Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:

Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.

Za dodatna pitanja vezano za zadatak.

Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!.

Za ideju, komentar na izvođenje.

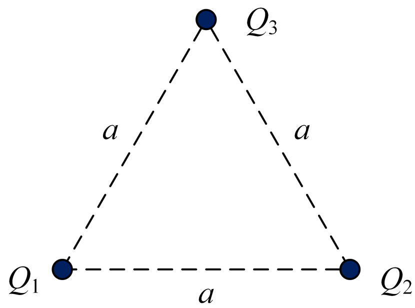
Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
- Uživo: tokom termina konsultacija **sredom u 10 časova** u Laboratoriji za elektrotehniku i elektroniku (soba 2, pored Studentske službe).

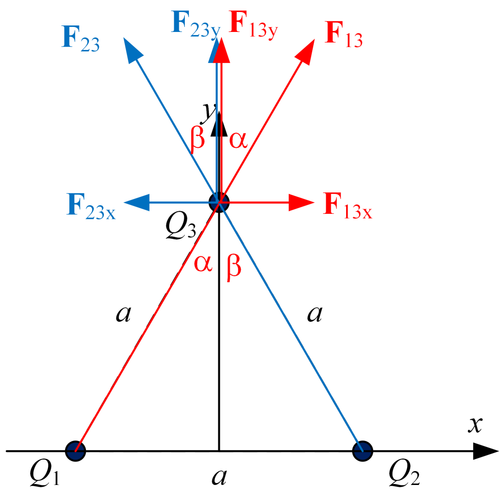
1 Elektrostatika

1. Tri mala tela, naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 100$ pC i $Q_3 = -200$ pC, nalaze se u vazduhu, u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a = 2$ cm. Izračunati vektor jačine elektrostatičke sile koja deluje na telo naelektrisanja Q_3.



Rešenje: Uvedimo koordinatni sistem kao na slici. Vektor elektrostatičke sile ćemo dobiti primenom Kulonovog zakona, koji pišemo

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}\mathbf{r}_{012}.$$



Konkretno, u ovom zadatku silu na tačkasto naelektrisanje Q_3 ćemo dobiti superpozicijom sila:

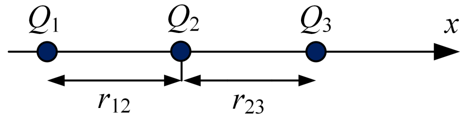
$$\begin{aligned}
\mathbf{F_3} =& \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2}\mathbf{r_{013}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{r_{23}^2}\mathbf{r_{023}} \\
=& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}\left(\sin\alpha\mathbf{i}_\mathrm{x} + \cos\alpha\mathbf{i}_\mathrm{y}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overset{Q_1}{\cancel{Q_2}} Q_3}{a^2}\left(-\sin\beta\mathbf{i}_\mathrm{x} + \cos\beta\mathbf{i}_\mathrm{y}\right) \\
=& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}\left(\frac{a/2}{a}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{a\sqrt{3}/2}{a}\mathbf{i}_\mathrm{y}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}\left(-\frac{a/2}{a}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{a\sqrt{3}/2}{a}\mathbf{i}_\mathrm{y}\right) \\
=& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}_\mathrm{y} \\
=& 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-12} \cdot (-200) \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{3}\mathbf{i}_\mathrm{y} \\
=& -450\sqrt{3}\,\mathbf{i}_\mathrm{y}\ \text{nN}.
\end{aligned}$$

! Ovaj zadatak ilustruje primenu Kulonovog zakona u sistemu sa više tačkastkih naelektrisanja u vakuumu. Važno je razumeti da se ukupna sila na naelektrisanje Q_3 dobija kao **vektorski** zbir pojedinačnih sila koja na njega deluju od strane Q_1 i Q_2.

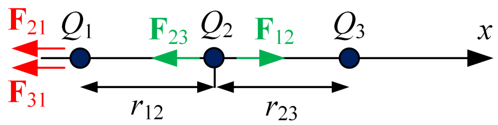
Da li smo mogli na samom početku rešavanja zadatka da predvidimo koju će komponentu imati vektor sile

Da li bi se tražena sila promenila ukoliko naelektrisanja Q_1 i Q_2 zamene mesta? Šta ako je $Q_1 \neq Q_2$?

2. Tri tačkasta naelektrisanja su postavljena na x-osi, kao na slici. Ukoliko je $Q_1 = 20\ \mu$C, $Q_2 = -6\ \mu$C i $Q_3 = 10\ \mu$C i rastojanje između naelektrisanja Q_1 i Q_2 je $r_{12} = 45$ cm, a rastojanje između Q_2 i Q_3 je $r_{23} = 50$ cm. Odrediti silu na tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2.



Rešenje: Prema oznakama sa slike imamo da je sila na tačkasto naelektrisanje Q_1:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_1}{r_{12}^2}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{(r_{12}+r_{23})^2}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) \\
&= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-6\cdot 10^{-6}\cdot 20\cdot 10^{-6}}{45^2\cdot 10^{-4}}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) + 9\cdot 10^9\cdot\frac{20\cdot 10^{-6}\cdot 10\cdot 10^{-6}}{95^2\cdot 10^{-4}}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) \\
&= -\frac{16}{3}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) + \frac{720}{361}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) = 3,34\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Sila na tačkasto naelektrisanje Q_2 je:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3 Q_2}{r_{23}^2}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) \\
&= 9\cdot 10^9\cdot\frac{20\cdot 10^{-6}\cdot(-6)\cdot 10^{-6}}{45^2\cdot 10^{-4}}\mathbf{i}_\mathrm{x} + 9\cdot 10^9\cdot\frac{10\cdot 10^{-6}\cdot(-6)\cdot 10^{-6}}{50^2\cdot 10^{-4}}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) \\
&= -\frac{16}{3}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \left(-\frac{54}{25}\right)(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) = -3,17\,\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

3. Dve kuglice su naelektrisane količinom naelektrisanja $Q_1 = 10$ nC i $Q_2 = 30$ nC, a nalaze se na rastojanju r u vakuumu. Koliko je rastojanje r ako je intenzitet sile uzajamnog delovanja kuglica 27 mN?

Rešenje: Intenzitet uzajamnog delovanja kuglica je

$$
|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1 Q_2|}{r^2} \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\varepsilon_0\,|\mathbf{F}|}}.
$$

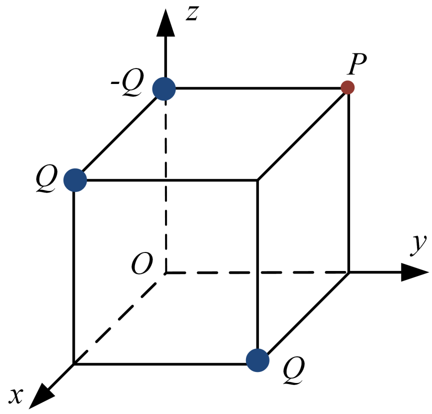
Odavde je

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{9\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{10\cdot\cancel{10^{-9}}\cdot 30\cdot 10^{-9}}{27\cdot 10^{-3}}} \\
&= \sqrt{100\cdot 10^{-6}} = 10\cdot 10^{-3} = 10\ \mathrm{mm}.
\end{aligned}
$$

4. **(Za samostalni rad)** Jedno tačkasto naelektrisanje Q se nalazi u koordinatnom početku Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, a drugo tačkasto naelektrisanje Q_1 se nalazi u koordinati (a, a). Odrediti izraz za električnu silu kojom naelektrisanje Q deluje na naelektrisanje Q_1.

Rezultat: $\mathbf{F} = \dfrac{QQ_1\sqrt{2}}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{y}\right).$

5. Tri tačkasta naelektrisanja Q, Q i $-Q$ su raspoređena u temenima kocke ivice dužine a, kao na slici. Sredina je vakuum. Odrediti izraz za vektor jačine električnog polja u tački P.



Rešenje: Vektor jačine električnog polja ćemo dobiti superpozicijom električnih polja zadata tri tačkasta naelektrisanja. Za naelektrisanje postavljeno na koordinatama $(0, 0, a)$, $(a, 0, a)$ i $(a, a, 0)$ imamo, respektivno:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-Q}{a^2}\mathbf{i}_\mathrm{y} \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{y}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{y}\right) \\
\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{z}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{z}\right).
\end{aligned}$$

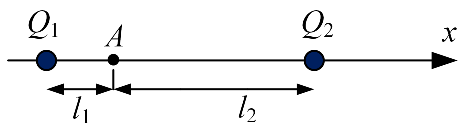
Konačno,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{y} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{y} - \mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{z}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{y} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-2\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{y} + \mathbf{i}_\mathrm{z}\right)\right).
\end{aligned}$$

Vektor jačine električnog polja tačkastog naelektrisanja ima radijalan pravac. To ja pravac duž vektora položaja $\mathbf{r}$, koji spaja centar simetrije, u ovom slučaju tačkasto naelektrisanje, sa nekom tačkom u prostoru.

Odrediti izraz za vektor jačine električnog polja u tački A od naelektrisanja postavljenog u tačku $(a, 0, 0)$.

6. Intenzitet električnog polja u tački A, koja se nalazi između dva tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2 je jednak nuli. Ako je $l_2 = 3l_1$, izračunati odnos između naelektrisanja Q_2/Q_1?



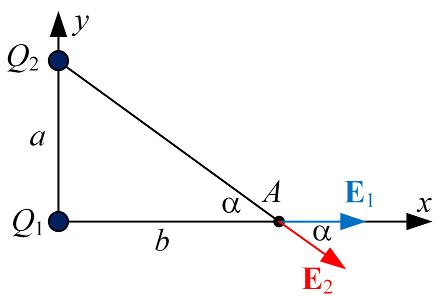
Rešenje: Prema uslovu zadatka je

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{Q_1}{\cancel{l_1^2}} \cancel{\mathbf{i}_x} + \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{Q_2}{9\cancel{l_1^2}} (-\cancel{\mathbf{i}_x}) . \qquad (1)$$

Iz relacije (1) je

$$Q_1 - \frac{Q_2}{9} = 0 \Longrightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = 9.$$

7. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = -50$ nC i $Q_2 = 20$ nC se nalaze u dva temena pravouglog trougla dužina stranica kateta $a = 6$ cm i $b = 8$ cm. Izračunati vektor jačine električnog polja u tački A i njegov intenzitet.



Rešenje: Prema oznakama sa slike imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{b^2} \mathbf{i}_x \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{a^2 + b^2} (\cos\alpha \mathbf{i}_x + \sin\alpha \mathbf{i}_y) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{a^2 + b^2} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{i}_x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{i}_y \right) .
\end{aligned}$$

Zamenom vrednosti, dobija se

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-50 \cdot 10^{-9}}{64 \cdot 10^{-4}} \mathbf{i}_x = 70\,312,5\, \mathbf{i}_x \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}, \\
\mathbf{E}_2 &= 14\,400 \mathbf{i}_x + 10\,800 \mathbf{i}_y \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$

Vektor jačine električnog polja je vektorski zbir

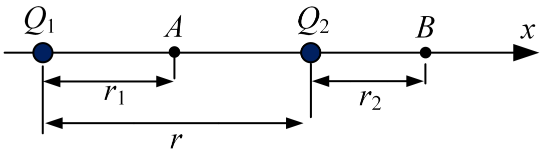
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = (84\,712,5 \mathbf{i}_x + 10\,800 \mathbf{i}_y) \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

pa je intenzitet ovog vektora

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{84\,712,5^2 + 10\,800^2} \approx 85\,398,17\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Uraditi isti zadatak u situaciji kada tačka A i naelektrisanje Q_1 zamene mesta.

8. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 4$ pC se nalaze u vazduhu na rastojanju $r = 30$ cm, kao na slici. **a)** Izračunati vektor električnog poljau tačkama A i B ako su rastojanja $r_1 = 20$ cm i $r_2 = 10$ cm. **b)** Izračunati potencijale tačaka A i B, kao i napon U_{AB}. Smatrati da je referentna tačka u beskonačnosti. **c)** Izračunati silu koja bi delovala na uneto naelektrisanje $Q_0 = 1$ pC u tačku A.



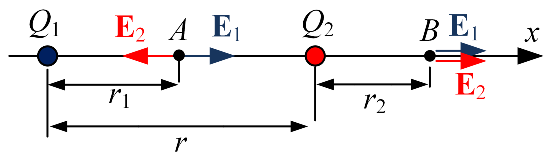
Rešenje: **a)** Vektor jačine električnog polja od tačkastih naelektrisanja u traženim tačkama ćemo dobiti primenom formule

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{i}_r$$

i uz korišćenje superpozicije.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_A &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 (r - r_1)^2}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{(r - r_1)^2}\right)\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,2^2} - \frac{1}{0,1^2}\right)\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 36 \cdot 10^{-3} \cdot (-75)\,\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= -2700 \cdot 10^{-3}\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= -2,7\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_B &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 (r + r_2)^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r + r_2)^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,4^2} + \frac{1}{0,1^2}\right)\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 36 \cdot 10^{-3} \cdot 106,25\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 3825 \cdot 10^{-3}\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 3,825\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$



b) Potencijale tačaka A i B ćemo dobiti primenom formule

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 (r - r_1)} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{(r - r_1)}\right) \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,1}\right) \\ &= 36 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 0,54 \text{ V}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 (r + r_2)} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r + r_2} + \frac{1}{r_2}\right) \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,1}\right) \\ &= 36 \cdot 10^{-3} \cdot 12,5 = 0,45 \text{ V}. \end{aligned}$$

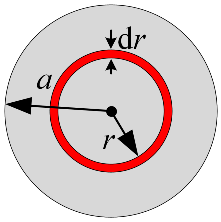
c) Sila koja bi delovala na tačkasto naelektrisanje u tački A se može dobiti iz Kulonovog zakona

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= Q_0 \cdot \mathbf{E}_A = 1 \cdot 10^{-12} \cdot (-2,7)\, \mathbf{i}_\mathrm{x} \\ &= -2,7 \mathbf{i}_\mathrm{x} \text{ pN}. \end{aligned}$$

9. Zapreminska gustina naelektrisanja lopte poluprečnika a analitički se može opisati funkcijom $\rho = \rho_0 \cdot \dfrac{r}{a}$, gde je r odstojanje posmatrane tačke od centra lopte ($0 \le r \le a$), a ρ_0 konstanta. Odrediti ukupno naelektrisanje lopte.

Rešenje: Ukupno naelektrisanje lopte možemo dobiti integracijom naelektrisanja raspodeljenom po sfernim ljuskama poluprečnika r i debljine $\mathrm{d}r$. Elementarna zapremina je $\mathrm{d}v = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$, pa je ukupno naelektrisanje lopte

$$Q = \int_0^a \rho_0 \frac{r}{a} \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\rho_0}{a} \cdot 4\pi \cdot \int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\rho_0}{a} \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{4} a^4 = \rho_0 \pi a^3.$$



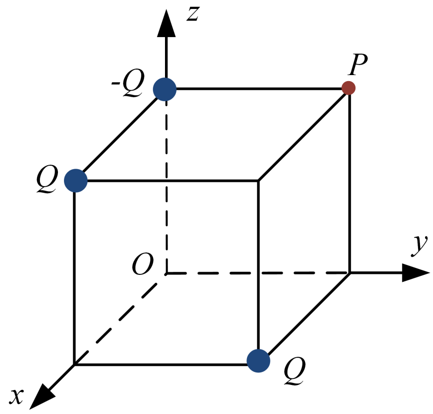
10. Za sistem naelektrisanja opisan u Zadatku 5, odrediti potencijal u tački P ukoliko je **a)** referentna tačka u beskonačnosti i **b)** ukoliko je referentna tačka u koordinatnom početku.

Rešenje: a) Električni potencijal tačke A od tačkaskog naelektrisanja je dat izrazom

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{\text{ref}}}\right), \tag{1}$$

gde su r_a i r_{ref} odstojanja naelektrisanja Q do tačke A i referentne tačke, respektivno. Kako je referentna tačka u beskonačnosti, dobijamo

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \cancelto{0}{\frac{1}{r_{\text{ref}}}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_a}.$$



Superpozicijom dobijamo

$$V_A = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-1+\sqrt{2}\right).$$

Studenti često prave greške, zbog sličnostima sa izrazom za vektor jačine električnog polja. Potencijal opada linearno sa rastojanjem između tačkastkog naelektrisanja koje stvara elektrostatičko polje i tačke u kojoj se određuje potencijal. Eektrostatičko polje opada sa kvadratom udaljenosti tačkastog naelektrisanja od tačke gde određuje vektor jačine elektrostatičkog polja. Takođe, potencijal je skalar, a električno polje je vektor.

b) Ukoliko je referentna tačka u koordinatnom početku, primenom relacije (1) dobijamo

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a\sqrt{2}}\right) + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a\sqrt{2}}\right) = 0.$$

11. (Za samostalni rad) Dva tačkasta naelektrisanja Q i $-Q$ se nalaze u tačkama sa koordinatama $(0,0,a)$ i $(0,0,-a)$, respektivno. Odrediti izraz za potencijal u tački $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

Rezultat: $V = \dfrac{Q}{3\pi\varepsilon_0 a}$.

12. Tačkasto naelektrisanje Q se nalazi u koordinatnom početku Dekartovog sistema. Odrediti rad prilikom premeštanja tačkastog naelektrisanja Q_0 iz tačke $(a,0,0)$ do tačke $(-2a,0,0)$ duž x-ose. Da li bi se rad promenio ukoliko bi se promenila putanja premeštanja naelektrisanja Q_0?

Rešenje: Na naelektrisanje Q_0 koje se kreće u elektrostatičkom polju $\mathbf{E}$ deluje električna sila $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$. Rad koji se izvrši električna sila prilikom pomeranja naelektrisanja Q_0 iz tačke A u tačku B je

$$\begin{aligned} A &= \int_A^B \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A^B Q_0\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = Q_0\int_A^B \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \\ &= Q_0 U_{AB} = Q_0\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) = \frac{Q_0 Q}{8\pi\varepsilon_0 a}. \end{aligned}$$

Prisetimo se da jedan sistem u stanju statičke ravnoteže ne može menjati svoju energiju, pa ne može izvršiti nikakav rad. Time dobijamo

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0,} \tag{1}$$

U jednačini (1) je sa kružićem na integralu označena kontura (zatvorena putanja). Kako je elektrostatičko polje konzervativno (kao i polje gravitacije) rad ne zavisi od putanje integracije, već samo od položaja početne i krajnje tačke. Integralna relacija (1) je direktna posledica zakona o održanju energije.

13. Naelektrisanja $Q_1 = 5$ nC i $Q_0 = -2$ nC se nalaze na međusobnoj udaljenosti od $r_1 = 1$ m. Koliki je izvršen rad i ko će ga izvršiti ako se naelektrisanje Q_0 približi na rastojanje $r_2 = 0,5$ m od naelektrisanja Q_1?

Rešenje: Neka je naelektrisanje Q_0 u početnom trenutku u tački A, a u krajnjem trenutku u tački B. Traženi rad je jednak

$$\begin{aligned} A &= Q_0 U_{AB} = Q_0\cdot\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ &= 9\cdot 10^9\cdot\left(-2\cdot 10^{-9}\cdot 5\cdot 10^{-9}\right)\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{0,5}\right) \\ &= 90\cdot 10^{-9} = 90 \text{ nJ}. \end{aligned}$$

Pozitivan rezultat znači da je rad izvršilo električno polje. Primetiti da su naelektrisanja suprotnih znakova pa je električna sila privlačna. Ovo implicira da je do premeštanja naelektrisanja Q_0 došlo zbog električnih sila polja.

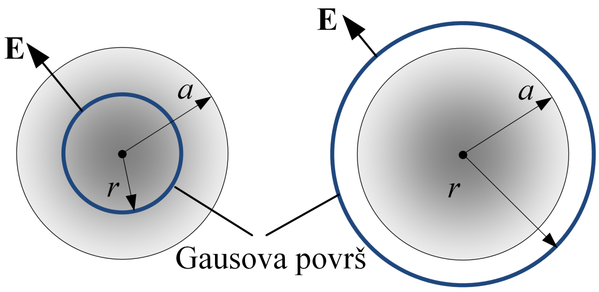
Do rešenja smo mogli doći i preko razlike početne i krajnje elektrostatičke energije.

14. Koristeći se Gausovim zakonom, odrediti vektor jačine električnog polja od naelektrisanja koje je opisano u zadatku 11. Odrediti napon između tačaka A i B koje se nalaze na udaljenostima $\frac{a}{2}$ i $\frac{3a}{2}$ od centra, respektivno.

Rešenje: Gausov zakon (teorema) kaže da je izlazni fluks vektora jačine električnog polja kroz zatvorenu površ S, koje stvara naelektrisanje Q, jednako naelektrisanju Q podeljenom dielektričnom konstantom ε_0. Matematički

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.}$$

Ovo je ujedno i jedna od osnovnih integralnih jednačina za elektrostatičko polje u vakuumu.
Zbog simetrije, linije električnog polja će biti radijalnog karaktera i intenzitet će biti isti u svim tačkama zamišljene sferne površine poluprečnika r, koja je koncentrična sa zadatom naelektrisanom loptom. Važno je dakle, koliko naelektrisanja se nalazi unutar zamišljene Gausove zatvorene površi.



Razlikujemo dva slučaja:
1. Za $r \leq a$ imamo

$$\begin{aligned} E \cdot \cancel{4\pi} r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho_0 \frac{R}{a} \cdot \cancel{4\pi} R^2 \, \mathrm{d}R \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{a} \cdot \frac{1}{4} r^4 \end{aligned}$$

pa je odavde

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 a} \mathbf{i}_r. \tag{1}$$

2. Za $r > a$ imamo

$$\begin{aligned} E \cdot \cancel{4\pi} r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^a \rho_0 \frac{R}{a} \cdot \cancel{4\pi} R^2 \, \mathrm{d}R \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{a} \cdot \frac{1}{4} a^4 \end{aligned}$$

pa je odavde

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}\mathbf{i}_r. \tag{2}$$

Primetimo da kada u izrazima (1) i (2) zamenimo $r = a$ dobijamo isti rezultat. Ovo znači da je jačina električnog polja neprekidna funkcija rastojanja r, merenog od centra lopte. Strogo matematički gledano imamo $\lim\limits_{r\to a^-} E(r) = \lim\limits_{r\to a^+} E(r)$.

Da li je vektor jačine električnog polja ma koje raspodele naelektrisanja u vakuumu uvek neprekidna funkcija rastojanja? Ako nije, možete li dati primer?

Napon je

$$\begin{aligned}
U_{AB} &= \int_{a/2}^{3a/2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{a/2}^{a} \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 a}\,\mathrm{d}r + \int_{a}^{3a/2} \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 a}\cdot\frac{1}{3}r^3\bigg|_{a/2}^{a} + \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\bigg|_{a}^{3a/2} \\
&= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 a}\cdot\frac{1}{3}\left(a^3 - \frac{a^3}{8}\right) + \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\frac{3a}{2}} + \frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0 a}\cdot\frac{7a^3}{8} + \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\frac{1}{3a} \\
&= \frac{15\rho_0 a^2}{96\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$