1 Задаци

1.1 Лимеси низова

1. Израчунати лимесе низова

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1}$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-1}{n^4+1}$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n+1}{n^4+2n^2+7}$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$; (д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

(ђ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$; (е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$;

(ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5n+6}-\sqrt{n^2+n+3}\right)$; (з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+7}{3n+2}\right)^{9n}$;

(и) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$; (ј) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-5n}-\sqrt{n^2+7n-9}\right)$;

(к) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}$; (л) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n}$;

(љ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2^n-\ln n+3}{3^n+n^3}$; (м) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$

(н) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n}$.

1.2 Лимеси функција

3. Израчунати лимесе функција

(а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+3}$; (б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$; (в) $\lim\limits_{x\to -3}(\sqrt{19+x}-4)$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{2x}$; (д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$; (ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{x^2}$; (е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cos x}{x}$;

(ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$; (з) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$;

(и) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2}$; (j) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$; (к) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

(л) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$; (љ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{5x}-1)\sin x}{x^2}$.

4. Наћи изводе функција

(а) $y=x^2+\ln x+\mathrm{arctg}\ x$; (б) $y=\cos 3x+\sin x+15$; (в) $y=\ln(\sin(\cos(3x+5)))$;

(г) $y=\dfrac{x^2}{\ln x+3}$; (д) $y=e^{e^{e^x}}$; (ђ) $y=\sqrt{\ln x+\sin x}$; (е) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; (ж) $y=xe^x\ln x$;

(з) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{2x+1}$; (и) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x+e+\pi}$; (j) $y=x\arcsin x$.

5. Израчунати лимесе функција користећи Лопиталово правило

(а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$; (в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; (г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{8-x^3}$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x^2-x}$; (ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}\ x}{\sin 3x}$; (е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\mathrm{arctg}\ 5x}$; (ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x^2-9}$;

(з) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{5x+5}$; (и) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3+\ln x}{x^2+7}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln x)^2$; (к) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x\mathrm{tg}\ x$;

(л) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$; (љ) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

2 Решења задатака

2.1 Лимеси низова

1. Користићемо неке познате лимесе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \text{ за } k > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ за } |q| < 1, \tag{4}$$

као и *Штолцову теорему* која каже да ако су низови $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такви да је $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ растућ, важи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ и ако постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

онда постоји и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

и ова два лимеса су једнака (Штолцова теорема се користи у делу (м)).

Такође, знамо да важи

$$\ln n << n^k << a^n << n! << n^n, \tag{5}$$

где је $k \in \mathbb{N}$, а $a > 1$. Претходни ред нам говори да иако сваки од ових израза тежи бесконачности када n тежи бесконачности, знамо да је $\ln n$ „много мање“ од n^k, да је n^k „много мање“ од a^n итд. Одатле закључујемо да је лимес нечег „мањег“ подељеног „већим“ једнак нули, па је тако, на пример, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n!} = 0$.

Користићемо и *Теорему о два полицајца*. Ова теорема каже да уколико имамо три низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ таква да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ и ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, онда је и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Уколико се у задатку користи нека од претходних формула то ће бити назначено бројем у загради изнад знака једнакости где је одговарајући лимес искоришћен.

Пређимо сада на рачунање лимеса.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1} \cdot \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 - \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \overset{(1)}{=} \dfrac{3}{2}$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-1}{n^4+1}\cdot\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^4}}\overset{(1)}{=}1$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+1}{n^4+2n^2+7}\cdot\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^4}}\overset{(1)}{=}0$

(г)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2-1)(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\\&\overset{(1)}{=}0\end{aligned}$$

(д)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2+1)(n+1)!}{(n+2-1)(n+1)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\\&\overset{(1)}{=}1\end{aligned}$$

(ђ)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n^2+11n+6}{n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)\\&\overset{(1)}{=}1\end{aligned}$$

(е)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}\\&\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+6}-\sqrt{n^2+n+3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+5n+6}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+n+3}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6-(n^2+n+3)}{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}}\\
&\overset{(1)}{=}2
\end{aligned}$$

(з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+7}{3n+2}\right)^{9n}=\left(\dfrac{3n+2+5}{3n+2}\right)^{9n}$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{3n+2}\right)^{9n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{5}}\right)^{\frac{3n+2}{5}\cdot\frac{5}{3n+2}\cdot 9n}\\
&\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{45n}{3n+2}}\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{45n}{3n+2}}\\
&=e^{15}
\end{aligned}$$

(и) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\overset{(2)}{=}1$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n}-\sqrt{n^2+7n-9}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-5n}+\sqrt{n^2+7n-9}}{\sqrt{n^2-5n}+\sqrt{n^2+7n-9}}$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n-(n^2+7n-9)}{\sqrt{n^2-5n}+\sqrt{n^2+7n-9}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{-12+\frac{9}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{7}{n}-\frac{9}{n^2}}}\\
&\overset{(1)}{=}-6
\end{aligned}$$

(к) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}=\lim\limits_{n\to\infty}19\sqrt[n]{\left(\dfrac{13}{19}\right)^n+\left(\dfrac{17}{19}\right)^n+1}\overset{(4)}{=}19$

Задатак се може урадити и на други начин коришћењем Теореме о два полицајца. Означимо дати низ са $b_n=\sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}$. Приметимо да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи

$$a_n=\sqrt[n]{19^n}\leqslant\sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}\leqslant\sqrt[n]{19^n+19^n+19^n}=c_n,$$

као и да је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 19,$$

па на основу теореме закључујемо да је и лимес датог низа једнак 19.

(л) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+1} \overset{(4)}{=} 2$

(љ) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n-\ln n+3}{3^n+n^3}\cdot\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}-\frac{\ln n}{3^n}+\frac{3}{3^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}} \overset{(4),(5)}{=} 0$

(м)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}\\
&\overset{\text{Штолц}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)-\big(1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)\big)}{(n+1)^3-n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{3n^2+3n+1}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(н)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-(n^2-4n+2)+n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-4n+2}{2n-1}}\right)^{\frac{n^2-4n+2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\cdot n}\\
&\overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\cdot n}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2-4n+2}}\\
&= e^2
\end{aligned}$$

2.2 Лимеси функција

3.

(а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+3}=\dfrac{2\cdot(-2)^2+1}{(-2)^2-3(-2)+3}=\dfrac{9}{13}$

(б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{4}{-1}=-4$

(в) $\lim\limits_{x\to-3}\left(\sqrt{19+x}-4\right)=\sqrt{19-3}-4=4-4=0$

(г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{t}g\ x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\cos x}=\dfrac{1}{2}$

(д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$

(ђ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\cos x}{x^2}=\dfrac{2}{0}=+\infty$

(е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x\cos x}{3x}\cdot 3=\lim\limits_{x\to0}3\cos x=3$

(ж)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}&=\lim_{x\to0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-1-5x}{x^2(1+x^3)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x^3+5x^2+10x+10)}{x^2(1+x^3)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+x^3}\\&=10\end{aligned}$$

(з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120}{3125x^5-3125x^4+1250x^3-250x^2+25x-1}$

$=\dfrac{1}{3125}$

(и) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3-2x+x^2-x^2+x-1}{x(2-x)\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(2-x)\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{3}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

(j) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16} = \lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \lim\limits_{x\to 16}\dfrac{1}{\sqrt{x}+4} = \dfrac{1}{8}$

(к) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2^2-(x-3)}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= -\frac{1}{56}$$

(л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}3x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{3x^2}{x^2+1}} = e^3$

(ль) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{5x}-1)\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{5x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot 5 = 5$

4.

(а) $y' = 2x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+x^2}$

(б) $y' = -3\sin 3x+\cos x$

(в) $y' = \dfrac{1}{\sin(\cos(3x+5))}\cdot\cos(\cos(3x+5))\cdot(-\sin(3x+5))\cdot 3$

(г) $y' = \dfrac{2x(\ln x+3)-\frac{1}{x}\cdot x^2}{(\ln x+3)^2} = \dfrac{2x(\ln x+3)-x}{(\ln x+3)^2}$

(д) $y' = e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x$

(ђ) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} + \cos x}{2\sqrt{\ln x + \sin x}}$

(е) $y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1^2)}$

(ж) $y' = e^x \ln x + x \cdot (x \ln x)' = e^x \ln x + x \left(e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x} \right)$

(з) $y' = \dfrac{\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2}}{1 + \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2} = \dfrac{2}{4x^2+1}$

(и) $y' = \dfrac{1}{1+(\sqrt{x+e+\pi})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+e+\pi}} = \dfrac{1}{1+x+e+\pi} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+e+\pi}}$

(j) $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

5.

(а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(\sqrt[3]{x})'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

(г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{8-x^3} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(\sin(x-2))'}{(8-x^3)'} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cos(x-2)}{-3x^2} = -\dfrac{1}{12}$

(д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x^2 - x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3^x-2^x)'}{(x^2-x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2}{2x-1} = \ln 2 - \ln 3$

(ђ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\text{tg } x}{\sin 3x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x\text{tg}x)'}{(\sin 3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}x + \frac{x}{\cos^2 x}}{3\cos x} = 0$

(е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 4x}{\text{arctg } 5x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\arcsin 4x)'}{(\text{arctg } 5x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}}{\frac{5}{1+25x^2}} = \dfrac{4}{5}$

(ж) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x^2-9} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right)'}{(x^2-9)'} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2x} = -\dfrac{1}{54}$

(з) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{5x+5} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(e^x)'}{(5x+5)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{5} = +\infty$

(и) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+\ln x}{x^2+7} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3+\ln x)'}{(x^2+7)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$

(j) $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{((\ln x)^2)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(-2\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2x$$

$$= 0$$

(к) $\lim_{x\to 0} \ln x \mathrm{tg} x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\mathrm{tg} x}}$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\mathrm{tg} x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(\mathrm{tg} x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot (-\sin x)$$

$$= \lim_{x\to 0} (-\sin x)$$

$$= 0$$

(л) $$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}$$
$$\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} (-\mathrm{tg} x)}$$
$$= e^0$$
$$= 1$$

(љ) $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$
$$\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x}{x+3}}$$
$$= e^3$$