q^i i p_i. Prema teoremi o egzistenciji inverzne funkcije, sistem jednačina (8) se može rešiti po generalisanim brzinama pošto je:

$$\det\left[\frac{\partial p_i}{\partial\dot{q}^j}\right]=\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\dot{q}^j}\right]=\det[a_{ij}]\neq 0 \qquad (9)$$

tako da je:

$$\dot{q}^i=a^{ij}p_j-b^i \qquad (10)$$

gde je: $b^i=a^{ij}b_j$ (11)

Hamiltonova funkcija.- Hamiltonova funkcija, kao funkcija Hamiltonovih (kanonskih) promenljivih: t, q^i i p_i, $H=H(t,q^i,p_i)$ iz koje se mogu izvesti inverzne transformacije (10) Ležandrovog tipa, je:

$$H=p_i\hat{q}^i-\hat{L}, \qquad (12)$$

gde je prema (10):

$$\hat{q}=a^{ij}p_j-b^i, \qquad (13)$$

i $\hat{L}=L(t,q^i,\dot{q}^i=\hat{q}^i=a^{ij}p_j-b^i)$, (14) Vodeći računa da je:

$$p_i\dot{q}^i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = T_2 - T_0 + \Pi,$$

to je Hamiltonova funkcija (12):

$$H(t,q^i,p_i) = (p_i\dot{q}^i - L)_{\dot{q}^i=\hat{q}^i} = (T_2 - T_0 + \Pi)_{\dot{q}^i=\hat{q}^i},$$

odnosnosno:

$$H(t,q^i,p_i) = \hat{T}_2 - T_0 + \Pi = \frac{1}{2}a_{mn}(a^{mi}p_i - b^m)(a^{nj}p_j - b^n) - T_0 + \Pi. \quad (15)$$

Sređivanjem (15) dobija se struktura Hamiltove funkcije:

$$H = H_2 + H_1 + H_0, \quad (16)$$

gde je: $H_2 = \frac{1}{2}a^{ij}p_ip_j$, $H_1 = -b^ip_i$ i $H_0 = \frac{1}{2}b^ib_i - T_0 + \Pi$ (17)

Prema (15), (16) i (17) Hamiltonova funkcija je energetskog tipa, a po svojoj strukturi je nehomogena forma generalisanih impulsa. Ako je mehanički sistem stacionaran onda je: $T_1 = 0$ i $T_0 = 0$, pa je:

$$H(t,q^i,p_i) = \hat{T}_2 + \Pi(t,q^i) \quad i \quad H(t,q^i,p_i) = \frac{1}{2}a^{ij}p_ip_j + \Pi(t,q^i), \quad (18)$$

što znači da Hamiltonova funkcija ukupna mehanička energija sistema.

Za Hamiltonove funkcije, s obziroma na svojstva (5) i (6) transformacija Ležandrovog tipa, važi:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad i \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}. \quad (20)$$

Hamiltonove (kanonske) jednačine.- Sistem jednačina (19), njih n, uspostavlja vezu između veličina stanja q^i i p_i u formi diferencijalne jednačine prvog reda po funkcijama $q^i = q^i(t)$. Zbog toga se za ovaj sistem jednačina može reći da je kinematskog tipa.

Drugi sistem od n diferencijalnih jednačina po 2n kanonskih promenljivih direktno se može dobiti iz Lagranževih jednačina druge vrste: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i^*(t,q^i,\dot{q}^i)$.

Vodeći računo o (7) i (20) ove jednačine se mogu napisati u obliku:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \hat{Q}_i^*, \quad (21)$$

gde su: $\hat{Q}_i^* = Q_i^*(t,q^i,\dot{q}^i = \hat{q}^i)$ - nekonzervativne sile u kanonskim promljivim

Sistem jednačina (21) po svojoj formi predstavlja sistem diferencijalnih jednačina prvog reda po funkcijama $p_i = p_i(t)$ i zbog toga se za ovaj sistem jednačina može reći da je dinamičkog tipa.

Dakle, Hamiltonove (kanonske) jednačine predstavljaju sistem od 2n diferencijalnih jednačina prvog reda po 2n kanonskih promenljivih:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad &(21)\\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \hat{Q}_i^* \quad &(22) \end{aligned}}$$

Za rešavanje sistema jednačina (21) i (22) potrebno je zadati 2n početnih uslova: $q_0^i = q^i(t_0)$ i $p_{i0} = p_i(t_0)$.
Struktura Hamiltonovih jednačina posebno je pogodna za numeričko određivanje konačnih jednačina kretanja mehaničkog sistema.
Kanonske jednačine se mogu posmatrati i kao diferencijalne jednačine kretanja fazne tačke u faznom prostoru. Položaj fazne tačke u afinom 2n-dimenzionalnom faznom prostoru kanonskih promenljivih q^i i p_i određen je uređenom 2n-torkom $(q^1, q^2, \ldots, q^n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Fazna tačka određuje stanje sistema u posmatranom trenutku. Pri evoluciji sistema fazna tačka opisuje faznu trajektoriju čije su jednačine: $q^i = q^i(t; q_0^i, p_{i0})$ i $p_i = p_i(t; q_0^i, p_{i0})$.
(koordinatne linije u afinom prostoru su prave linije, pa je u faznom prostoru moguće uvesti pravolinijski koordinatni sistem (pravougli i kosougli), čije koordinatne ose predstavljaju ose faznih promenljivih p_i i q^i.
Analiza kretanja mehaničkog sistema na bazi analize slike faznih trajektorija omogućava da se na relativno brz način utvrde: položaji stabilne i nestabilne ravnoteže sistema, odrede periodična kretanja sistema, istraže moguća kretanja sistema u funkciji parametara sistema, prouče procesi prelaza sistema iz jednog u drugo stabilno kretanje, pri različitim početnim uslovima.

Napomena.- U slučaju holonomnog stacionarnog mehaničkog sistema $(T = \frac{1}{2} a_{ij}(q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j)$, kovarijantne koordinate brzine reprezentativne tačke u R_n su: $u_i = a_{ij}\dot{q}^j$, pa za njih važi: $u_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$, tj. $u_i = p_i$.
Struktura Hamiltonovih jednačina (21), prema (18) je:
$$\dot{q}^i = a^{ij}p_j. \qquad (23)$$
Druga grupa kanonskih jednačina (22) ekvivalentna je diferencijalnim jednačinama kretanja reprezentativne tačke u pravcima osa koordinatnog sistema generalisanih koordinata q^i, u kovarijantnom obliku:
$W_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*$, gde su W_i kovarijantne koordinate ubrzanja reprezentativne tačke: $W_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{Dp_i}{Dt} \Rightarrow W_i = \dot{p}_i - \left\{ {k \atop ij} \right\} p_k \dot{q}^j \Rightarrow W_i = \dot{p}_i - \left\{ {k \atop ij} \right\} a^{jm} p_k p_m$,
tako da je struktura jednačina (22):
$$\dot{p}_i = \left\{ {k \atop ij} \right\} a^{jm} p_k p_m - \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*. \qquad (24)$$

Jakobijev integral - integral energije.- U nastavku će biti posmatrani samo holonomni stacionarni mehanički sistemi koji se kreću u polju potencijalnih sila, čije je kretanje opisano kanonskim jednačinama:
$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad (25)$$
gde je: $H = T + \Pi$; $H = \frac{1}{2}a^{ij}(q^k)p_i p_j + \Pi(t, q^i)$ (26)

Iz jednačina (25) sledi da je:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial t}\Rightarrow\ \frac{dH}{dt}\equiv\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (27)$$

Kada je mehanički sistem konzervativan tada je $\frac{\partial \Pi}{\partial t}=0$, pa je i $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, tj. $H=H(p_i,q^i)$, i prema (27) važi:

$$\frac{dH}{dt}=0\Rightarrow\ H(p_i,q^i)=const=h, \qquad (28)$$

gde h konstanta. Dakle, u slučaju holonomnog stacionarnog mehaničkog sistema koji se kreće u polju stacionarnih potencijalnih sila, Hamiltonova funkcija koja u ovom slučaju predstavlja ukupnu mehaničku energiju sistema, održava se konstantnom, što predstavlja prvi integral kanonskih jednačina (25) mehaničkog sistema.

Jednačina (28) predstavlja jednačinu hiperpovrši u faznom prostoru i na njoj se nalazi fazna trajektorija mehaničkog sistema.

Rautove jednačine. - Raut je predložio da se za osnovne promenljive koje karakterišu stanje kretanja sistema, pored vremena t, generalisanih koordinata q^i, $i=1,\dots n$, uzme deo generalisanih brzina, kao Lagranževih promenljivih: $\dot{q}^\alpha$, $\alpha=1,2,\dots,m$ i deo generalisanih impulsa, kao Hamiltonovih promenljivih: p_ν, $\nu=m+1,\dots,n$. Dakle, Rautove promeljive su: $t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha, q^\nu, p_\nu$, $\alpha=1,2,\dots,m$; $\nu=m+1, m+2,\dots,n$, gde su:

$$p_\nu=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\nu}\ \text{za}\ \det\left[\frac{\partial p_\nu}{\partial\dot{q}^s}\right]=\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\nu\partial\dot{q}^s}\right]\neq 0\Rightarrow\det[a_{\nu s}]\neq 0\ \text{i}\ L=L(t,q^i,\dot{q}^\alpha,\dot{q}^\nu) \qquad (29)$$

Inverzna transformacija transformacije (29) Ležandrovog tipa je:

$$\dot{q}^\nu=\hat{\dot{q}}^\nu(t,q^i,\dot{q}^\alpha,p_\nu)\quad(\hat{\dot{q}}^\nu=\dot{q}^\nu(t,q^i,\dot{q}^\alpha,p_\nu)), \qquad (30)$$

Funkcija $R=R(t,q^i,\dot{q}^\alpha,p_\nu)$:

$$R(t,q^i,\dot{q}^\alpha,p_\nu)=(p_\nu\dot{q}^\nu-L)_{\dot{q}^\nu=\hat{\dot{q}}^\nu},\ \text{tj.}\ R(t,q^i,\dot{q}^\alpha,p_\alpha)=p_\nu\hat{\dot{q}}^\nu-\hat{L}, \qquad (31)$$

gde je: $\hat{L}=L(t,q^i,\dot{q}^\alpha,\dot{q}^\nu=\hat{\dot{q}}^\nu(t,q^i,\dot{q}^\alpha,p_\nu))$, (32)

koja generiše inverznu transformaciju Ležandrovog tipa (30), naziva se Rautova funkcija i za nju važi:

$$\dot{q}^\nu=\hat{\dot{q}}^\nu=\frac{\partial R}{\partial p_\nu}, \qquad (33)$$

kao i:

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t},\ \frac{\partial R}{\partial q^i}=-\frac{\partial L}{\partial q^i},\ \frac{\partial R}{\partial\dot{q}^\alpha}=-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}, \qquad (34)$$

gde su $\dot{q}^\nu$ i p_ν aktivne promenljive, a t, q^i i $\dot{q}^\alpha$ pasivne promenljive.

Lagranževe jednačine druge vrste po generalisanim koordinatama q^α:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=Q_\alpha^*$, s obzirom na (34) dobijaju oblik:

$$\frac{d}{dt}\frac{(-R)}{\partial\dot{q}^\alpha}-\frac{\partial(-R)}{\partial q^\alpha}=\hat{Q}_\alpha^*, \qquad (35)$$

dok Lagranževe jednačine druge vrste po generalisanim koordinatama q^ν:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\nu}-\frac{\partial L}{\partial q^\nu}=Q_\nu^*$, s obzirom na (29) i (34) postaju:

$$\dot{p}_\nu = -\frac{\partial R}{\partial q^\nu} + \hat{Q}_\nu^* \qquad (36)$$

Sistem jednačina: (35), (29) i (36) predstavlja sistem Rautovih jednačina:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(-R)}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial(-R)}{\partial q^\alpha} = \hat{Q}_\alpha^*, \quad \alpha = 1,2,\ldots,m \qquad (37)$$

$$\text{i} \quad \dot{q}^\nu = \frac{\partial R}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial R}{\partial q^\nu} + \hat{Q}_\nu^*, \quad \nu = m+1,\ldots,n \qquad (38)$$

gde su: $\hat{Q}_i^* = Q_i^*(t, q^i, \dot{q}^\alpha, \dot{q}^\nu = \hat{\dot{q}}^\nu(t, q^i, \dot{q}^\beta, p_\nu))$, tj. $\hat{Q}_i^* = \hat{Q}_i^*(t, q^i, \dot{q}^\alpha, p_\nu)$

On se sastoji od m diferencijalnih jednačina drugog reda (37) i $2(n-m)$ diferencijalnih jednačina prvog reda (38). U jednačinama (37) ulogu Lagranževe funkcije igra funkcija $-R$, a u (38) ulogu Hamiltonove funkcije igra sama sama Rautova funkcija (31).

Ciklične koordinate. – Neka holonomni mehanički sistem koji se kreće u polju potencijalnih sila u izabranom sistemu generalisanih koordinata q^i, $i = 1,2,\ldots n$, ima $n-m$ cikličnih koordinata q^ν, $\nu = m+1,\ldots,n$:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\nu} = \frac{\partial H}{\partial q^\nu} = \frac{\partial R}{\partial q^\nu} = 0 \qquad (39)$$

Generalisani impulsi koji odgovaraju cikličnim koordinatama, p_ν, su:

$$\dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q^\nu} \Rightarrow \dot{p}_\nu = 0 \Rightarrow \boxed{p_\nu = C_\nu} \qquad (40)$$

gde su C_ν konstante. Jednačine (40) predstavljaju ciklične integrale kanonskih jednačina sistema. Hamiltonova i Rautova funkcija se, s obzirom na (40) mogu sada napisati u obliku:

$$\bar{H} = H(t, q^\alpha, p_\alpha, p_\nu = C_\nu) \Rightarrow \bar{H} = \bar{H}(t, q^\alpha, p_\alpha, C_\nu) \qquad (41)$$

$$\text{i} \quad \bar{R} = R(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha, p_\nu = C_\nu) \Rightarrow \bar{R} = \bar{R}(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha, C_\nu). \qquad (42)$$

Ove funkcije, kako to pokazuju (41) i (42), zavise samo od pozicionih generalisanih koordinata $q^\alpha, \alpha = 1,2,\ldots m$. i njima pripadajućih generalisanih impulsa p_α, odnosno generalisanih brzina $\dot{q}^\alpha$.

$2m$ Hamiltonovih jednačina po pozicionim koordinatama q^α i njima pripadajućim generalisanim impulsima predstavlja autonoman sistem dif. jednačina:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_\alpha} \quad \text{i} \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\ldots m \qquad (43)$$

čiji su integrali: $q^\alpha = q^\alpha(t, D^\beta, C_\beta, C_\nu)$ i $p_\alpha = p_\alpha(t, D^\beta, C_\beta, C_\nu)$.

Analogno tome i sistem Rautovih jednačina po pozicionim koordinatama predstavlja autonomni sistem od m jednačina drugog reda:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{R}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \bar{R}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad (44)$$

Ciklične koordinate $q^\nu = q^\nu(t)$ se određuju iz jednačina: $\dot{q}^\nu = \frac{\partial R'}{\partial C_\nu}$, (45) nakon integracije jednačina (44). U (45) funkcija R' je:

$$R' = R'(t, D^\alpha, E^\alpha, C_\nu), \quad R' = R[t, q^\alpha = q^\alpha(t, D^\alpha, E^\alpha), \dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(t, D^\alpha, E^\alpha), C_\nu]. \qquad (46)$$

Dodatak. – Poasonove zagrade. Prvi integrali Hamiltonovih jed.

Neka su $f=f(t,q^i,p_i)$ i $g=g(t,q^i,p_i)$ dve funkcije faznih promenljivih i vremena. Poasonova zagrada je definisana sa:

$$(f,g)=\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \qquad (1)$$

Poasonova zagrada ima sledeća svojstva: (2)

1.– $(f,g)=-(g,f)$ (3)

2.– $(cf,g)=c(f,g)$, $c=const$ (4)

3.– $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$ (5)

4.– $((fg),h)+((g,h),f)+((h,f),g)=0$ (6)

5. $\frac{\partial}{\partial t}(f,g)=\left(\frac{\partial f}{\partial t},g\right)+\left(f,\frac{\partial g}{\partial t}\right)$

Ovi identiteti se mogu dobiti neposredno iz definicije Poasonovih zagrada

Primenom Poasonovih zagrada na funkcije q^i, H, odnosno p_i i H (7)

dobija se:

$$(q^i,H)=\frac{\partial q^i}{\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial q^i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q^j}=\delta^i_j\frac{\partial H}{\partial p_j}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (8)$$

$$i\ (p_i,H)=\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q^j}=-\delta^j_i\frac{\partial H}{\partial q^j}=-\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

tako da se Hamiltonove kanonske jednačine mogu napisati u obliku: (9)

$$\dot q^i=(q^i,H) \quad i \quad \dot p_i=(p_i,H)$$

Vremensku evoluciju sistema generiše, dakle, Hamiltonova funkcija preko Poasonove zagrade.

Poasonova zagrada između koordinata q^j i impulsa p_k je:

$$(q^j,p_k)=\frac{\partial q^j}{\partial q^i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i}-\frac{\partial q^j}{\partial p_i}\frac{\partial p_k}{\partial q^i}=\delta^j_i\delta^i_k=\delta^j_k,$$

$$(q^j,q^k)=\frac{\partial q^j}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial p_i}-\frac{\partial q^j}{\partial p_i}\frac{\partial q^k}{\partial q^i}=0$$

$$(p_j,q^k)=\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial q^i}-\frac{\partial p_j}{\partial p_i}\frac{\partial q^k}{\partial q^i}=-\delta^i_j\delta^k_i=-\delta^k_j=-(q^k,p_j)$$

$$i\ (p_j,p_k)=0$$

Vremenski izvod funkcije $f=f(t,q^i,p_i)$ u smislu Hamiltonovih jednačina je:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i-\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

tj.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H). \tag{10}$$

Funkcija $f=f(t,q^i,p_i)$ predstavlja integral Hamiltonovih jednačina:
$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$ i $\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$, ako za ma koje kretanje sistema ta funkcija
zadržava konstantnu vrednost c, tj. ako važi:

$$f(t,q^i,p_i)=c, \tag{11}$$

odnosno:

$$\frac{df}{dt}=0. \tag{12}$$

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f=f(t,q^i,p_i)$ bude integral
kretanje je prema (10) i (12):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)=0 \tag{13}$$

Ako je $f=f(q^i,p_i)$, tj. f ne zavisi eksplicitno od vremena $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\equiv 0\right)$,
potreban i dovoljan uslov da funkcija f bude konstanta kretanja je:

$$(f,H)=0 \tag{14}$$

Iz (14) sledi da je Hamiltonova funkcija ingral kretanja ukoliko
eksplicitno ne zavisi od vremena, jer je (14) tada identički
zadovoljeno:

$$f=H(q^i,p_i) \Rightarrow (H,H)\equiv 0 \tag{15}$$

Ako su funkcije $f_1,\dots,f_l$ $(l<2n)$ integrali jednačina kretanja,
tada će i funkcija tih integrala $F(f_1,\dots f_l)$ takođe biti integral.
U nastavku izlaganja biće reči samo o nezavisnim integralima.
Ako je poznat potpun sistem integrala koji se sastoji od $2n$ nezavisnih
integrala $f_1,f_2,\dots,f_{2n}$ tada iz jednačina:

$$f_i(t,q^i,p_i)=c_i, \quad i=1,2\dots 2n$$

slede konačne jednačine kretanja sistema:

$$q^i=q^i(t,c_1,\dots c_{2n}) \text{ i } p_i=p_i(t,c_1,c_2,\dots c_{2n})$$

koje sadrže $2n$ konstanti $c_1,\dots c_{2n}$
Prema tome, ako nam je poznato $2n$ nezavisnih integrala tada
su poznata sva kretanja sistema. Ako je poznato l nezavisnih
integrala, $f_1,f_2,\dots,f_l$, gde je $l<2n$, tada imamo samo delimičnu
predstavu o kretanju sistemu i ukoliko je veće l, utoliko je potpunija
ta predstava. Zato smo uvek zainteresovani da nađemo što veći broj

integrala.

Jakobi - Poasonova teorema. - Ako su f i g integrali jednačina kretanja, tada je (f,g) takođe integral tih jednačina:

Dokaz. - Ako su f i g integrali kretanja tada važi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -(f,H)$$

$$i \ \frac{\partial g}{\partial t} + (g,H) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} = -(g,H),$$

pa je:

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right) = -((f,H),g) - (f,(g,H)) =$$
$$= ((H,f),g) + ((g,H),f) = -((f,g),H).$$

(iskorišćena relacija: $((f,g),H) + ((g,H),f) + ((H,f),g) = 0$)

tako da je:

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t} + ((f,g),H) = 0,$$

što znači da (f,g) predstavlja integral kretanja.

Novi integrali kretanja mogu se dalje formirati pomoću Poasonovih zagrada između npr. f i (f,g). Ipak ne bi trebalo zaboraviti da novi integral može biti i identički jednak nuli ili funkcija prethodno poznatih integrala. Prema tome pomoću Poasonovih zagrada mogu se, samo pri specijalnom izboru nezavisnih integrala $f_1, \ldots, f_\ell$ $(\ell < 2n)$, dobiti ostali $f_{\ell+1}, \ldots f_{2n}$ integrali koji nedostaju do potpunog sistema.

Primer. - Ako je moment količine kretanja $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$:

a) naći Poasnove zagrade između (L_i, L_j) gde su: $(q^1 = x, q^2 = y, q^3 = z, p_1 = m\dot{x}, p_2 = m\dot{y}, p_3 = m\dot{z})$

$L_1 = L_{0x}$, $L_2 = L_{0y}$, $L_3 = L_{0z}$

Rešenje: $(L_i, L_j) = \varepsilon_{ijk} L_k$

b) pokazati, takođe, da je:

$(q^i, L_i) = \varepsilon_{ijk} q^k$ i $(p_i, L_j) = \varepsilon_{ijk} p_k$

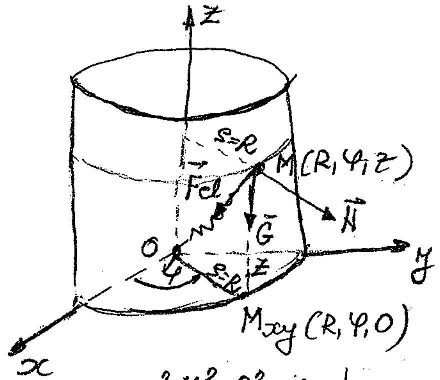
(nema sumiranja po k)

ε_{ijk} - simbol Levi Čivita; $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$

$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$

Primer. – Čestica mase m kreće se po površini vertikalnog cilindra poluprečnika R. Čestica je spojena oprugom krutosti c i nenapregnute dužine L sa tačkom O na osi simetrije cilindra. Čestica se kreće u u homogenom polju sile zemljine teže. Naći hamiltonijan i kanonske jednačine kretanja

Rešenje. - Sistem ima 2 stepena slobode, generalisane koordinate su φ i z.



Lagranžijan je:

$$L=\underbrace{\frac{1}{2}m(R^2\dot\varphi^2+\dot z^2)}_{T}-\underbrace{\left[mgz+\frac{1}{2}c\left(\sqrt{R^2+z^2}-L\right)^2\right]}_{\Pi}$$

$$x^2+y^2-R^2=0 \quad \Big| \quad \rho=R$$
$$x=R\cos\varphi$$
$$y=R\sin\varphi$$
$$\vec r=R\cos\varphi\,\vec i+R\sin\varphi\,\vec j+z\vec k$$
$$\vec v=-R\dot\varphi\sin\varphi\,\vec i+R\dot\varphi\cos\varphi\,\vec j+\dot z\vec k$$
$$v^2=R^2\dot\varphi^2+\dot z^2$$

$$\left.\begin{aligned}p_\varphi&=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=mR^2\dot\varphi\ ;\\ p_z&=\frac{\partial L}{\partial\dot z}=m\dot z\end{aligned}\right|\Rightarrow\ \dot\varphi=\frac{p_\varphi}{mR^2},\quad \dot z=\frac{p_z}{m}$$

$$\Downarrow\ H=(p_i\dot q^i-L)_{\dot q^i=\hat{\dot q}^i}=(p_\varphi\dot\varphi+p_z\dot z-L)_{\substack{\dot\varphi=\frac{p_\varphi}{mR^2}\\ \dot z=\frac{p_z}{m}}}$$

$$H=\hat T+\Pi\Rightarrow \boxed{H=\frac{p_\varphi^2}{2mR^2}+\frac{p_z^2}{2m}+mgz+\frac{1}{2}c\left(\sqrt{R^2+z^2}-L\right)^2}$$

Hamiltonove jednačine su:

$$\dot z=\frac{\partial H}{\partial p_z}\Rightarrow \dot z=\frac{p_z}{m}\Rightarrow \ddot z=\frac{\dot p_z}{m} \qquad (1)$$

$$\dot p_z=-\frac{\partial H}{\partial z}\Rightarrow \dot p_z=-mg+\frac{cz}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\sqrt{R^2+z^2}-L\right) \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot\varphi&=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\Rightarrow \dot\varphi=\frac{p_\varphi}{mR^2}\Rightarrow \ddot\varphi=\frac{\dot p_\varphi}{mR^2}\\ \dot p_\varphi&=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}\Rightarrow \dot p_\varphi=0\Rightarrow p_\varphi=C_\varphi\end{aligned}\right\}\ \dot\varphi=\frac{C_\varphi}{mR^2} \qquad (3)\ (4)$$

φ - ciklična koordinata $\left(\frac{\partial H}{\partial\varphi}=-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0\right)$

p_φ - ciklični integral

Rautova funkcija: $q^1=z,\ \dot q^1=\dot z$ i $q^2=\varphi,\ p_2=p_\varphi$ $\quad\begin{pmatrix}q^\alpha\to z\\ q^\nu\to\varphi\end{pmatrix}$

$$R=(p_\nu\dot q^\nu-L)_{\dot q^\nu=\hat{\dot q}^\nu}\Rightarrow \boxed{R=\hat{\dot\varphi}p_\varphi-L\left(\dot\varphi=\hat{\dot\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2}\right)}\Rightarrow \boxed{R=\frac{p_\varphi^2}{2mR^2}+\frac{1}{2}m\dot z^2-\Pi}$$

Rautove jednačine:

$$\boxed{\dot\varphi=\frac{\partial R}{\partial p_\varphi}}\Rightarrow \dot\varphi=\frac{p_\varphi}{mR^2} \qquad (1')$$

$$\boxed{\dot p_\varphi=-\frac{\partial R}{\partial\varphi}}\Rightarrow \dot p_\varphi=0\Rightarrow p_\varphi=C_\varphi \qquad (2')$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(-R)}{\partial\dot z}-\frac{\partial(-R)}{\partial z}=0\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot z}-\frac{\partial R}{\partial z}=0}\Rightarrow m\ddot z+\frac{\partial\Pi}{\partial z}=0, \qquad (3')$$

$$m\ddot z+mg-\frac{cz}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\sqrt{R^2+z^2}-L\right)=0$$

Modifikovana Rautova funkcija:

$$\bar R=R(z,\dot z,p_\varphi=C_\varphi)\Rightarrow \boxed{\bar R=\bar R(z,\dot z,C_\varphi)}=\frac{1}{2}m\dot z^2-\Pi(z)+\frac{C_\varphi^2}{2mR^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar R}{\partial\dot z}-\frac{\partial\bar R}{\partial z}=0}\Rightarrow m\ddot z+mg-\frac{cz}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\sqrt{R^2+z^2}-L\right)=0$$

Integralni principi
Elementi varijacionog računa

Integralni principi

Uvod. – Opšta jednačina dinamike ili Lagranž-Dalamberov princip, kao i njegove modifikacije, moraju biti zadovoljeni u svakom trenutku i za bilo koje virtuelno, vezama dozvoljeno pomeranje mehaničkog sistema iz njegovog, na vezama uočenog položaja. Za principe koji važe u okolini svake tačke konfiguracionog prostora, tj. koji imaju lokalni karakter, nazivaju se diferencijalni principi.
Principi koji se odnose na ceo interval vremena i ceo prostor kretanja mehaničkih sistema, tj koji su globalnog karaktera nazivaju se integralni principi. Ova klasa principa zasniva se na tvrđenju da određena veličina (funkcional) tokom kretanja ima stacionarnu vrednost. Među njima je najpoznatiji princip minimuma dejstva, tzv., Hamiltonov princip. Ovaj princip i pored suženih mogućnosti primene u oblasti mehanike, predstavlja najznačajniju vezu mehanike sa drugim oblastima fizike. Na njega se oslanja teorema Emi Neter čija varijaciona formulacija omogućava konstrukciju prvih integrala dinamičkih sistema u najopštijem slučaju.

<u>Direktne i zaobilazne (varirane) putanje</u>. – Kretanje holonomnog mehaničkog sistema sa n stepeni slobode može se, kao što je poznato, predstaviti kao kretanje reprezentativne tačke u n-dimenzionalnom Rimanovom prostoru generalisanih koordinata q^i, $i=1,2,\dots,n$. Konačne jednačine kretanja tog sistema $q^i=q^i(t)$ određuju u ovom prostoru liniju putanje reprezentativne tačke. Ako se kretanje sistema posmatra na konačnom intervalu vremena $[t_0,t_1]$, tada skup vrednosti generalisanih koordinata, $q^i_0=q^i(t_0)$ određuje početni položaj reprezentativne tačke, tj. početnu konfiguraciju mehaničkog sistema, a skup vrednosti generalisanih koordinata u trenutku t_1, $q^i_1=q^i(t_1)$ krajnji položaj reprezentativne tačke, tj. krajnju konfiguraciju sistema. Iz jedne u drugu konfiguraciju mehaničkog sistema, tj. iz početnog u krajnji položaj reprezentativna tačka može da pređe na beskonačno mnogo načina krećući se po beskonačno mnogo trajektorija. Međutim, s obzirom na uslove kretanja (sile) samo je jedna od njih stvarna, a njene jednačine su: $q^i=q^i(t)$, $i=1,2\dots,n$.
Ova trajektorija, tj. linija putanje na kojoj se ona nalazi zove se <u>direktna putanja</u>. Luk direktne linije putanje između početnog i krajnjeg položaja je <u>direktni put</u>.
Moguće, odnosno, indirektne, (zaobilazne) varirane putanje koje se nalaze u ε okolini direktne putanje moraju da se nalaze u istom konfiguracionom prostoru, tj. na istim vezama, kao i direktna putanja. Luk na zaobilaznim putanjama između početnog i krajnjeg položaja reprezentativne tačke na intervalu vremena $[t_0,t_1]$ naziva se zaobilazni put. Jednačine zaobilaznih putanja mogu se dati u formi jednoparametarske familije funkcija:
$\bar{q}^i=\bar{q}^i(t,\varepsilon)$,
gde je ε mali parametar reda dt, pri čemu svakom ε odgovara jedna zaobilazna-

putanja. Ovde će biti razmatrane zaobilazne putanje koje kroz zadate početni položaj (konfiguraciju) i zadati krajnji položaj (konfiguraciju), prolaze u zadatim trenucima t_0 i t_1, respektivno, tako da važi:

$\bar{q}_0^i = \bar{q}^i(t_0, \varepsilon_0) = q_0^i$ i $\bar{q}_1^i = \bar{q}^i(t_1, \varepsilon) = q_1^i$

Za vrednost parametra $\varepsilon = 0$ zaobilazna putanja postaje direktna, tj.:

$\bar{q}^i(t, \varepsilon = 0) = q^i(t)$.

Jednačine zaobilaznih putanja moguće je zbog toga dati u obliku Maklorenovog reda po parametru ε:

$$\bar{q}^i(t, \varepsilon) \approx q^i(t, \varepsilon = 0) + \left.\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} \cdot \varepsilon + \ldots$$

Ako se u ovom razvoju funkcije $\bar{q}^i = \bar{q}^i(t, \varepsilon)$ zadrže samo mala veličina prvog reda parametra ε, dobiće se:

$$\bar{q}^i(t, \varepsilon) = q^i(t) + \varepsilon \phi^i(t), \qquad \phi^i(t) = \left.\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0}.$$

Razlika vrednosti funkcija ~~funkcija~~: $\bar{q}^i = \bar{q}^i(t, \varepsilon)$ i $q^i(t)$ u bilo kom trenutku t:

$\delta q^i = \bar{q}^i(t, \varepsilon) - q^i(t)$ i $\delta q^i = \varepsilon \phi^i(t)$,

naziva se <u>sinhrona varijacija funkcije $q^i = q^i(t)$</u> <u>u trenutku t</u>. Funkcija $\phi^i = \phi^i(t)$ je proizvoljna diferencijabilna funkcija za koju mora biti:

$\phi^i(t_0) = \phi^i(t_1) = 0$, s obzirom na činjenicu da je:

$$\delta q_0^i = \bar{q}^i(t_0, \varepsilon) - q^i(t_0) \Rightarrow \delta q_0^i = 0 \Rightarrow \varepsilon \phi^i(t_0) = 0 \Rightarrow \phi^i(t_0) = 0$$

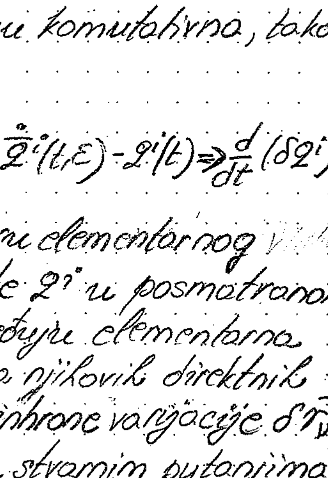
i $$\delta q_1^i = \bar{q}^i(t_1, \varepsilon) - q^i(t_1) \Rightarrow \delta q_1^i = 0 \Rightarrow \varepsilon \phi^i(t_1) = 0 \Rightarrow \phi^i(t_1) = 0.$$

Operator sinhronog variranja δ i operator diferenciranja d su komutativna, tako da je:

$$\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt}(\delta q^i) \quad \text{ili} \quad \delta(dq^i) = d(\delta q^i)$$

(Dokaz: $\frac{d}{dt}(\delta q^i) = \frac{d}{dt}(\bar{q}^i(t, \varepsilon) - q^i(t)) = \frac{d\bar{q}^i}{dt} - \frac{dq^i}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\delta q^i) = \dot{\bar{q}}^i(t, \varepsilon) - \dot{q}^i(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\delta q^i) = \delta \dot{q}^i$)

Sinhrona varijacija δq^i funkcije $q^i = q^i(t)$ predstavlja meru elementarnog virtuelnog priraštaja vrednosti generalisane koordinate q^i u posmatranom trenutku t. Zbog toga ove veličine δq^i, $i = 1, 2, \ldots n$ određuju elementarna virtuelna pomeranja tačaka M_ν materijalnog sistema sa njihovih direktnih puteva na zaobilazne, u bilo kom trenutku t, a kao sinhrone varijacije $\delta \vec{r}_\nu$ vektora položaja $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q^i)$ tačaka M_ν u trenutku t na stvarnim putanjima. Naime, na stvarnim putanjama je: $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q^i)$, $q^i = q^i(t)$, a na zaobilaznim $\vec{r}_\nu^* = \vec{r}_\nu^*(t, \bar{q}^i) = \vec{r}_\nu(t, q^i + \delta q^i)$, pa je:



$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q^i + \delta q^i) \approx \vec{r}_\nu(t, q^i) + \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial \bar{q}^i}\right)_{\substack{\bar{q}^i = q^i \\ \delta q^i = 0}} \cdot (\bar{q}^i - q^i),$$

i

$$\delta \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q^i + \delta q^i) - \vec{r}_\nu(t, q^i) \Rightarrow \boxed{\delta \vec{r}_\nu = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} \delta q^i,}$$

jer je: $\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial \bar{q}^i}\right)_{\substack{\bar{q}^i = q^i \\ \delta q^i = 0}} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}$

Elementi varijacionog računa. - Ako je $F=F(t,q^i,\dot{q}^i)$ bilo koja funkcija koja zavisi od veličina stanja kretanja mehaničkog sistema; $q^i=q^i(t)$ i $\dot{q}^i=dq^i/dt$, njena sinhrona varijacija u trenutku t biće:

$\delta F \approx \bar{F}(t,\bar{q}^i,\dot{\bar{q}}^i)-F(t,q^i,\dot{q}^i)$,

gde je: $F=F(t,q^i,\dot{q}^i)$ i $q^i=q^i(t)$, $\dot{q}^i=dq^i/dt$, funkcija F na stvarnoj trajektoriji mehaničkog sistema u konfiguracionom prostoru, a

$\bar{F}=\bar{F}(t,\bar{q}^i,\dot{\bar{q}}^i)$ i $\bar{q}^i=\bar{q}^i(t,\varepsilon)=q^i(t)+\delta q^i(t,\varepsilon)$ i $\dot{\bar{q}}^i=d\bar{q}^i/dt$, funkcija F na zaobilaznoj trajektoriji mehaničkog sistema u konfiguracionom prostoru.

Kako je:

$\bar{F}=F(t,q^i+\delta q^i,\dot{q}^i+\delta\dot{q}^i)\approx F(t,q^i,\dot{q}^i)+\frac{\partial F}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i$,

to je sinhrona varijacija funkcije $F(t,q^i,\dot{q}^i)$ u trenutku t, tj. njena elementarna virtuelna promena pri prelazu sa stvarne na zaobilaznu trajektoriju u tom trenutku:

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i$$

Veličina:

$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(t,q^i(t),\dot{q}^i(t))dt,$$

koja skup realnih funkcija: $q^i=q^i(t)$, $i=1,2,..,n$ preslikava u realan broj, tj.. $I: q^i(t)\to R$, naziva se funkcional. Zadatak varijacionog računa je da iz familije dopustivih skupova funkcija: $q^i=q^i(t)$, $i=1,2,..n$, tj dopustivih trajektorija meh. sistema u konfiguracionom prostoru nađe onu duž koje funkcional I ima stacionarnu (ekstremnu) vrednost. Ako funkcional I ima npr. minimalnu vrednost duž segmenta putanje $q^i=q^i(t)$ koji odgovara intervalu vremena $[t_0,t_1]$, gde su trenuci t_0 i t_1 fiksirani i poznati, onda je njegova vrednost duž krivih: $\bar{q}^i=\bar{q}^i(t,\varepsilon)=q^i(t)+\delta q^i$ na intervalu $[t_0,t_1]$, veća od te minimalne. Sinhrona varijacija funkciona δI, kao razlika vrednosti funkcionala na ovim dvema bliskim krivima u konfiguracionom prostoru, je:

$$\boxed{\delta I}=\int_{t_0}^{t_1}F(t,q^i+\delta q^i,\dot{q}^i+\delta\dot{q}^i)dt-\int_{t_0}^{t_1}F(t,q^i,\dot{q}^i)dt,$$

tj. $\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\left[F(t,q^i+\delta q^i,\dot{q}^i+\delta\dot{q}^i)-F(t,q^i,\dot{q}^i)\right]dt$,

odnosno: $\boxed{\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\delta F(t,q^i,\dot{q}^i)dt,}$ $\Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}F(t,q^i,\dot{q}^i)=\int_{t_0}^{t_1}\delta F dt$ $\left(\delta\int_{t_0}^{t_1}\_\_=\int_{t_0}^{t_1}\delta\_\_\right)$

gde je: $\delta F(t,q^i,\dot{q}^i)=\frac{\partial F}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i=\frac{\partial F}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}(\delta q^i)$.

Imajući u vidu da je:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}(\delta q^i)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i,$$

sledi da je: $\delta F(t,q^i,\dot{q}^i)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)+\left[\frac{\partial F}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right]\delta q^i$,

pa je sinhrona varijacija funkcionala:

$$\delta I=\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt.$$

Da bi razmatrani funkcional ima stacionarnu ~~vrednost~~, tj. ekstremalnu vrednost, duž krive: $q^i = q^i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, a na intervalu $[t_0, t_1]$, potrebno je da bude: $\delta I = 0$, tj.:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)_{t_1} \delta q^i_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)_{t_0} \delta q^i_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) \delta q^i dt = 0$$

Ako su vrednosti promenljivih q^i u trenucima t_0 i t_1 fiksirane za sve razmatrane krive, onda je: $\delta q^i_0 = \delta q^i(t_0) = 0$ i $\delta q^i_1 = \delta q^i(t_1) = 0$, pa se gornja jednačina svodi na jednačinu:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) \delta q^i dt = 0,$$

Za proizvoljne i međusobno nezavisne sinhrone varijacije promenljivih (generalisanih koordinata) δq^i, ova jednačina će biti zadovoljena akko su koeficijenti uz veličine δq^i jednake nuli, tako da mora biti:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Gornje jednačine, njih n, nazivaju se Ojlerove jednačine, a integrali tih jednačina određuju jednačine ekstremalne krive: $q^i = q^i(t)$, $i=1,2,\dots,n$.

Ako vrednosti promenljivih q^i nisu fiksirane na granicama intervala $[t_0, t_1]$, tj. ako je $\delta q^i_1 \neq 0$ i $\delta q^i_0 \neq 0$, uslov stacionarnosti funkcionala $\delta I = 0$, uz Ojlerove jednačine, biće zadovoljen ako je:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)_{t_1} = 0 \quad i \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)_{t_0} = 0.$$

Ovi uslovi se nazivaju uslovi transverzalnosti.

Da duž ekstremale: $q^i = q^i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, funkcional I ima minimalnu vrednost, pored uslova $\delta I = 0$, mora ~~biti~~ druga sinhrona varijacija tog funkcionala, $\delta^2 I$, da zadovolji uslov: $\delta^2 I < 0$

Ako funkcional duž ekstremale $q^i = q^i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ ima maksimalnu vrednost, pored uslova $\delta I = 0$, mora biti: $\delta^2 I > 0$.

U slučaju da je druga varijacija $\delta^2 I$ jednaka nuli, $\delta^2 I = 0$, tip ekstremalnosti je neodređen i moraju se ispitati vrednosti viših varijacija.

Hamiltonov princip.- Razmatra se holoman materijalni sistem sa n stepeni slobode, koji se kreću u polju potencijalnih sila. Sistem polazi iz početnog položaja u trenutku t_0 i stiže u krajnji položaj u trenutku t_1. Kretanje opisanog sistema u sistemu generalisanih koordinata q^i, $i=1,2,..,n$ opisano je Lagranževim jednačinama druge vrste: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0$, gde je, $L=L(t,q^i,\dot{q}^i)=T-\Pi$, Lagranževa funkcija. Rešenje ovih jednačina za zadate početne uslove: $q_0^i=q^i(t_0)$ i zadati krajnji položaj materijalnog sistema $q_1^i=q^i(t_1)$ predstavlja jednačinu direktne putanje sistema, tj. njegove reprezentativne tačke, u konfiguracionom prostoru: $q^i=q^i(t)$.
Zaobilazne putanje posmatranog materijalnog sistema u njegovom konfiguracionom prostoru su na infinitezimalnim rastojanjima od direktne putanje i prolaze kroz početni i krajnji položaj materijalnog sistema u istim trenucima t_0 i t_1, respektivno.
Uvodi se pretpostavka da je kretanje materijalnog sistema po stvarnoj, direktnoj putanji sinhronizovano sa njegovim hipotetičkim kretanjem (usled, npr., eventualnih mogućih poremećaja) po indirektnim zaobilaznim putanjama. Jednačine ovih putanja u konfiguracionom prostoru su: $\overline{q}^i=q^i(t)+\delta q^i$ i $\delta q^i=\delta q^i(t,\varepsilon)$.

Funkcional:

$$I=\int_{t_0}^{t_1} L(t,q^i,\dot{q}^i)dt$$

naziva se dejstvo u Hamiltonovom smislu (Hamiltonovo dejstvo) i predstavlja veličinu koja je određena kretanjem sistema u intervalu vremena $[t_0,t_1]$.

Hamiltonov princip za kretanje mat. sistema pod navedenim uslovima glasi:
Hamiltonovo dejstvo pri kretanju holonomnog sistema na koji deluju potencijalne sile, na stvarnoj, direktnoj trajektoriji ima stacionarnu vrednost u poređenju sa vrednostima na zaobilaznim trajektorijama.

Dokaz.- Uslov stacionarnosti Hamiltonovog dejstva, kao uslov stacionarnosti bilo kog funkcionala $(F(t,q^i,\dot{q}^i)=L(t,q^i,\dot{q}^i))$ duž ekstremalne trajektorije je:

$$\delta I=0 \Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1} L(t,q^i,\dot{q}^i)dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=0,$$

gde je: $\delta L=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)+\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i$,

tako da se dobija jednačina:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)_{t_1}-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)_{t_0}+\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt=0$$

Pošto u početnom trenutku t_0 i krajnjem trenutku t_1 ekstermalna kriva i zaobilazne koje se nalaze na infinitezimalnom rastojanju od nje, prolaze kroz iste tačke, to je: $\delta q_0^i=\delta q_1^i=0$, pa uslov stacionarnosti Hamiltonovog dejstva dobija oblik:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt=0.$$

Pošto gornja jednačina mora biti zadovoljena za bilo koje međusobno nezavisne sinhrone varijacije δq^i, to će, kao što je rečeno, ona biti zadovoljena ako na celom intervalu vremena $[t_0,t_1]$ važe Ojler - Lagranževe jednačine:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0,$$

tj. Lagranževe jednačine druge vrste. Na osnovu toga sledi da je direktna putanja materijalnog sistema u konfiguracionom prostoru: $q^i = q^i(t), i = 1..n$, istovremeno i ekstremalna kriva Hamiltonovog dejstva.

Drugi oblik Hamiltonovog principa. – Neka je stanje kretanja prethodno opisanog holonomnog materijalnog sistema određeno Hamiltonovim, tj. kanonskim, promenljivim: q^i i p_i. Kretanje materijalnog sistem, kao što je rečeno, može se posmatrati kao kretanje fazne tačke u $2n$-dimenzionalnom faznom prostoru n generalisanih koordinata q^i i n generalisanih impulsa p_i. Direktna fazna putanja u tom prostoru je određena jednačinom: $q^i = q^i(t)$ i $p_i = p_i(t)$.
U početnom trenutku t_0 direktna fazna trajektorija prolazi kroz faznu tačku: $q^i_0 = q^i(t_0)$ i $p_{i0} = p_i(t_0)$, a u trenutku t_1 intervala $[t_0, t_1]$ kroz tačku: $q^i_1 = q^i(t_1)$ i $p_{i1} = p_i(t_1)$. Takođe, uvodi se pretpostaka da zaobilazne fazne trajektorije koje se nalaze u ε okolini direktne fazne trajektorije i čije su jednačine:

$$\bar{q}^i(t, \varepsilon) = q^i(t) + \delta q^i, \quad \delta q^i = \varepsilon \phi^i(t)$$

$$\bar{p}_i(t, \varepsilon) = p_i(t) + \delta p_i, \quad \delta p_i = \varepsilon \theta^i(t),$$

u trenucima t_0 i t_1 prolaze kroz iste tačke faznog prostora kroz koje prolazi i direktna fazna trajektorija. Kretanje fazne tačke po zaobilaznim faznim trajektorijama sinhrono je sa njenim kretanjem po direktnoj faznoj trajektoriji.
U razmatranje se uvodi Hamiltonovo dejstvo u obliku:

$$I^* = \int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)\,dt,$$

gde je: $L^* = p_i \dot{q}^i - H(t, q^i, p_i)$, $L^* = L^*(t, q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$ – Lagranževa funkcija određena preko Hamiltonove funkcije koja zavisi od $2n$ funkcija $q^i = q^i(t)$ i $p_i = p_i(t)$ i njihovih izvoda po vremenu ($\partial L^*/\partial \dot{p}_i = 0$). Na taj način uvedeno Hamiltonovo dejstvo ima oblik:

$$I^* = \int_{t_0}^{t_1} (p_i \dot{q}^i - H(t, q^i, p_i))\,dt,$$

pa se jednačina ekstremalne krive u faznom prostoru duž koje ovo dejstvo ima stacionarnu (minimalnu) vrednost dobija iz jednačine:

$$\delta I^* = 0 \Rightarrow \delta \int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q^i, \dot{q}^i, p_i, \dot{p}_i)\,dt = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \delta(p_i \dot{q}^i - H(t, q^i, p_i))\,dt = 0,$$

koja se transformiše u jednačinu:

$$p_i \delta q^i \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big)\delta p_i - \Big(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\Big)\delta q^i\Big]\,dt = 0,$$

jer je:

$$\delta(p_i \dot{q}^i - H) = \delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i = \delta p_i\Big(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big) + p_i \frac{d}{dt}(\delta q^i) - \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i,$$

tj. $\boxed{\delta(p_i \dot{q}^i - H) =} \ \delta p_i\Big(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big) + \frac{d}{dt}(p_i \delta q^i) - \Big(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\Big)\delta q^i.$

Zbog toga što su početne i krajnje tačke svih faznih trajektorija iste, to je: $\delta q^i(t_0) = \delta q^i(t_1) = 0$, pa uslov stacionarnosti Hamiltonovog dejstva svodi na:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big)\delta p_i - \Big(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\Big)\delta q^i\Big]\,dt = 0$$

U gornjoj jednačini varijacije δp_i nisu nezavisne u odnosu na varijacije δq^i, jer je: $p_i = a_{ij}\dot{q}^k + b_i$, pa koeficijente u njoj uz δp_i i δq^i ne treba

neposredno izjednačavati sa nulom. Međutim, treba primetiti da su koeficijenti uz δp_i posledica Ležandrovih transformacija ($\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$), a ne kretanja sistema, zbog čega pod integralom poslednje jednačine ostaju samo članovi sa međusobno nezavisnim varijacijama. Izjednačavajući koeficijente uz njih sa nulom dobija se i druga grupa kanonskih jednačina.
Na taj način pokazano je da je jednačina ekstremalne krive u faznom prostoru, kao i jednačina direktne trajektorije sistema u tom prostoru, određena Hamiltonovim, kanonskim, jednačinama:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Napomena. – Za dobijanje kanonskih jednačina kretanja mehaničkog sistema iz Hamiltonovog principa nisu korišćeni uslovi: $\delta p_i(t_0) = \delta p_i(t_1) = 0$. To je posledica činjenice da se dve tačke u faznom prostoru ne mogu proizvoljno izabrati. Tačke (q_0^i, p_{i0}) i (q_1^i, p_{i1}) biraju se na direktnom putu za koji se formuliše Hamiltonov princip.

Geodezijske linije i veza sa kretanjem holonomnog stacionarnog sistema po inerciji. – Kinetička energija konzervativnog sistema je pozitivno definitna kvadratna forma: $T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \geq 0$, $a_{ij} = a_{ij}(q^k)$. Veličina: $d\sigma^2 = 2T dt^2 = a_{ij} dq^i dq^j$, predstavlja osnovnu metričku formu n-dimenzionalnog konfiguracionog prostora u kome su uvedene generalisane koordinate q^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a u okolini reprezentativne tačke materijalnog sistema čije su konačne kretanja: $q^i = q^i(t)$ i čija je kinetička energija jednaka kinetičkoj energiji materijalnog sistema.
Dužina luka trajektorije reprezentativne tačke između tačke $A(q_0^i)$ i tačke $B(q_1^i)$ na njoj je:

$$\sigma = \int_{AB} d\sigma = \int_{AB} \sqrt{a_{ij} dq^i dq^j} \Rightarrow \sigma = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}\, dt,$$

gde je t_0 trenutak u kome je reprezentativna tačka našla u položaju $A(q_0^i)$, a ~~trenutak~~ t_1 trenutak u kome je reprezentativna tačka bila u položaju $B(q_1^i)$.
Kriva linija na kojoj dužina segmenta između dve zadate tačke Rimanovog prostora ima stacionarnu, odnosno, ekstremanalnu vrednost, naziva se geodezijska linija.
Problem određivanja jednačine geodezijske linije svodi se na određivanje stacionarne vrednosti funkcionala: $\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}\, dt$.
Za zadate trenutke t_0 i t_1 i specificirane vrednosti generalisanih koordinata tačaka A i B na direktnim i zaobilaznim trajektorijama ($\delta q_0^i = 0$ i $\delta q_1^i = 0$), uslov stacionarnosti: $\delta \sigma = 0$, ima oblik:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0,$$

gde je: $F = F(q^k, \dot{q}^k) = \sqrt{a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}$, $a_{ij} = a_{ij}(q^k)$, pa su jednačine ekstremalne, geodezijske krive određene Ojlerovim jednačinama:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0.$$

Kako je:

$$\frac{\partial F}{\partial q^i}=\frac{1}{2F}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^j\dot{q}^k\ ,\quad \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}=\frac{1}{F}a_{ij}\dot{q}^j$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}=\frac{1}{F}\left(a_{ij}\ddot{q}^j+\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^j\right)-a_{ij}\dot{q}^j\frac{\dot{F}}{F^2}\ ,$$

to će struktura Ojler-Lagranževih jednačina biti:

$$a_{ij}\ddot{q}^j+[jk,i]\dot{q}^j\dot{q}^k-\frac{\dot{F}}{F}a_{ij}\dot{q}^j=0$$

Za materijalni sistem koji se kreće po inerciji je: $\Pi(q^i)=0$ i $T=h$, tako da je $\dot{F}=\frac{d}{dt}\sqrt{2T}=\frac{d}{dt}\sqrt{2h}=0$, pa su jednačine geodezijske linije:

$a_{ij}\ddot{q}^j+[jk,i]\dot{q}^j\dot{q}^k=0$, odnosno, $\ddot{q}^i+\left\{{i \atop jk}\right\}\dot{q}^j\dot{q}^k=0$,

iste sa diferencijalnim jednačinama kretanja reprezentativne tačke po inerciji u R_n.

Ako se umesto parametra t uvede parametar luka krive σ: $t=\sigma$ u izraz za funkciju $F=\sqrt{2T}$, biće:

$$F=\sqrt{a_{ij}\frac{dq^i}{d\sigma}\frac{dq^j}{d\sigma}}=\frac{1}{d\sigma}\sqrt{a_{ij}dq^i dq^j}\Rightarrow F=\frac{d\sigma}{d\sigma}\Rightarrow F=1\ \text{i}\ \dot{F}=0,$$

pa će jednačine geodezijske linije glasiti:

$\frac{d^2q^i}{d\sigma^2}+\left\{{i \atop jk}\right\}\frac{dq^j}{d\sigma}\frac{dq^k}{d\sigma}=0$. One se, s obzirom da su $T^i=\frac{dq^i}{d\sigma}$ kontravarijantne koordinate orta tangente (u ovom slučaju) geodezijske linije, može napisati u obliku: $\frac{DT^i}{D\sigma}=0$. Pošto su apsolutni izvodi veličina T^i po parametru σ jednaki nuli, to znači ortovi tangentne geodezijske linije u R_n obrazuju polje paralelnih vektora.

Dodatak.- Asinhrona varijacija.- Sinhrona varijacija δq^i funkcije $q^i=q^i(t)$, gde je t nezavisna promenljiva, ne uzima u obzir varijacije nezavisne promenljive t. Varijacija funkcije $q^i=q^i(t)$ u kojoj se i njena nezavisna promenljiva t varira naziva se asinhrona varijacija funkcije $q^i=q^i(t)$, Δq^i. Veza između sinhrone δq^i asinhrone Δq^i varijacije glasi:

$$\Delta q^i=\delta q^i+\dot{q}^i\Delta t,$$

pa je:

$$\bar{q}^i(t+\Delta t,\varepsilon)\approx\bar{q}^i(t,\varepsilon)+\dot{\bar{q}}^i\Delta t\Rightarrow\bar{q}^i(t+\Delta t,\varepsilon)\approx q^i(t)+\delta q^i+(\dot{q}^i+\delta\dot{q}^i)\Delta t\ ,$$

odnosno:

$$\Delta q^i\approx\bar{q}^i(t+\Delta t,\varepsilon)-q^i(t),$$

gde je Δt priraštaj, varijacija promenljive, trenutka, t.

Izraz za asinhronu varijaciju može se primeniti na bilo koju funkciju, npr. f:

$$\Delta f=\delta f+\dot{f}\Delta t,$$

kao i:

$$\Delta\dot{f}=\delta\dot{f}+\ddot{f}\Delta t\Rightarrow\Delta\dot{f}=(\delta f)^{\cdot}+\ddot{f}\Delta t.$$

Operator asinhronog variranja Δ nije komutativan sa operatorom diferenciranja d, tj. važi: $\Delta d\neq d\Delta$, jer je: $\Delta(dq^i)=\delta(dq^i)+(dq)^{\cdot}\Delta t=d(\delta q^i)+d\dot{q}^i\Delta t$ i

$$d(\Delta q^i)=d(\delta q^i+\dot{q}^i\Delta t)=d(\delta q^i)+d\dot{q}^i\Delta t+\dot{q}^i d(\Delta t)\neq\Delta(dq^i)$$

Asinhrona varijacija funkcionala: $\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt$, je:

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt = F\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\delta F\,dt,$$

tj.

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt = \left(F\Delta t + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt$$

i dalje:

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt = \left(F + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt.$$

Uslov optimalnost posmatranog funkcionala je: $\Delta\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt = 0$, i prema prethodnom može se napisati u obliku:

$$\left(F + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt = 0$$

Kako se ponašanje sistema opisuje Ojler-Lagranževim jednačinama:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0,$$

to sledi da u uslovima stacionarnosti funkcionala $\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt$, mora biti:

$$\left(F + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

Navedeni uslovi stacionarnosti funkcionala $\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt$ primenjuje se u slučajevima kada granice t_0 i t_1 nezavisne promenljive t nisu specificirane, što je najčešće slučaj u problemima optimizacije procesa (optimalnog upravljanja). Zbog toga se funkcional $\int_{t_0}^{t_1} F(t,q^i,\dot{q}^i)dt$ naziva kriterijum optimalnosti, a uslov njegove stacionarnosti, uslov optimalnosti

Dodatok

6.2. Polarne cilindrične koordinate

6.2.1. Koordinatni vektori

S cilindričnim koordinatama upoznali smo se djelomično u primjeru 4.1. Vidjeli smo da su koordinatne plohe kružni cilindri, radijalne ravnine koje prolaze kroz os cilindra te ravnine koje su okomite na os cilindra. Koordinatne crte su presjeci tih ploha. To su kružnice, radijalni pravci i pravci paralelni s osi cilindra.

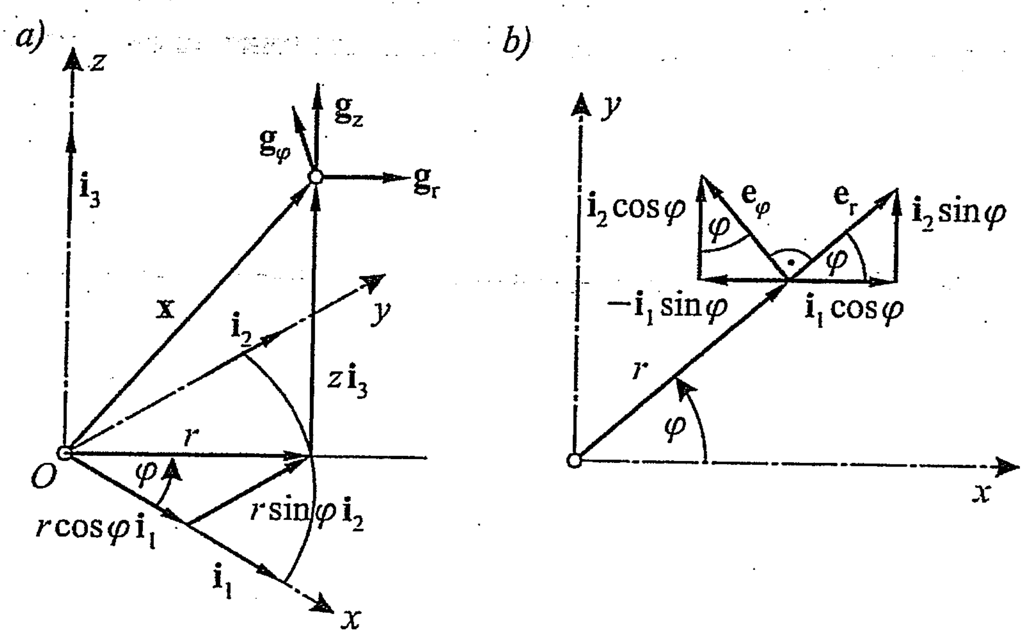
Vektor položaja $\mathbf{x}$ točke P koja ima Descartesove koordinate x^1, x^2 i x^3, odnosno cilindrične koordinate r, φ i z dan je izrazom

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{i}_k = r\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + r\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + z\,\mathbf{i}_3 . \tag{6.47}$$

Sad možemo pomoću (4.8), tj. pomoću izraza $\mathbf{g}_k = \partial\mathbf{x}^k / \partial y^k$ odrediti osnovne koordinatne vektore

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial r} = \cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{i}_2 = \mathbf{g}_r = \mathbf{e}_r ,$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + r\cos\varphi\,\mathbf{i}_2 = \mathbf{g}_\varphi = r\,\mathbf{e}_\varphi , \tag{6.48}$$



Slika 6.2. Cilindrične polarne koordinate: a) koordinatne crte te odnos pravokutnih i cilindričnih koordinata, b) veza $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$ s $\mathbf{i}_1$ i $\mathbf{i}_2$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \mathbf{i}_3 = \mathbf{g}_z = \mathbf{e}_z ,$$

gdje su $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$ jedinični vektori u radijalnom i cirkularnom smjeru. Naime, prema slici 6.2b vrijedi

$$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{i}_2 , \qquad \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{i}_2 .$$

Apsolutne vrijednosti koordinatnih vektora iznose

$$|\mathbf{g}_1| = \sqrt{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 ,$$

$$|\mathbf{g}_2| = \sqrt{\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2} = r , \qquad |\mathbf{g}_3| = 1 . \tag{6.49}$$

Budući da se radi o ortogonalnomu koordinatnom sustavu, odgovarajući osnovni i recipročni koordinatni vektori su paralelni pa je

$$\mathbf{g}^r = \mathbf{g}^1 = \cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{i}_2 = \mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_r ,$$

$$\mathbf{g}^\varphi = \mathbf{g}^2 = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r}\left(-\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{i}_2\right), \tag{6.50}$$

$$\mathbf{g}^3 = \mathbf{i}_3 = \mathbf{g}_3 .$$

6.2.2. Metrički tenzori

Kovarijantne komponente metričkog tenzora **g** prema (2.19) definirane su izrazom

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j .$$

Ako u taj izraz uvrstimo (6.50) pa zatim taj izraz sredimo, dobit ćemo

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.51}$$

Matrica recipročnih metričkih koeficijenata u skladu sa (6.8) glasi

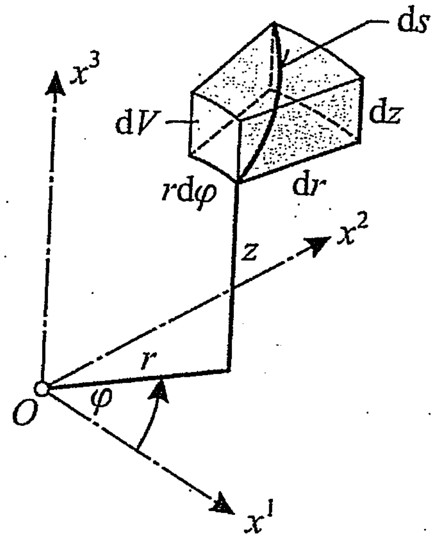
$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.52}$$

Do vrijednosti metričkih koeficijenata mogli smo doći i na drugi način, tj. pomoću slike 6.3. i pomoću izraza (6.10). Naime, prema slici 6.3. možemo pisati

$$ds^2 = (r\,d\varphi)^2 + (dr)^2 + (dz)^2 .$$

S druge strane prema izrazu (6.10) vrijedi

$$ds^2 = g_{11}\left(dy^1\right)^2 + g_{22}\left(dy^2\right)^2 + g_{33}\left(dy^3\right)^2 ,$$



Slika 6.3. Element duljine luka ds i element obujma dV

odnosno

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\varphi^2 + g_{33}dz^2.$$

Usporedbom tih dvaju izraza vidimo da je

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = 1$$

što se podudara sa (6.51).

Element obujma u cilindričnim koordinatama prema slici 6.3. iznosi

$$dV = r d\varphi dr dz . \tag{6.53}$$

6.2.3. Christoffelovi simboli

Koristeći se izrazima (6.30) do (6.33) lako se možemo uvjeriti da su svi Christoffelovi simboli jednaki nuli, osim

$$\Gamma^1_{22} = -r \qquad \text{i} \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}. \tag{6.54}$$

6.6. Sferne koordinate

6.6.1. Koordinatne plohe i crte

Izraz koji povezuje sferne koordinate r, ϑ, φ i pravokutne koordinate x, y, z glasi

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad \vartheta = \arccos\frac{z}{r}, \tag{6.92}$$

$$z = r\cos\vartheta, \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x},$$

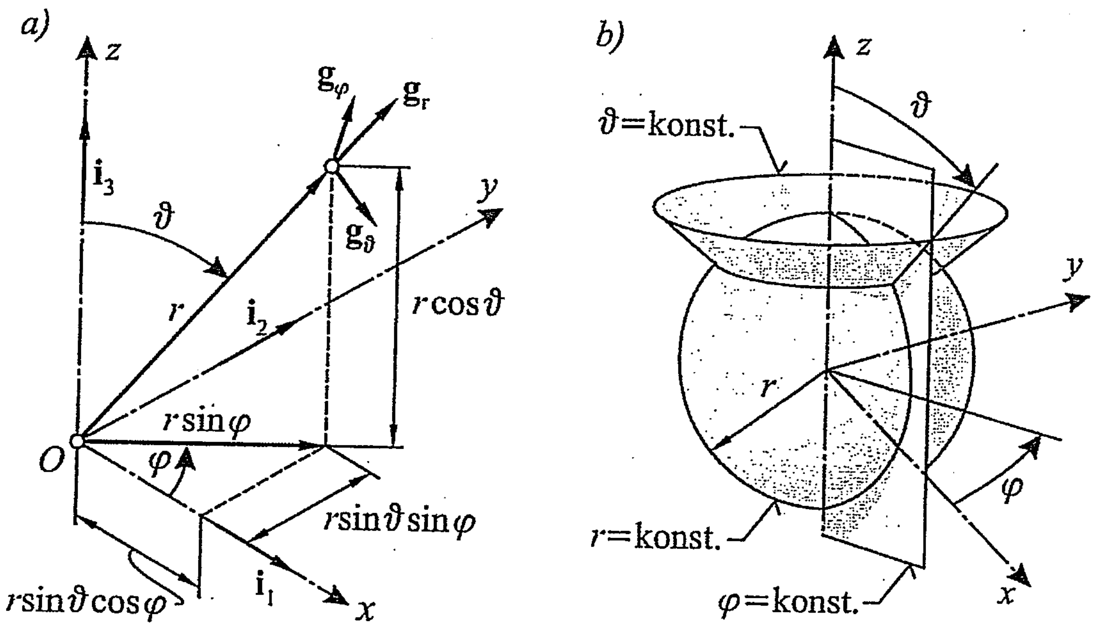
$$r \geq 0, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Jedna porodica koordinatnih ploha su kugle polumjera r sa središtem u ishodištu. Njihove jednadžbe glase

$$x^2+y^2+z^2 = r^2. \tag{6.93}$$

Druga porodica koordinatnih ploha su stošci s vrhom u ishodištu kojima se os podudara s osi z. Jednadžba tih stožaca glasi

$$x^2+y^2 = z^2\tan^2\vartheta. \tag{6.94}$$



Slika 6.10. Sferne koordinate: a) odnos sfernih i pravokutnih koordinata, b) koordinatne plohe i crte

Treća porodica koordinatnih ploha su radijalne ravnine koje prolaze kroz os z. Njihova jednadžba glasi

$$y = x \tan \varphi . \tag{6.95}$$

Koordinatne plohe prikazane su na slici 6.10.

Koordinatne crte su presjeci koordinatnih ploha. Presjeci kugala i stožaca su kružnice sa središtem na osi z (paralele). Presjeci kugala i ravnina su kružnice sa središtem u ishodištu (meridijani). Presjeci stožaca i ravnina su radijalni pravci, tj. pravci koji prolaze kroz ishodište.

6.6.2. Koordinatni vektori i metrički koeficijenti

Vektor položaja izražen preko sfernih koordinata ima jednadžbu

$$\mathbf{x} = r \sin \vartheta \cos \varphi \, \mathbf{i}_1 + r \sin \vartheta \sin \varphi \, \mathbf{i}_2 + r \cos \vartheta \, \mathbf{i}_3 . \tag{6.96}$$

U tom slučaju osnovne koordinatne vektore možemo odrediti pomoću izraza (4.8), tj.

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \varphi \, \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \, \mathbf{i}_2 + \cos \vartheta \, \mathbf{i}_3 , \\
\mathbf{g}_2 &= \mathbf{g}_\vartheta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta \cos \varphi \, \mathbf{i}_1 + r \cos \vartheta \sin \varphi \, \mathbf{i}_2 - r \sin \vartheta \, \mathbf{i}_3 , \\
\mathbf{g}_3 &= \mathbf{g}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = -r \sin \vartheta \sin \varphi \, \mathbf{i}_1 + r \sin \vartheta \cos \varphi \, \mathbf{i}_2 .
\end{aligned} \tag{6.97}$$

Sad možemo odrediti osnovne metričke koeficijente g_{ij}. Pomoću (2.19) možemo dobiti

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = 1 , \\
g_{22} &= \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = r^2 , \\
g_{33} &= \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = r^2 \sin^2 \vartheta .
\end{aligned} \tag{6.98}$$

Također je $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_1 = 0$ što pokazuje da su sferne koordinate ortogonalne. U tom slučaju matrica osnovnih i recipročnih metričkih koeficijenata glasi

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \tag{6.99}$$

6.6.3. Christoffelovi simboli

Christoffelovi simboli druge vrste jesu

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -r, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^1_{33} &= -r \sin^2 \vartheta, & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, & \Gamma^3_{32} &= \cot \vartheta. \end{aligned} \tag{6.100}$$

Ostali Christoffelovi simboli jednaki su nuli.