Универзитет у Београду

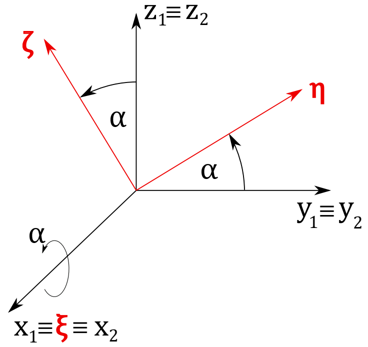
Машински факултет

Механика робота

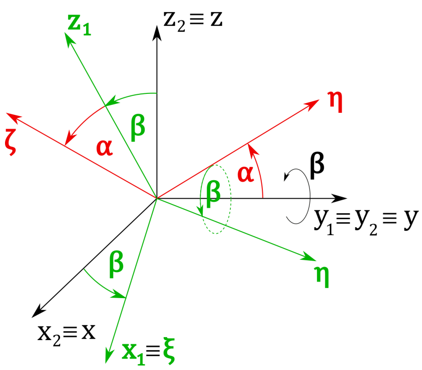
Вежбе - друга недеља

Београд, 2023.
$\mathbb{NR}$

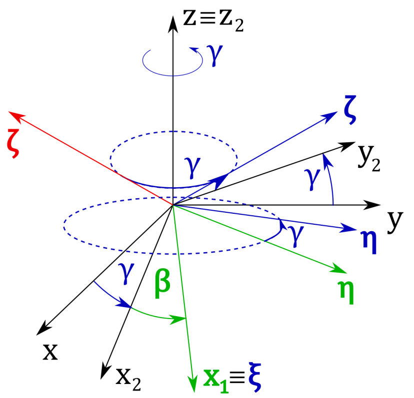
Задатак 4: Узастопне ротације око оса непокретног координатног система Израчунати матрицу трансформаицје за случај да се тело обрће око одговарајућих оса непокретног координатног система $Oxyz$, сукцесивно. Нека се прва ротација врши око осе Ox за угао $\alpha = 30°$, друга око осе Oy за угао $\beta = 45°$, а трећа око осе Oz за угао $\gamma = 60°$. Уводи се претпоставка да се координатни системи $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ у почетном положају поклапају.



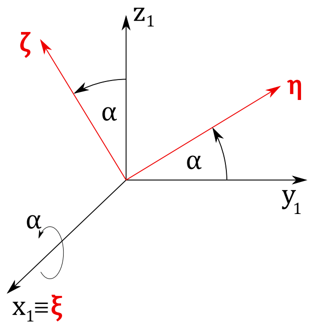
Након прве ротације за угао α уводимо нови непокретни координатни систем $Ox_2y_2z_2$. Сада стари непокретни координатни систем $Ox_1y_1z_1$ постаје покретан.



Након друге ротације за угао β уводимо нови непокретни координатни систем $Oxyz$. Сада стари непокретни координатни систем $Ox_2y_2z_2$ постаје покретан. Ради визуализације одговарајућих кретања, на слици је приказано и то како оса $O\eta$ окружи око осе Oy_1 за угао β.

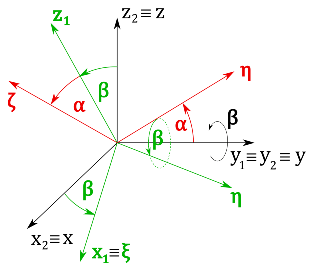


Након последње ротације за угао γ, координатни систем $Ox_2y_2z_2$ се помера у односу на $Oxyz$. На слици је приказано и то како осе $O\zeta$ и $O\eta$ кружe око осе Oz за угао γ, међутим није потребно посебно водити рачуна о томе, само је потребно одредити матрицу трансформације између координатних система $Ox_2y_2z_2$ и $Oxyz$.



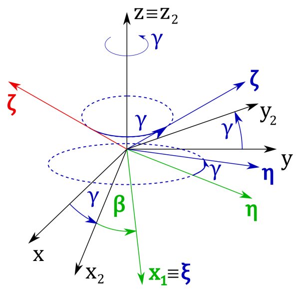
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [A_{x_\alpha}] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$[A_{x_\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [A_{y_\beta}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{y_\beta}] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_{z_\gamma}] \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{z_\gamma}] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [A_{x_\alpha}] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \left[A_{y_\beta}\right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \left[A_{z_\gamma}\right] \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \left[A_{z_\gamma}\right] \left[A_{y_\beta}\right] [A_{x_\alpha}] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0,3536 & -0,5732 & 0,7392 \\ 0,6124 & 0,7392 & 0,2803 \\ -0,7071 & 0,3536 & 0,6124 \end{bmatrix}$$

	Дуални објекат првог реда	Дуални објекат другог реда
Дуални објекти	$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$	$[a^d] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$

Примена дуалних објеката при одређивању векторског производа два вектора

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a^d] \{\vec{b}\}$$

Векторски производ није комутативан!

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow [a^d] \{\vec{b}\} = -[b^d] \{\vec{a}\}$$

Пример

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Први начин:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{j} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Други начин:

$$[a^d] \{\vec{b}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Квадрат дуалног објекта

$$\begin{aligned} [a^d]^2 &= \begin{bmatrix} -a_3^2 - a_2^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & -a_3^2 - a_1^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} (a_1\, a_2\, a_3) - a^2 [I] \end{aligned}$$

Непарни и парни степени дуалног објекта

$$\left[a^d\right]^{2i} = (-1)^{i-1} a^{2i-2} \left[a^d\right]^2, \; i = 1, 2, 3, .. \tag{1}$$

$$\left[a^d\right]^{2i-1} = (-1)^{i-1} a^{2i-2} \left[a^d\right], \; i = 1, 2, 3, .. \tag{2}$$

где a представља интензитет вектора (дуалног објекта првог реда).

Задатак 5 Одредити дуалне објекте $\left[a^d\right]$, $\left[a^d\right]^2$, $\left[a^d\right]^5$ и $\left[a^d\right]^6$ јединичног вектора $\vec{e} = \vec{k} = (0\,0\,1)^T$.

$$\left[a^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[a^d\right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Применом израза (2), одређујемо пети степен дуалног објекта (вектора јединичног интензитета):

$$\left[a^d\right]^5 = \left[a^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Слично томе, примењујемо израз (1):

$$\left[a^d\right]^6 = \left[a^d\right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Родригов образац: векторски облик

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (1 - \cos\varphi)\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}_0) + \sin\varphi\,(\vec{e} \times \vec{r}_0)$$

- $\vec{e}$ - јединични вектор осе обртања,
- φ - угао обртања,
- $\vec{r}_1$, $\vec{r}_0$ - почетни и крајњи положај произвољне тачке M у односу на непокретни координатни систем.

Задатак 6 Познат је вектор $\vec{P} = (1\,0\,2)^T$. Одредити вектор $\vec{P}_1$ који се добија ротацијом вектора $\vec{P}$ око осе која је одређена јединичним вектором $\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ за угао $\varphi = 60°$.

$$\vec{P}_1 = \vec{P} + (1-\cos\varphi)\vec{e}\times\left(\vec{e}\times\vec{P}\right) + \sin\varphi\left(\vec{e}\times\vec{P}\right)$$

$$\vec{e}\times\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\vec{e}\times\left(\vec{e}\times\vec{P}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{P}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Родригов образац: матрични облик Полазећи од Родриговог обрасца у векторском облику:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (1-\cos\varphi)\vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{r}_0) + \sin\varphi\,(\vec{e}\times\vec{r}_0)$$

уколико изразимо векторски производ уз помоћ производа дуалног објекта првог вектора са другим вектором:

$$\vec{e}\times\vec{r}_0 = \left[e^d\right]\{\vec{r}_0\}\,,\quad \vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{r}_0) = \left[e^d\right]^2\{\vec{r}_0\}$$

можемо написати Родригов образац у матричном облику:

$$\begin{aligned}\{\vec{r}_1\} &= \{\vec{r}_0\} + (1-\cos\varphi)\left[e^d\right]^2\{\vec{r}_0\} + \sin\varphi\left[e^d\right]\{\vec{r}_0\} \\ &= \left([I] + (1-\cos\varphi)\left[e^d\right]^2 + \sin\varphi\left[e^d\right]\right)\{\vec{r}_0\} \\ &= [A_r]\{\vec{r}_0\}\end{aligned}$$

Уочавамо матрицу трансформације:

$$[A_r] = [I] + (1-\cos\varphi)\left[e^d\right]^2 + \sin\varphi\left[e^d\right]$$

Задатак 6 - други начин

$$\vec{e}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{Bmatrix}\Rightarrow\left[e^d\right]=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[e^d\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[e^d\right]^2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$[A_r]=[I]+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$[A_r]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\left\{\vec{P}_1\right\}=[A_r]\left\{\vec{P}\right\}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -1\\ 2\end{Bmatrix}$$