IZVOD FUNKCIJE

- Neka je funkcija f definisana na intervalu (a, b) i neka je x tačka iz intervala (a, b).Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

ona se naziva **prvi izvod** funkcije f u **tački** x i obeležava se sa $f'(x)$ ili $f'_x(x)$.
Desni i **levi izvod** funkcije f u tački x su definisani sa

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ako date granične vrednosti postoje i obeležavaju se $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ respektivno. Ako u tački x postoje levi i desni izvod funkcije f i ako su jednaki, tada postoji izvod funkcije f u tački x.

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$$

Primeri:

1. Odrediti, po definiciji, vrednost $f'(0)$ ako je
   (a) $y = \sin x$
   $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x - \sin 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$

   (b) $y = \sqrt{x}$
   $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}},$
   $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$
   $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = -\infty$
   Prvi izvod u 0 ne postoji jer levi i desni izvod funkcije u toj tački nisu nisu jednaki.

2. Odrediti, po definiciji, $f'(x)$ funkcije $y = \ln x$ za $x \in (0, +\infty)$.
   $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$

- **Tablica prvih izvoda elementarnih funkcija**

  - $(c)' = 0$
  - $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
  - $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
  - $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
  - $(a^x)' = a^x \ln a$
  - $(e^x)' = e^x$
  - $(\sin x)' = \cos x$
  - $(\cos x)' = -\sin x$
  - $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
  - $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
  - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
  - $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

- **Osnovna pravila diferenciranja**
  Neka funkcije f i g imaju prve izvode u tački x iz intervala (a, b). Tada je :

  - $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
  - $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
  - $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
  - $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

- **Izvod složene funkcije**
  Neka funkcija $g : (a, b) \to (c, d)$ ima izvod u tački $x \in (a, b)$, i neka funkcija $f : (c, d) \to \mathbf{R}$ ima izvod u tački $g(x) \in (c, d)$. Tada složena funkcija $h : (a, b) \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(g(x))$ ima izvod u tački x i važi

$$h^{'}(x) = f_g'(g(x)) \cdot g'(x).$$

- **Izvodi višeg reda**
  $(n + 1)$-vi izvod funkcije f je prvi izvod (ako postoji) n-tog izvoda funkcije f

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))^{'}, n \in N.$$

  Primeri:

  1. Naći prvi izvod funkcije za sve vrednosti x iz domena funkcije y
     (a) $y = \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$
     (b) $y = \sqrt{x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \neq 0$
     (c) $y = \frac{x}{x+1} \Longrightarrow y' = \frac{1}{(x+1)_2}$
     (d) $y = e^x \sin x \Longrightarrow y' = e^x(\sin x + \cos x)$
     (e) $y = \frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow y' = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

  2. Naći prvi izvod funkcije
     (a) $y = e^{-x} \Longrightarrow y' = -e^{-x}$
     (b) $y = \sqrt{1 - x^2} \Longrightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
     (c) $y = \sin 2x \cdot e^{\sin x} \Longrightarrow y' = 2\cos 2x \cdot e^{\sin x} + \sin 2x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}$
     (d) $y = \arctan \frac{1}{x^2} \Longrightarrow y' = \frac{-2x}{x^4+1}$
     (e) $y = 3\ln \frac{x-1}{x+1} \Longrightarrow y' = \frac{6}{x^2-1}$

  3. Naći drugi izvod funkcije
     (a) $y = (x - 2)e^{2x} \Longrightarrow y' = (2x - 3)e^{2x}, y'' = 4(x - 1)e^{2x}$
     (b) $\arctan \frac{1+x}{1-x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}, y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

- **Izvod inverzne funkcije**
  Neka je $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektivna funkcija, a f^{-1} inverzna funkcija za datu funkciju. Ako funkcija f^{-1} ima izvod u tački x i ako je $f'(f^{-1}) \neq 0$ onda je

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

  Primer:

  1. Izračunati x_y' funkcije $y = x + \ln x$ koristeći izvod inverzne funkcije.

$$y_x' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$x_y' = \frac{1}{y_x'} = \frac{x}{x+1}$$

- **Izvod parametarski zadate funkcije**
Ako funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ imaju izvode po t i ako je $x'(t) \neq 0$ onda je izvod parametarski zadate funkcije $x = x(t), y = y(t)$ parametarski zadata funkcija $x = x(t), y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$
Primer:

1. Odrediti y''_x parametarski zadate funkcije
   (a) $x = \sin t$, $y = \cos t$
   Prvi izvod možemo odrediti koristeći pravilo za diferenciranje parametarski zadate funkcije. Kako je y'_x ponovo funkcija koja zavisi od t, i drugi izvod možemo odrediti na isti način, kao izvod prvog izvoda, zadatog parametarski.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t)'}{(\sin t)'} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\tan t)'}{(\sin t)'} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}$$

   (b) $x = \ln t$, $y = t + \frac{1}{t}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t + \frac{1}{t})'}{(\ln t)'} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = -\frac{t^2 - 1}{t}$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{t^2-1}{t})'}{(\ln t)'} = \frac{\frac{2t^2-t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2+1}{t}$$

   (c) $x = e^{-t}$, $y = e^{2t}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^{2t})'}{(e^{-t})'} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t}$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-2e^{3t})'}{(e^{-t})'} = \frac{-6e^{3t}}{-e^{-t}} = 6e^{4t}$$

- **Izvod implicitne funkcije**

Ako je funkcija $y = f(x)$ data implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, onda se odredjuje izvod funkcije F po x, gde je y funkcija koja zavisi od x. Tako se dobija izvod funkcije f u implicitnom obliku.
Primer:

1. Naći prvi i drugi izvod implicitno zadate funkcije $y = y(x)$
   (a) $x^3 + y^3 = a^3$
   Ako je funkcija $y = y(x)$ data implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, prvo se odredi izvod leve i desne strane po x, pri čemu se vodi računa da je y funkcija koja zavisi od x. Dakle i izvod y' funkcije y se dobija takodje u implicitnom obliku. Drugi izvod funkcije y se traži kao izvod implicitno zadate funkcije $y' = y'(x, y(x))$.

$$x^3 + y^3 = a^3$$

$$3x^2 + 3y^2y' = 0$$

$$y' = -\frac{x^2}{y^2}, y \neq 0$$

$$y'' = -\frac{2xy^2 - 2x^2yy'}{y^4} = -\frac{2xy - 2x^2 \cdot \frac{x^2}{y^2}}{y^3} = -2\frac{x(x^3+y^3)}{y^5}$$

   (b) $e^y = x + y$

$$e^y = x + y$$

$$e^y y' = 1 + y'$$

$$y' = \frac{1}{e^y - 1}, y \neq 0$$

$$y'' = -\frac{1}{(e^y-1)^2} \cdot e^y \cdot y' = -\frac{1}{(e^y-1)^2} \cdot e^y \cdot \frac{1}{e^y - 1} = \frac{-e^y}{(e^y-1)^3}$$

(c) $x = \ln y + \frac{x}{y} = c$

$$\ln y + \frac{x}{y} = c$$

$$\frac{1}{y} y' + \frac{y - xy'}{y^2} = 0$$

$$yy' + y - xy' = 0$$

$$y' = \frac{y}{x - y}, y \neq x$$

$$y'' = \frac{y'(x - y) - y(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{\frac{y}{x-y}(x - y) - y(1 - \frac{y}{x-y})}{(x - y)^2} = \frac{y^2}{(x - y)^3}$$

- **Logaritamski izvod**

  Primer:

  1. Naći prvi izvod funkcije

     (a) $y = x^x$

     Potrebno je diferencirati funkciju oblika $y = f(x)^{g(x)}$, što nije moguće uraditi primenom nijednog od navedenih pravila. Zato prvo logaritmujemo datu funkciju, a zatim tražimo izvod dobijene implicitne funkcije.

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

     (b) $y = (\cos x)^{\sin x}$

$$y = (\cos x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos x)$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}(\cos^2 x \cdot \ln(\cos x) - \sin^2 x)$$

- **Geometrijsko značenje prvog izvoda**

  Vrednost prvog izvoda funkcije f u tački x jednaka je koeficijentu pravca tangente na grafik funkcije f u tački x. **Jednačina tangente** t na grafik funkcije f u tački $A(x_0, y_0$ krive $y = f(x)$ je:

$$t : y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0),$$

  ukoliko je prvi izvod $f^{'}(x_0)$ konačan.
  Ako $f^{'}(x_0)$ nije konačan ($f^{'}(x_0) = \pm\infty$), onda je tangenta prava $x = x_0$.
  Jednačina normale n na grafik funkcije f u tački $A(x_0, y_0$ krive $y = f(x)$ je:

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{f^{'}(x_0)}(x - x_0)$$

  ako je prvi izvod $f^{'}(x_0)$ konačan i $f^{'}(x_0) \neq 0$.
  Ako je $f^{'}(x_0) = 0$, tada je normala prava $x = x_0$, a ako prvi izvod nije konačan tada je normala prava $y = y_0$.

  Primer:

  1. Napisati jednačinu tangente i normale krive

(a) $y = x^2 + 2x$ u tački čija je apscisa $x = 1$
Ordinata date tačke je $y(1) = 3$. Fukcija je data eksplicitno što znači da je $y = 2x+2$, a u datoj tački je $y'(1) = 4$.
Tada je u tački $(1, 3)$:
- jednačina tangente

$$t : y - 3 = 4(x - 1) tj. t : 4x - y - 1 = 0$$

- jednačina normale

$$n : y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 1) tj. n : x + 4y - 13 = 0$$

(b) $y = 2\sin^2 t + \sin 2t$, a $x = 2\operatorname{tg} t$ u tački $A(2, 2)$ Prvo se odredi vrednost parametra t u tački A koristeći jednačine $x = x(t)$ ili $y = y(t)$. Znači $2 = 2\operatorname{tg} t \rightarrow \operatorname{tg} t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, a proverom vidimo da važi $y = 2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1 = 2$.
Prema pravilu diferenciranja parametarski zadate funkcije

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin t \cos t + 2\cos 2t}{\frac{2}{\cos^2 t}} = \cos^2 t(\sin 2t + \cos 2t)$$

U tački A $y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$
- jednačina tangente:

$$t : y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) tj. t : x - 2y + 2 = 0$$

- jednačina normale:

$$n : y - 2 = -2(x - 2) tj. n : 2x + y - 6 = 0$$

PRIMENA IZVODA

Lopitalovo pravilo

- Granične vrednosti mogu biti različitog neodredjenog tipa
$$"\frac{0}{0}","\frac{\infty}{\infty}","0\cdot\infty","\infty-\infty","1^{\infty}","0^{0}","\infty^{0}"$$
U ovim slučajevima je pogodno primeniti **Lopitalovo pravilo**.

- **Lopitalovo pravilo (teorema)**
Neka su funkcije f i g neprekidne u nekoj okolini U tačke α i imaju izvod za sve x iz te okoline sem eventualno u tački α i važi $g'(x)\neq 0$ za sve x iz te okoline sem u tački α, gde je α broj ili $\pm\infty$.
Ako $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ (ili $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$ i postoji (konačna ili beskonaňa) graniňa vrednost $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tada postoji i $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ i važi
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Transformacija ostalih neodredjenih oblika na oblike $"\frac{0}{0}"$ ili $"\frac{\infty}{\infty}"$ koji su pogodni za primenu Lopitalovog pravila.

  (*) $"0\cdot\infty"$
  Pri izračunavanju $\lim\limits_{x\to\alpha}(f_1(x)\cdot f_2(x))$ gde je $\lim\limits_{x\to\alpha} f_1(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to\alpha} f_2(x)=\infty$, izraz $f_1(x)\cdot f_2(x)$ možemo zapisati na sledeí način
  $$f_1(x)\cdot f_2(x)=\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$$
  i tako ga svesti na oblik $"\frac{0}{0}"$.

  (**) $"\infty-\infty"$
  Pri izračunavanju $\lim\limits_{x\to\alpha}(f_1(x)-f_2(x))$ gde je $\lim\limits_{x\to\alpha} f_1(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} f_2(x)=\infty$, izraz $f_1(x)-f_2(x)$ možemo zapisati na sledeí način
  $$f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)(1-\frac{f_2(x)}{frac1(x)}.$$
  \- Ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to 1$ kada $x\to\alpha$ dobijamo slučaj (*).
  \- Ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ ne teži ka 1 kada $x\to\alpha$, odnosno $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to\infty$ ili $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to c$ $(c\neq 1)$, dobijamo odredjene izraze $"\infty\cdot\infty'=\infty$ ili $"\infty\cdot(1-c)-\infty$.

  (***) $"1^{\infty}","0^{0}","\infty^{0}"$
  Ovi oblici se pomoću jednakosti
  $$[f_1(x)]^{f_2(x)}=e^{f_2(x)\cdot\ln f_1(x)}$$
  svode na slučaj (*).

Primer:

1. Izračunati graničnu vrednost:
   (a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\ln x}$
   $"\frac{0}{0}"$ - direktno primenjujemo LP
   $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{\frac{1}{x}}=1$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$
   $"\frac{0}{0}"$- direktno primenjujemo LP
   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{\frac{-1}{e-x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}+1)(e-x)}{e^x(e-x-1)}=\frac{2e}{e-1}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$

"$\frac{0}{0}$"- direktno primenjujemo LP

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$

(d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a}$

"$\frac{\infty}{\infty}$" - direktno primenjujemo LP

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a}=\lim\limits_{x\to a}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\cos a\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{e^x-e^a\cdot e^x}}=\cos a\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{e^x}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=$
$\cos a\cdot\dfrac{1}{e^a}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x}{1}=\cos a$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$

"$\frac{\infty}{\infty}$" - direktno primenjujemo LP

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$

Neodredjeni izraz oblika "$0\cdot\infty$" se svodi na "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}}=\infty$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$

Neodredjeni izraz oblika "$\infty-\infty$" faktorizacijom svodimo na "$0\cdot\infty$", a zatim

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$$

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

Granična vrednost je oblika "0^0"

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=A$$

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=(\text{"}0\cdot\infty\text{"})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=(\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Na osnovu toga je

$$\ln A=0\to A=e^0=1$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^x$

Granična vrednost je oblika "∞^0"

$$A=\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^x$$

$\ln A=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(\operatorname{ctg} x)=(\text{"}0\cdot\infty\text{"})=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\frac{1}{x}}=(\text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"})=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\sin x\cdot\cos x}$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\cos x}=1\cdot 0=0$

Na osnovu toga je

$$\ln A=0\to A=e^0=1$$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

Granična vrednost je oblika "1^∞"

$$A = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\ln A = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = (\text{"}\frac{0}{0}\text{"}) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = 1 \to A = e^1 = e$$

Tejlorova i Maklorenova formula

- Neka je f neprekidna funkcija koja ima neprekidne sve izvode do izvoda reda n na itervalnu $[a,b]$ i ima izvod reda $n+1$ na intervalu (a,b). Tada za $x, x_0 \in [a,b]$ važi ***Tejlorova formula***

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

T_n je ***Tejlorov polinom*** stepena n za funkciju f u okolini tačke x_0.Kaže se da on aproksimira funkciju f u okolini x_0 sa ***greškom (ostatkom)*** R_n.

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\varepsilon)}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

pri čemu je ε neka tačka izmedju x i x_0

- ***Maklorenova formula*** se dobija za $x_0 = 0$

$$f(x) = M_n(x) + R_n(x).$$

$$M_n(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\varepsilon)}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Primer:

1. Za funkciju $f(x) = a^x$ napisati Maklorenov polinom stepena n

$$f'(x) = \ln a \cdot a^x$$
$$f''(x) = \ln^2 a \cdot a^x$$
$$f'''(x) = \ln^3 a \cdot a^x$$

ako pretpostavimo

$$f^{(n)}(x) = \ln^n a \cdot a^x$$

onda

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \ln^n a \cdot (a^x)' = \ln^n a \cdot a^x \ln a = \ln^{n+1} a \cdot a^x$$

Dakle, za svako n $f^{(n)}(0) = \ln^n a$, pa

$$M_n(x) = 1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2}x^2 + ... + \frac{\ln^n a}{n!}(x)^n$$

2. Za funkciju $f(x) = e^x$ napisati Tejlorov i Maklorenov polinom stepena n. Za svako n $f^{(n)}(x) = e^x$

$$T_n(x) = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n$$

$$M_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

3. Aproksimirati broj e koristeći Maklorenov polinom šestog stepena.

$$M_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^6}{6!}$$

$e = e^1 \approx M_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{6!} \approx 2.71806$

4. Napisati polinom $P(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$ po stepenima od $x + 1$.

$$P(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8 \to P(-1) = 20$$
$$P'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4x - 12 \to P'(-1) = -8$$
$$P''(x) = 20x^3 + 6x + 4 \to P''(-1) = -22$$
$$P'''(x) = 60x^2 + 6 \to P'''(-1) = 66$$
$$P^{iv}(x) = 120x \to P^{iv}(-1) = -120$$
$$P^{v}(x) = 120 \to P^{v}(-1) = 120$$
$$P^{vi}(x) = 0$$

Za svako $n > 5$ važi da je $P^{(n)}(x) = 0$
Tejlorov polinom petog stepena za funkciju P u okolini tačke $x_0 = -1$

$$P(x) = 20 - 8(x + 1) - 22\frac{(x + 1)^2}{2} + 66\frac{(x + 1)^3}{3!} - 120\frac{(x + 1)^4}{4!} + 120\frac{(x+1)^5}{5!}$$

odnosno,

$$P(x) = (x + 1)^5 - 5(x + 1)^4 + 11(x + 1)^3 - 11(x + 1)^2 - 8(x + 1) + 20$$

sa greškom $R_5(x) = 0$

5. Aproksimirati broj e koristeći Maklorenov polinom drugog stepena