Broj ***e*** kao limes niza

U sledećim zadacima (11-15) koristićemo definiciju broja e pomoću limesa niza:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

11. Nađimo graničnu vrednost $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Rešenje: napravićemo limes koji nam treba, za koji znamo da je e, a onda izvršiti potrebne operacije

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})^n)^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1}.$$

12. Nađimo graničnu vrednost $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$.

Rešenje: ponovićemo prethodni postupak, s tim što ćemo sada koristiti činjenicu da 3n teži beskonačnosti kada n teži beskonačnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\frac{3n}{3}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

13. Nađimo graničnu vrednost $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^n$.

Rešenje: brojilac ćemo rastaviti na 2n-1 i 3

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1+3}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{3}}\right)^{\left(\frac{2n-1}{3}+\frac{1}{3}\right)\frac{3}{2}} =$$

$$= e^{\frac{3}{2}}$$

da malo obrazložimo ovaj stepen na kraju... imali smo n, a treba nam (2n-1)/3, da bi to dobili pomožili smo n sa 2/3 i oduzeli 1/3, da ne bi pokvarili rezultat moramo uraditi sve obrnuto, dodati 1/3 i pomnožiti sa 3/2!

14. Izračunati limes sledećeg niza $a_n = n[ln(n+3) - lnn]$.

Rešenje: koristeći svojstva logaritamske funkcije zadani limes možemo zapisati u obliku

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n[ln(n+3) - lnn] = \lim_{n\to\infty} ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = lne^3 = 3.$$

15. Naći graničnu vrednost $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n-1}\right)^n$.

Rešenje:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2-n-1)+(2n+n)}{n^2-n-1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+2}{n^2-n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+2}{n^2-n-1}\right)^{\frac{n^2-n-1}{2n+2}\cdot\frac{2n^2+2n}{n^2-n-1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{n^2-n-1}} = e^2$$

21. Izračunati:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 10n\cdot\sqrt{n^2+1}-n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

Rešenje:

a) Racionalizacijom izraza u zagradama dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} 10n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty} 10n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty} 10n\cdot\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{10}{2}=5$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{n+1}^2+2\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}{\sqrt[3]{n+1}^2+2\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n+1}^2+2\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2+2\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2}+\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}^2}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}^2}=0$ sledi da je vrednost traženog limesa jednaka nuli, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=0$$

22. Izračunati:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$

Rešenje:

Izvlačenjem 2^n za a), odnosno $\frac{1}{2^n}$ za b) u imeniocu I brojiocu dobijamo:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{2^n\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{1}=1 \quad \text{jer je} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0$ jer je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

23. Izračunati:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\sin(n\cdot\pi)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{n}$

Rešenje:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+1)}{3^n\cdot(\frac{2^n}{3^n}+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot3^n\cdot((\frac{2}{3})^{n+1}+1)}{3^n\cdot((\frac{2}{3})^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot((\frac{2}{3})^n\cdot\frac{2}{3}+1)}{(\frac{2}{3})^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(\frac{2}{3})^n+3}{(\frac{2}{3})^n+1}=\frac{2\cdot0+3}{0+1}=3$$

jer je $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n=0$ zato što je $\dfrac{2}{3}<1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\sin(n\cdot\pi)=0$ jer je $\sin(n\cdot\pi)=0$ za svaki prirodan broj n.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ jer je funkcija sin ograničena funkcija, i važi da je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, a granična vrednost proizvoda ograničene funkcije I funkcije koja teži nuli je nula.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{n}=0$ jer je funkcija cos graničena funkcija, I važi da je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, a granična vrednost ograničene funkcije I funkcije koja teži nuli je nula.

24. Izračunati:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+n}{3-5^{n+1}}$

Rešenje:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1})^2-1}{(\sqrt{n^2+1}+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-1}{n^2+1+2\cdot\sqrt{n^2+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2\cdot\sqrt{n^2+1}+2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\cdot(1+2\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^2}})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{1+2\cdot 0+0}=1$$

Prethodno važi jer je:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}=0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+n}{3-5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot(1+\frac{n}{5^n})}{5^n\cdot(\frac{3}{5^n}-5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{5^n}}{\frac{3}{5^n}-5}=\frac{1+0}{0-5}=-\frac{1}{5}$ jer je $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n}=0$ i $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5^n}=0$

25. Izračunati:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2n\cdot(\ln n-\ln(n-2))$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2}$

Rešenje:

a) Koristeći svojstva logaritamske funkcije zadati limes možemo napisati na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty}2n\cdot(\ln n-\ln(n-2))=\lim_{n\to\infty}2n\cdot\ln\left(\frac{n}{n-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n-2}\right)^{2n}$$

Zbog svojstva neprekidnosti funkcije ln(x) I svojstva da za sve neprekidne funkcije f važi da je $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)$ dobijamo da je pretodini limes jednak:

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{2n}\right]=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n}}\right]=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)\cdot 4}}\right]=\ln(e^4)=4$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot(1-\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot(1+\frac{2}{n^2})}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}=\frac{e^{-1}}{e^2}=e^{-3}$