Rodrigova matrica-(*nastavak vidi handout no1)*

Neka su Dekartove koordinate tačke M u njenom početnom i krajnjem položaju:

$$\left\{\vec{r}_0\right\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}, \ \left\{\vec{r}_1\right\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \tag{3.9}$$

Relacija (3.8) može se napisati u obliku:

$$\left\{\vec{r}_1\right\} = \left[A_r\right]\left\{\vec{r}_0\right\}, \tag{3.10}$$

gde je sa:

$$[A_r] = [I] + (1-\cos\varphi)[e^d]^2 + (\sin\varphi)[e^d], \tag{3.11}$$

označena tzv. Rodrigova matrica. Matrice koje figurišu u izrazu (3.11) imaju sledeću formu:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ [e^d] = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

pri čemu su sa e_x, e_y, e_z označene projekcije jediničnog vektora $\vec{e}$ na ose nepomičnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Ako je za kruto telo $[V]$ vezan koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ koji se u početnom položaju, označenom sa $O\xi_{(0)}\eta_{(0)}\zeta_{(0)}$, poklapa sa nepomičnim koordinatnim sistemom $Oxyz$, projekcije vektora $\vec{r}_0$ biće definisane projekcijama ξ, η, ζ vektora $\vec{r}$ na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$:

$$\left\{\vec{r}_0\right\} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \tag{3.13}$$

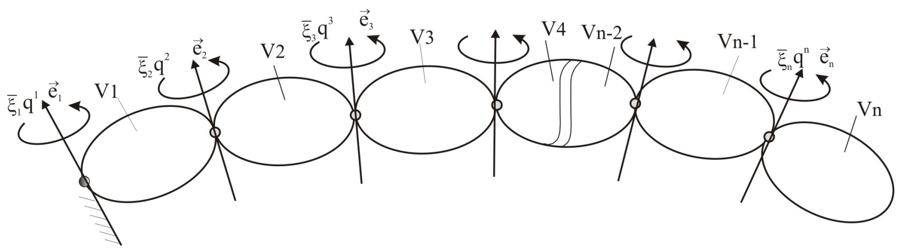
Odgovarajuće projekcije vektora $\vec{e}$ kolinearnog sa osom konačne rotacije $O\tau$ na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ i ose koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ vezanog za telo su jednake:

$$\left\{\vec{e}\right\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{Bmatrix}. \tag{3.14}$$

Na osnovu (3.9) i (3.13), izraz (3.10) može se napisati u obliku:

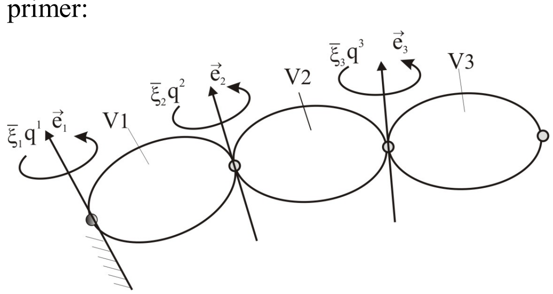
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \left[A_r\right]\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \tag{3.15}$$

3.1 Složene matrice transformacija



q^i, i=1,2,...,n- relativne koordinate osim prve

primer:



zaustavlja se 1 i 2 segment a treći rotira oko sada nepokretne ose 3 za ugao q^3 i tako redom.Sistem je u početnom trenutku nalazio u referentnom položaju.

$\left(V_3(0)\right) \xrightarrow{\bar{\xi}_3 q^3} \left(V_3(I)\right)$,

$\left(V_3(I)\right) \xrightarrow{\bar{\xi}_2 q^2} \left(V_3(II)\right)$, $\left(V_3(0)\right)$-referentni položaj, $\left(V_3\right)$-proizvoljni položaj,

$\left(V_3(II)\right) \xrightarrow{\bar{\xi}_1 q^1} \left(V_3\right)$,

Interesuju nas projekcije uočenog vektora na ose Ox,Oz,Oy (koje odgovaraju referentnoj konfiguraciji i to posle rotacije)

$$\left\{\vec{\rho}_3\right\} = \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix} \text{-referentna konfiguracija}$$

<u>prva rotacija $\underline{\bar{\xi}_3 q^3}$</u>

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \left[A_{R_3} \right] \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix}$$

druga rotacija $\underline{\bar{\xi}_2 q^2}$

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} = \left[A_{R_2} \right] \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \left[A_{R_2} \right]\left[A_{R_3} \right] \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix}$$

treća rotacija $\underline{\bar{\xi}_1 q^1}$

$$\begin{Bmatrix} x''' = x_3 \\ y''' = y_3 \\ z''' = z_3 \end{Bmatrix} = \left[A_{R_1} \right] \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} = \left[A_{R_1} \right]\left[A_{R_2} \right]\left[A_{R_3} \right] \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix} = \left[A_{0,3} \right] \begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \varsigma_3 \end{Bmatrix}$$

$\left[A_{0,3} \right]$ složena matrica transformacije

$$\left[A_{0,3} \right] = \left[A_{R_1} \right]\left[A_{R_2} \right]\left[A_{R_3} \right]$$

gde je sada

$$[A_{Rk}] = [I] + \bar{\xi}_k \left[(1 - \cos q^k)[e^d]^2 + (\sin q^k)[e^d] \right], \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

uopštavanjem

$$\left[A_{0,k} \right] = \left[A_{R_1} \right]\left[A_{R_2} \right]\left[A_{R_3} \right] \ldots \left[A_{R_k} \right]$$

4. Kinematika otvorenog kinematičkog lanca

4.1 Uvodne napomene

Razmotrimo otvoreni kinematički lanac $(V_1), (V_2), \ldots, (V_n)$ bez grananja pri čemu je prvo kruto telo (V_1) u lancu (sl.4.1) u vezi sa nepomičnim postoljem. Neka dva susedna tela (V_{i-1}) i (V_i) lanca, vezana zglobom (i) čine kinematički par V -te klase koji dozvoljava ili pravolinijsku translaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) ili obrtanje tela (V_i) u odnosu na osu vezanu za telo (V_{i-1}). Uvodimo sledeće matrice:

$$\{\xi\} \in R^{n \times 1}, \{\bar{\xi}\} \in R^{n \times 1}, \quad , \qquad (4.1)$$

čiji se elementi ξ_i $(i=1,2,...,n)$ odnosno $\overline{\xi}_i$ $(i=1,2,...,n)$ odredjuju na sledeći način. U slučaju da zglob (i) dozvoljava pravolinijsku translaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) važiće ((V_0) -nepomično postolje):

$$\xi_i = 1, \quad \overline{\xi}_i = 0, \tag{4.2}$$

U slučaju da zglob (i) dozvoljava rotaciju tela (V_i) u odnosu na osu vezanu za telo (V_{i-1}) važiće

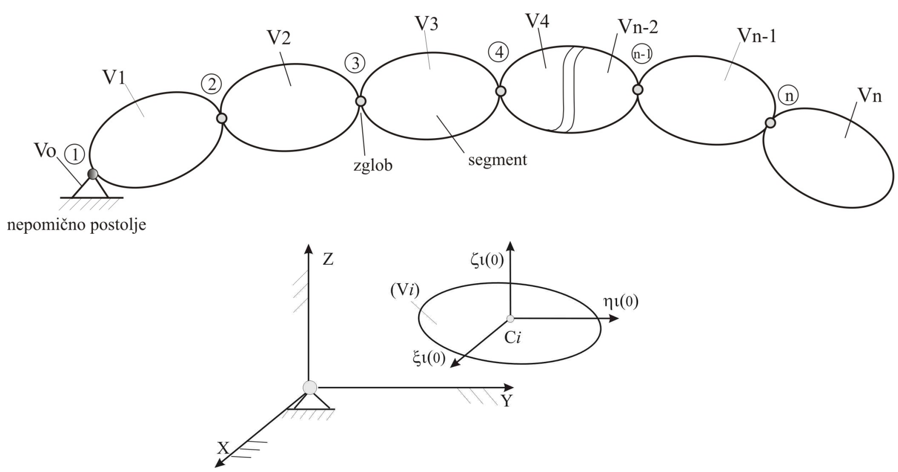
$$\xi_i = 0, \quad \overline{\xi}_i = 1, \tag{4.3}$$

Očigledno je da su zadavanjem elemenata jedne od matrica (4.1) odredjeni i elementi druge matrice jer uvek važi:

$$\xi_i + \overline{\xi}_i = 1 \qquad i = 1,2,...,n, \tag{4.4}$$

Zglob (i) za koji je $\xi_i = 1$ naziva se *prizmatičnim* a zglob (i) za koji je $\overline{\xi}_i = 1$ - *cilindrični.*

U cilju odredjivanja konfiguracija kinematičkog lanaca uvodimo nepomični pravougli Dekartov koordinatni sistem *Oxyz* (sl. 4.1b) i n lokalnih koordinatnih sistema, takodje pravouglih Dekartovih. Na primer, lokalni koordinatni sistem $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ vezan je za telo (V_i) $(i=1,2,...,n)$, tačka C_i predstavlja centar inercije tela (V_i). U nekoj konfiguraciji otvorenog kinematičkog lanca odgovarajuće ose lokalnih koordinatnih sistema paralelne

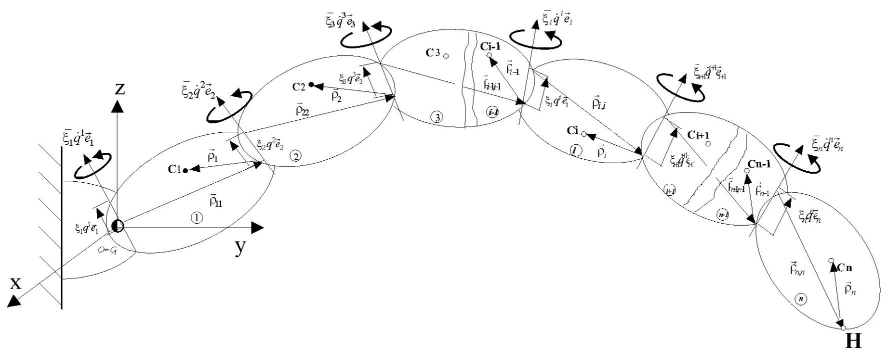


Slika 4.1a,b

su odgovarajućim osama nepokretnog koordinatnog sistema. Tu konfiguraciju nazivamo *referentnom* i u njoj obično uzimamo da su koordinate koje odredjuju konfiguraciju lanca jednake nuli (iako to nije obavezno). Za tu konfiguraciju koju ćemo označavati sa (*0*) dakle važi:

$$C_{i\xi_{i(0)}} \parallel Ox,\ C_{i\eta_{i(0)}} \parallel Oy,\ C_{i\zeta_{i(0)}} \parallel Oz,\ \ i=1,2,...,n\ \ , \tag{4.5}$$

gde $C_i\xi_{i(0)}\eta_{i(0)}\zeta_{i(0)}$ predstavlja lokalni koordinatni sistem tela (V_i) u referentnoj konfiguraciji.



sl.4.2

Za odredjivanje vektora položaja proizvoljne tačke koja pripada kinematičkom lancu uvodi se niz vektora čiji početak i završetak pripadaju pojedinim krutim telima toga lanca. U tom cilju posmatra se položaj niza tačaka kinematičkog lanca (vidi sl.4.2). Najpre, u pitanju su tačke $O_i'\left(O' \in (V_i),\ i=1,2,...,n\right)$ koje se nalaze na osama $O_{i\chi_i}\left(O_1 \equiv 0,\ O_{i+1} \in (V_i),\ i=1,2,...,n-1\right)$ cilindričnih (prizmatičnih) zglobova koje su orijentisane jediničnim vektorima $\vec{e}_i\left(i=1,2,...,n\right)$. Orijentacija vektora $\vec{e}_i$ poklapa se sa pozitivnom orijentacijom koordinate q^i koja odredjuje translatorno pomeranje tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) ukoliko je u pitanju prizmatični zglob. U slučaju cilindričnog zgloba smer vektora $\vec{e}_i$ pridružen je po pravilu desnog zavrtnja pozitivnom smeru ugla obrtanja q^i tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}).

Relevantni vektori položaja otvorenog kinematičkog lanca odredjeni su relacijama $(i=1,2,...,n)$:

$$\overrightarrow{O_i'O_{i+1}} = \vec{\rho}_{ii}\ , \tag{4.6}$$

$$\overrightarrow{O_{i+1}C_i} = \vec{\rho}_i\ . \tag{4.7}$$

Primetimo da tačka O_{n+1} predstavlja proizvoljno izabranu tačku koja pripada poslednjem krutom telu (V_n) u otvorenom kinematičkom lancu.

Vektori $\vec{e}_i, \vec{\rho}_i, \vec{\rho}_{ii}$ zadaju se u koordinatama lokalnog koordinatnog sistema $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$. Očigledno je da su takve koordinate (projekcije na odgovarajuće ose) tih vektora konstantne. U referentnoj konfiguraciji (o) lanca koordinate tih vektora poklapaju se sa njihovim projekcijama na ose nepokretnog koordinatnog sistema *Oxyz*.

Pošto dva susedna tela (V_{i-1}) i (V_i), povezani zglobom (i), čine kinematički par V-te klase koji dopušta jedan stepen slobode kretanja segmenta (V_i) u odnosu na segment (V_{i-1}), za Langranževe koordinate otvorenog kinematičkog lanca predstavljene su skupom pomenutih koordinata

$$q^i: \left(q^1, q^2, ..., q^n\right). \tag{4.8}$$

Vektor

$$\vec{\rho}_{ii} = \overrightarrow{A_i B_i}\,, \tag{4.9}$$

pri čemu važi $A_i, B_i \in (V_i)$ predstavlja sledeću funkciju Langranževih (nezavisnih generalisanih) koordinata:

$$\vec{\rho}_{ii} = \vec{\rho}_{ii}\left(q^1, q^2, ..., q^n\right). \tag{4.10}$$

Za takav vektor važe relacije:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\rho}_{ii} \qquad \forall\, \alpha \le i, \\ &\frac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad\qquad\quad\;\; \forall\, \alpha > i. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dokaz: Primena Ojlerovog obrasca daje

$$\frac{d\vec{\rho}_{ii}}{dt} = \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{i} \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \dot{q}^\alpha \times \vec{\rho}_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{i} \left(\bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\rho}_{ii}\right)\dot{q}^\alpha$$

s druge strane je

$$\frac{d\vec{\rho}_{ii}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{i} \frac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha, \qquad \frac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0, \;\; \forall \alpha > i$$

oduzimanjem sledi da je

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} - \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\rho}_{ii}\right)\dot{q}^\alpha \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\rho}_{ii} & \forall \alpha \le i \\ \dfrac{\partial \vec{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0, & \forall \alpha > i \end{cases}$$