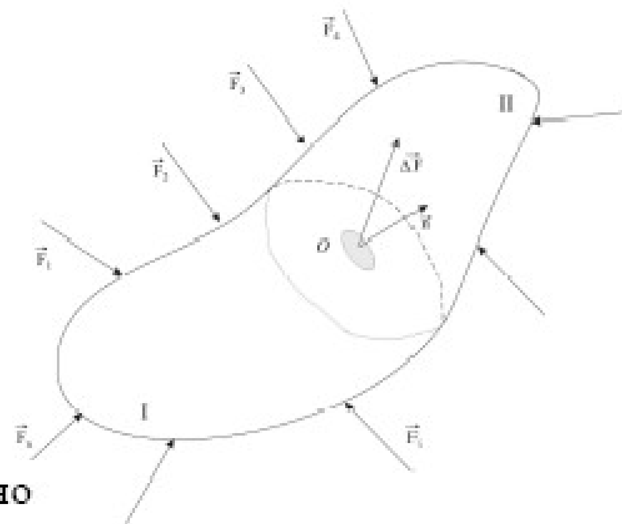
Основни појмови теорије еластичности

- тело је изотропно има иста еластична својств у свим правцима
- тело је хомогено, тј има исте особине у свим тачкама тела
- деформације су мале
- подела спољашњих сила:површинске и запреминске



Слика 1.1

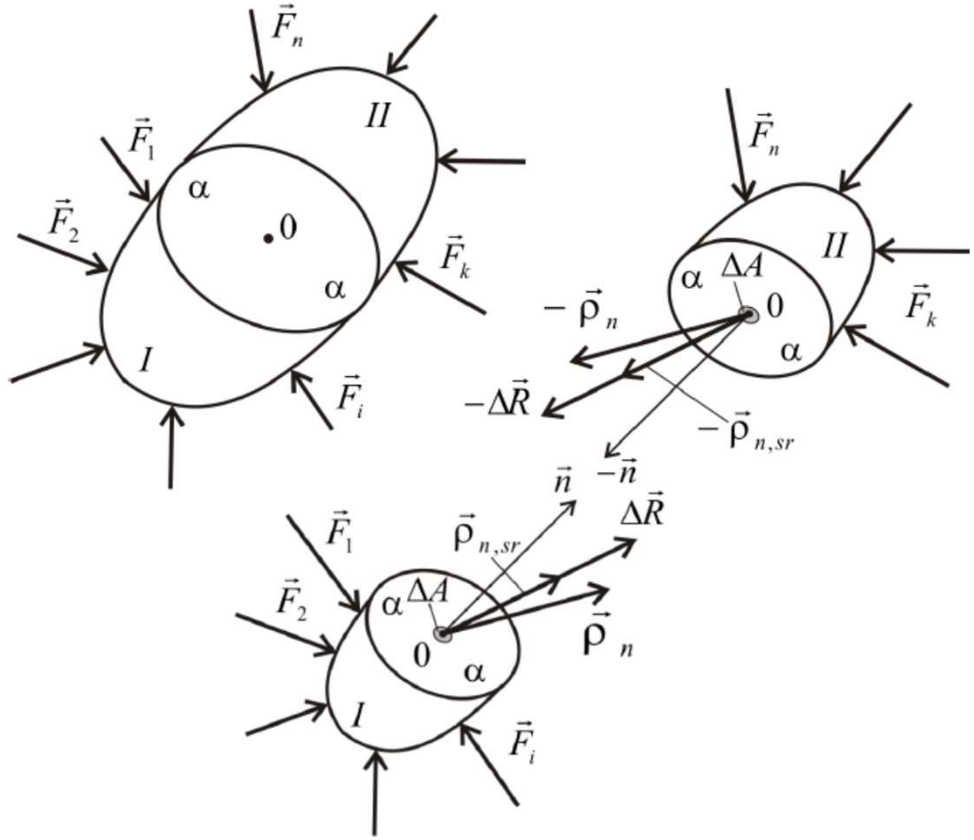
$$\phi_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A} = \lim_{\Delta A \to 0} \vec{p}_s = \frac{d\vec{F}_n}{dA} \qquad \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathfrak{M}}_o^n}{\Delta S} = 0 \qquad \vec{F}_v' = \frac{d\vec{F}_v}{dm}$$

Напонско стање је описано тзв. тензорима другог реда (скраћено тензорима) пошто поред величине, правца и смера који одређују векторску величину, напонско стање зависи и од орта нормале површине на коју се напон односи, $\phi_n = \phi_n\left(\vec{r}_O, \vec{n}\right)$. То значи да напон у једној тачки мође имати различите вредности за различите пресечне равни које пролазе кроз ту тачку. Према пројекција укупног напона ϕ_n на нормалу $\vec{n}$ се назива нормалним напоном у тачки O за раван са нормалом $\vec{n}$, док се пројекција напона ϕ_n на саму раван назива напоном смицања (тангенцијалним напоном) у тачки O за посматрану раван.

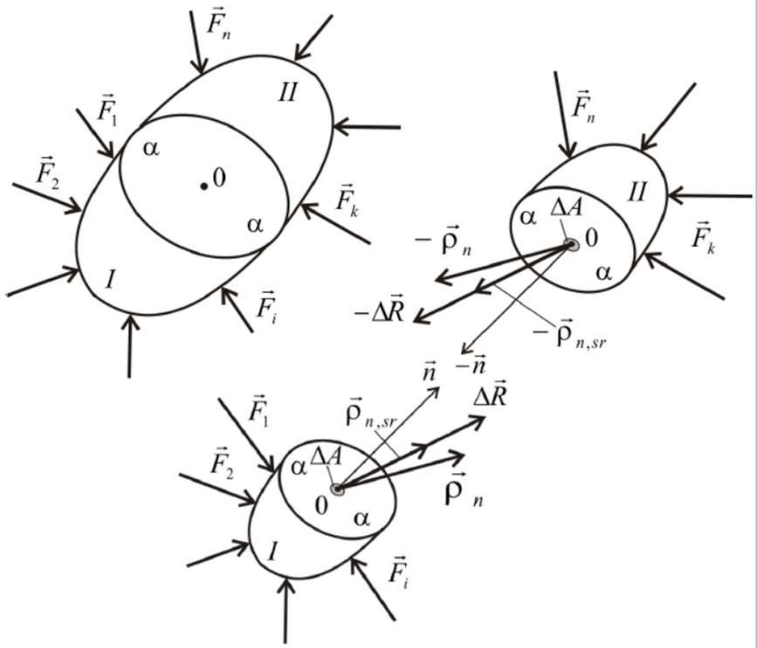
Naponi u poprečnom preseku

U preseku α - α , u okolini tačke 0, uoči se elementarna površina ΔA. Unutrašnje sile, koje dejstvuju na elementarnu površinu ΔA, redukuju se na tačku 0 tako da je redukciona rezultanta jednaka rezultanti unutrašnjih sila $\Delta\vec{R}$, jer je vrednost momenta redukcionog sprega unutrašnjih sila jednaka nuli zbog beskonačno male elementarne površine ΔA: $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta\vec{M}}{\Delta A} = 0$



Srednji ukupan napon i ukupan napon

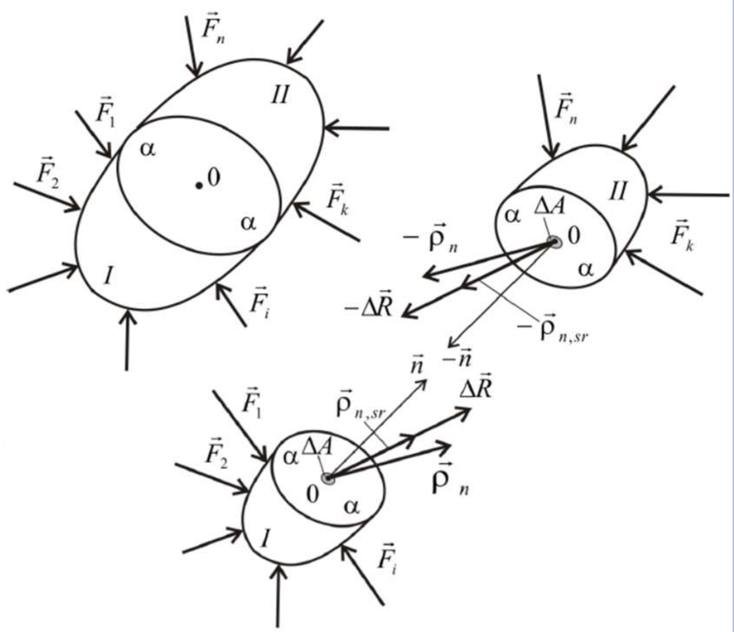
Količnik rezultante unutrašnjih sila koje dejstvuju na elementarnu površinu i elementarne površine predstavlja srednji (prosečni) ukupan napon $\vec{\rho}_{n,sr}$ u tački 0 za ravan sa normalom $\vec{n}$. Pravac i smer srednjeg ukupnog napona se poklapa sa smerom i pravcem rezultante unutrašnjih sila.



Srednji ukupan napon i ukupan napon

Granična vrednost srednjeg ukupnog napona $\vec{\rho}_{n,sr}$ kada elementarna površina ΔA teži nuli zove se totalan (ukupan) napon $\vec{\rho}_n$ u tački 0 za ravan sa normalom $\vec{n}$.

Ukupan napon je vektor čiji se pravac ne poklapa ni sa pravcem rezultante unutrašnjih sila, ni sa pravcem normale $\vec{n}$ na ravan preseka α - α.

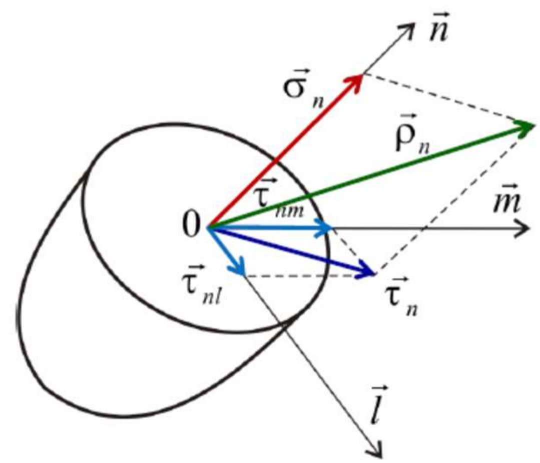


Srednji ukupan napon i ukupan napon

Naponi u poprečnom preseku

Ukupan napon $\vec{\rho}_n$ u tački 0 preseka α - α sa normalom $\vec{n}$ se može razložiti na komponentne napone - jedan u pravcu normale na presek, koji se zove normalni napon $\vec{\sigma}_n$, i jedan tangencijalni (smičući) napon $\vec{\tau}_n$ u ravni preseka α - α :

$$\vec{\rho}_n = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_n$$



Razlaganje ukupnog napona na komponentne napone

Tangencijalni (smičući) napon $\vec{\tau}_n$ može da se razloži na dva tangencijalna (smičuća) napona $\vec{\tau}_{nm}$ i $\vec{\tau}_{nl}$ u istoj ravni preseka :

$$\vec{\rho}_n = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_{nm} + \vec{\tau}_{nl}$$

pravac normale na ravan preseka

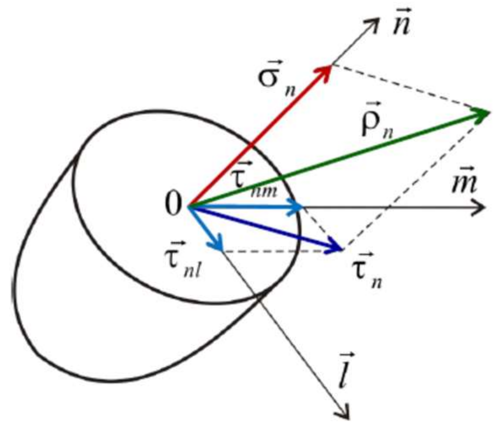
pravac napona u ravni preseka

Za uvedene jedinične vektore $\vec{n}, \vec{m}, \vec{l}$, pri čemu je $|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1$, izraz za ukupan napon se može napisati u obliku:

$$\vec{\rho}_n = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_{nm} \cdot \vec{m} + \tau_{nl} \cdot \vec{l}$$

ili

$$\vec{\rho}_n = \left(\sigma_n, \tau_{nm}, \tau_{nl}\right)$$



Razlaganje ukupnog napona na komponentne napone

Dakle, napon je vezan za određenu tačku i ravan kojoj pripada ta tačka.

Broj ravni preseka koje sadrže tu tačku (0) je **neograničen**, pa će prema tome za tu tačku postojati **beskonačan broj ukupnih napona**.

Skup svih ukupnih napona u toj tački (0) se naziva **stanje napona**.

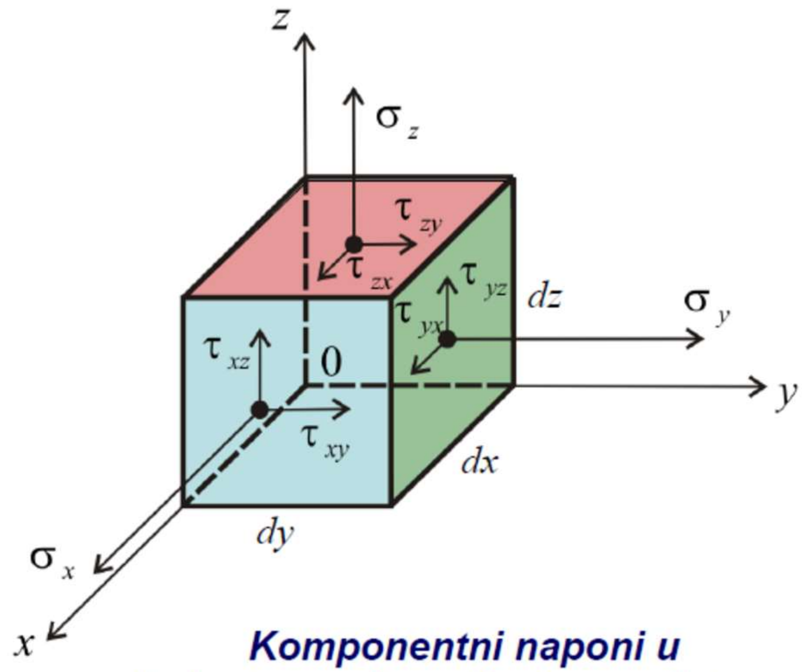
Međutim, ovaj problem može da se uprosti, jer te vrednosti podležu vezama, tj. nisu potpuno nezavisne, tako da je dovoljno da se za usvojeni Dekartov koordinatni sistem u prostoru, u okolini tačke 0 u odnosu na elementarnu zapreminu *dV*, posmatraju ukupni naponi čije su normale zapravo ose koordinatnog sistema.

To su tri vektora napona: $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$ i $\vec{\rho}_z$, sa po tri komponentna napona, koji se mogu napisati u obliku matrice tenzora napona, i oni u potpunosti određuju naponsko stanje u tački 0:

$$\vec{\rho}_x = \vec{\sigma}_x + \vec{\tau}_{xy} + \vec{\tau}_{xz} = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k};$$

$$\vec{\rho}_y = \vec{\sigma}_y + \vec{\tau}_{yx} + \vec{\tau}_{yz} = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k};$$

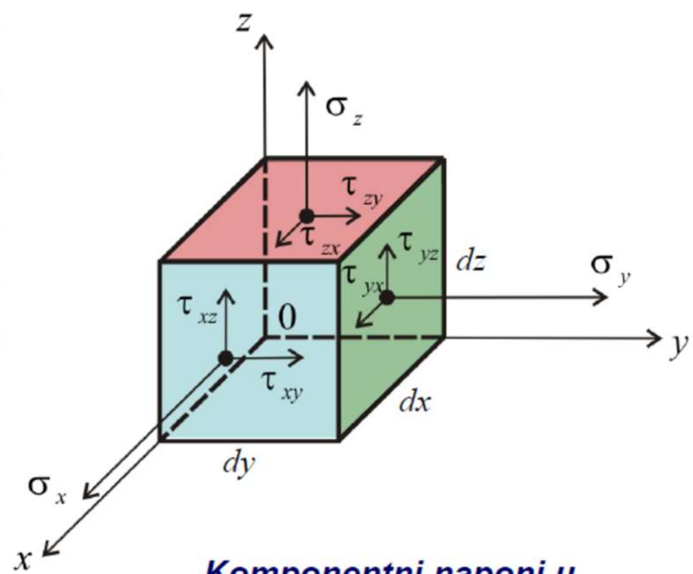
$$\vec{\rho}_z = \vec{\sigma}_z + \vec{\tau}_{zx} + \vec{\tau}_{zy} = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k};$$



Komponentni naponi u Dekartovom koordinatnom sistemu

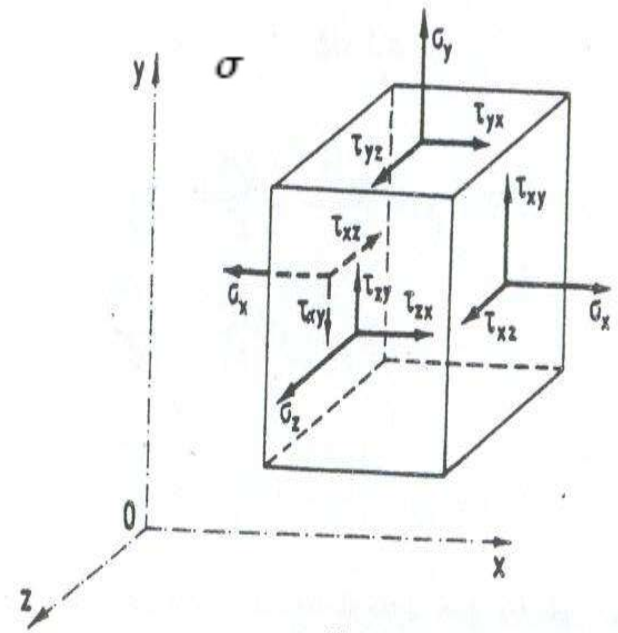
Dakle, stanje napona u tački 0 je određeno sa devet komponentnih napona, tri normalna i šest tangencijalnih, koji se predstavljaju u obliku kvadratne šeme koja se zove **matrica tenzora napona** ili **tenzor napona**:

$$\mathbb{S} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

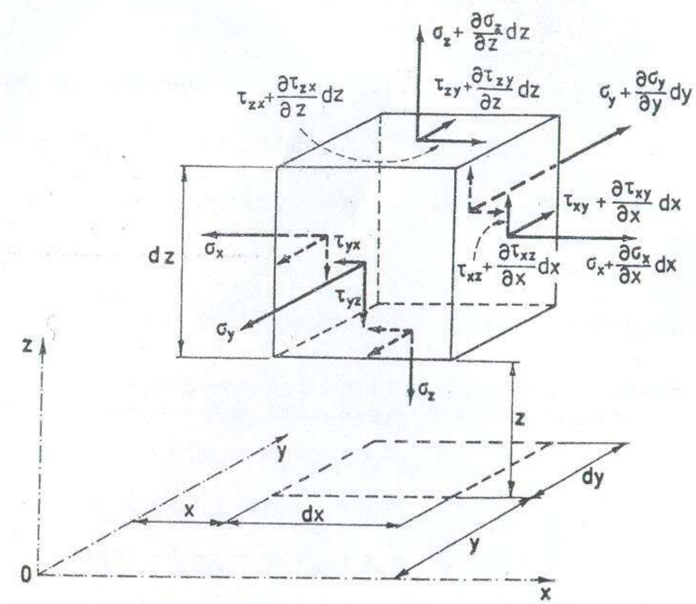


Komponentni naponi u Dekartovom koordinatnom sistemu

Основни појмови теорије еластичности



Sl. I.2



- ***тензор напона*** σ показује се да у потпуности одређује напонско стање у датој тачки, и она има двоиндексно означавање, где први индекс се односи на површину где напон делује а други на правац његовог деловања. При томе, ако знамо тензор напона, можемо одредити вектор напона за било коју пресечну раван у тој тачки и обрнуто ако знамо векторе напона за било које три некомпланарне пресечне равни у тој тачки можемо одредити тензор напона у тој тачки.

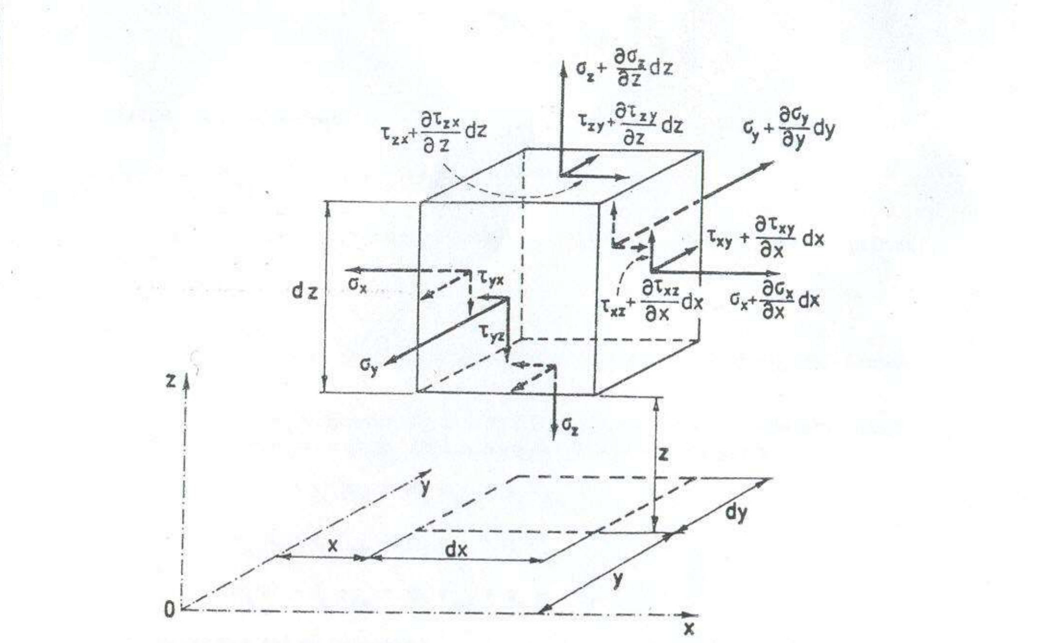
Услови равнотеже dV издвојеног из тела- Навијеове једначине

$$dV = dxdydz$$

$(\sigma_{xx} \rightarrow \sigma_x), \tau_{xy}, \tau_{xz},$

$(\sigma_{yy} \rightarrow \sigma_y), \tau_{yx}, \tau_{yz},$

$(\sigma_{zz} \rightarrow \sigma_z), \tau_{zx}, \tau_{zy},$



координатној равни xz, а померена је од ове за dy

$\sigma_y + (\partial\sigma_y / \partial y)dy, \quad \tau_{yx} + (\partial\tau_{yx} / \partial y)dy, \quad \tau_{yz} + (\partial\tau_{yz} / \partial y)dy,$

Услови равнотеже су (главни вектор датог система сила једнак је нули):

1) $\sum F_x = 0$, 2) $\sum F_y = 0$, 3) $\sum F_z = 0$,

$\sum F_x = 0$

Навијеове једначине

- Статички услов равнотеже

$$\sum F_x = 0$$

$$(\sigma_x + (\partial\sigma_x / \partial x)dx - \sigma_x)dydz + (\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx} / \partial y)dy - \tau_{yx})dzdx$$
$$+(\tau_{zx} + \partial\tau_{zx} / \partial z)dz - \tau_{zx})dxdy + \omega_x dxdydz = 0$$

$$(\partial\sigma_x / \partial x + \partial\tau_{yx} / \partial y + \partial\tau_{zx} / \partial z + \omega_x)dxdydz = 0$$

Како је $dV \neq 0$ следи да је:

$$\textbf{p1)}\quad \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \omega_x = 0$$

На сличан из услова 2) $\sum F_y = 0$, 3) $\sum F_z = 0$, добијају се следеће једначине:

$$\textbf{p2)}\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \omega_y = 0\ ,'$$

a

$$\textbf{p3)}\quad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \omega_z = 0$$

- веза између напона и спољашњих запреминских сила

Такође и други сет једначина сума момената (главни момент датог система је такође једнак нули),

$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$.

Тако је за осу која пролази кроз тежиште dV и која је паралелна са z осом:

$$\sum M_z = \tau_{xy} dydzdx / 2 + (\tau_{xy} + (\partial \tau_{xy} / \partial x)dx)dydzdx / 2$$
$$-\tau_{yx} dxdzdy / 2 - (\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y)dy)dydzdy / 2 = 0$$

Занемаривањем чланова вишег реда уз чињеницу да је $dV \neq 0$ добија се да је

р4) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

На сличан начин применом преостала два услова равнотеже закључује се да важи:

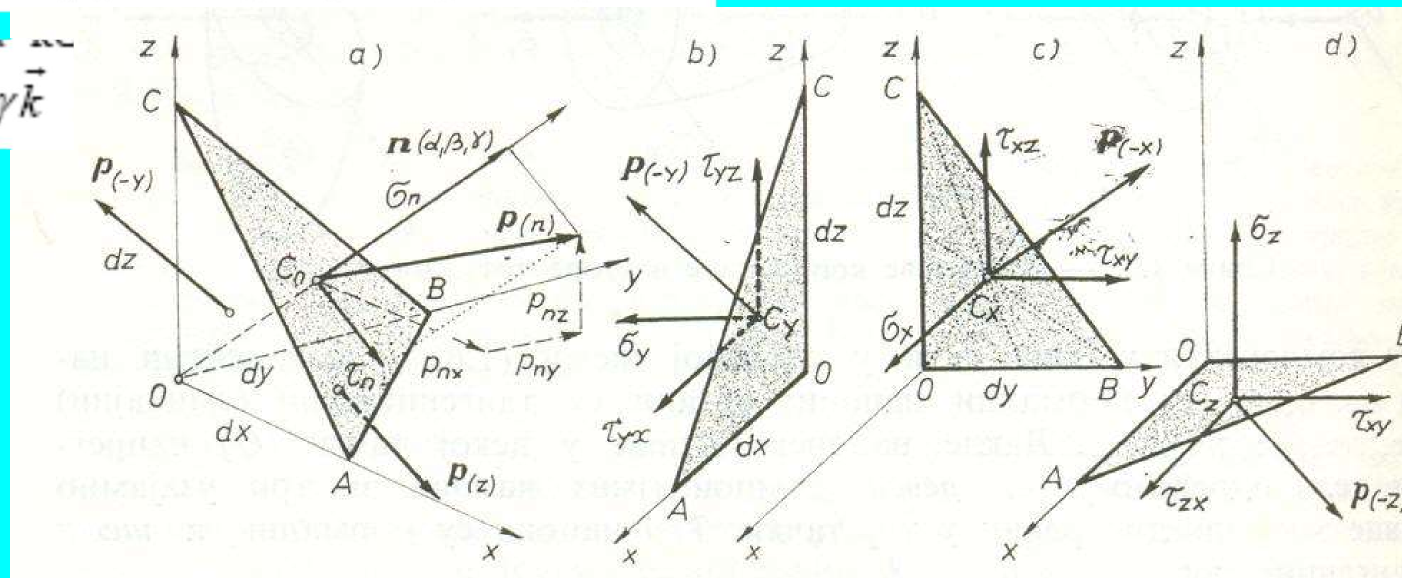
р5) $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

р6) $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Кошијеве једначине напонско стање за дату раван

Напон за произвољну раван кроз уочену тачку О

$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$



$\phi_{nx} + d\phi_{nx}, \phi_{ny} + d\phi_{ny}, \phi_{nz} + d\phi_{nz}$.

$dh \to 0$

1) $\sum F_x = 0$, 2) $\sum F_y = 0$, 3) $\sum F_z = 0$,

$$(\phi_{nx} + d\phi_{nx})dA - (\sigma_x + d\sigma_x)\cos\alpha dA - (\tau_{yx} + d\tau'_{yx})\cos\beta dA -$$

$$(\tau_{zx} + d\tau'_{zx})\cos\gamma dA + \omega_x\left(\frac{1}{3}dAdh\right) = 0$$

$$\phi_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma$$

$$\phi_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma$$

$$\phi_{nz} = \tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{nx} \\ \phi_{ny} \\ \phi_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\phi_n\} = [\sigma]\{\vec{n}\}$$

Главни напони

За произвољну раван са нормалом $\vec{n}$, нормални напон према претходним изразима биће:

$$\sigma_n = \vec{n}\cdot\phi_n = \left(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}\right)\cdot\left(\phi_{nx}\vec{i} + \phi_{ny}\vec{j} + \phi_{nz}\vec{k}\right) =$$

$$= \cos\alpha\phi_{nx} + \cos\beta\phi_{ny} + \cos\gamma\phi_{nz} =$$

$$= \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta +$$

$$+ 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

Вектори који су повучени из посматрне тачке у правцу одговарајућих нормала n за разне произвољне равни и чије су пројекције:

$$\xi = \cos\alpha / \sqrt{|\sigma_n|},\ \eta = \cos\beta / \sqrt{|\sigma_n|},\ \zeta = \cos\gamma / \sqrt{|\sigma_n|},$$

образоваће централну површину другог реда јер после замене $[\xi, \eta, \zeta]$ у претходни израз добија се:

$$\pm 1 = \sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 \gamma + 2\tau_{xy}\xi\eta + 2\tau_{yz}\eta\zeta + 2\tau_{zx}\zeta\xi$$

Произилази , да постоји одговарајући правоугли систем тзв. *главних оса* и ако се ове усвоје за координатне, добија се да су тада одговарајући напони $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Према томе, у одговарају овим равнима називају се *главни напони у посматраној тачки тела и означени су са* $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

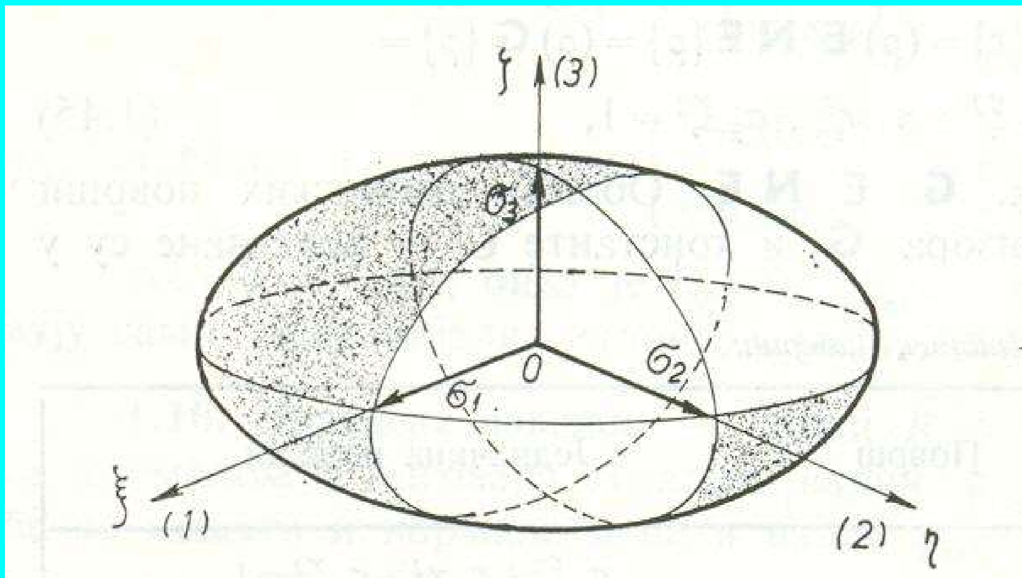
$$\{p_n\} = \begin{Bmatrix} p_{n\xi} \\ p_{n\eta} \\ p_{n\zeta} \end{Bmatrix} = \mathbb{G}\{n\} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1\alpha \\ \sigma_2\beta \\ \sigma_3\gamma \end{Bmatrix},$$

Наиме, имајући у виду дефиницију главних оса из Кошијевих једначина следи:

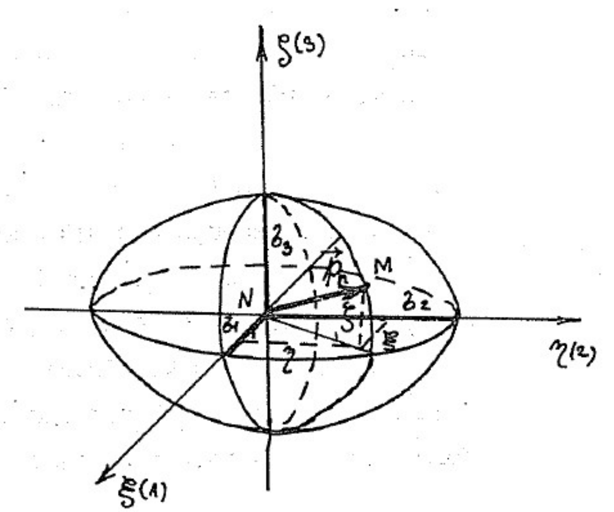
$$\phi_{n1} = \cos\alpha\sigma_1,\ \phi_{n2} = \cos\beta\sigma_2,\ \phi_{n3} = \cos\gamma\sigma_3,$$

векторе положаја, уочава се да ти вектори дефинишу тзв. *Ламеов* (Lame-ov) *елипсоид напона* .

$$\left(\frac{\phi_{n1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{n2}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{n3}}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$



a)



$$\left(\frac{p_{n\xi}}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{p_{n\eta}}{\sigma_2}\right)^2+\left(\frac{p_{n\zeta}}{\sigma_3}\right)^2=1 \quad ,$$

$$\{p_n\}=\begin{Bmatrix}p_{n\xi}\\ p_{n\eta}\\ p_{n\zeta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\alpha\\ \sigma_2\beta\\ \sigma_3\gamma\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix},$$

$$\alpha\ (=)\ \cos\alpha=\frac{p_{n\xi}}{\sigma_1}\ ;\ \beta(=)\cos\beta=\frac{p_{n\eta}}{\sigma_2},$$

$$\gamma(=)\ \cos\gamma=\frac{p_{n\eta}}{\sigma_3}.$$

$$\sigma_i\cos\alpha_i=\sigma_x\cos\alpha_i+\tau_{yx}\cos\beta_i+\tau_{zx}\cos\gamma_i$$

$$\sigma_i\cos\beta_i=\tau_{xy}\cos\alpha_i+\sigma_y\cos\beta_i+\tau_{zy}\cos\gamma_i$$

$$\sigma_i\cos\gamma_i=\tau_{zx}\cos\alpha_i+\tau_{yz}\cos\beta_i+\sigma_z\cos\gamma_i$$

мора бити испуњено да је детерминанта система једнака нули, а она представља тзв. карактеристичну или секуларну једначину трећег реда:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0$$

чијим решавањем одређујемо $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ који су познати под називом *главне вредности тензора напона* $\boldsymbol{\sigma}$

$$f(\sigma_s) = \det\left|\phi_n - \sigma_s I\right| = \sigma_s^3 - I_1(\phi_n)\sigma_s^2 + I_2(\phi_n)\sigma_s - I_3(\phi_n) = 0$$

Овде су са I_1, I_2, I_3 означена прва,друга и трећа инваријанта

$$I_1(\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,\ I_2(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

$$I_1(\sigma) = \det\left|\sigma\right| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{T} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{T})^2 - \operatorname{tr}\left(\mathbf{T}^2\right)\right]$$

Пошто су вектори главних праваца $\vec{n}_s$ јединични и показује се да испуњавају услов ортогоналности $(\vec{n}_r)\{\vec{n}_s\}=0,\ r,s=1,2,3\quad r\neq s$ односно они представљају један ортонормирани базис тако да се у тачки О може он узети уместо постојећег правоуглог триедра $Oxyz$, добија се да је тензор напона сада дијагоналан:

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}$$

$$I_{1\Gamma}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3,\ I_{2\Gamma}=\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3$$

$$I_{3\Gamma}=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

На основу Виетових правила показује се да су

$$I_1(\sigma)=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=I_{1\Gamma}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$$

$$I_2(\sigma)=I_{2\Gamma},\ I_3(\sigma)=I_{3\Gamma},\quad |\sigma|=|\Gamma|$$

чиме је доказано да су I_1, I_2, I_3 заиста напонске инваријанте.

Основни појмови теорије еластичности

- Мала деформација чврстог тела

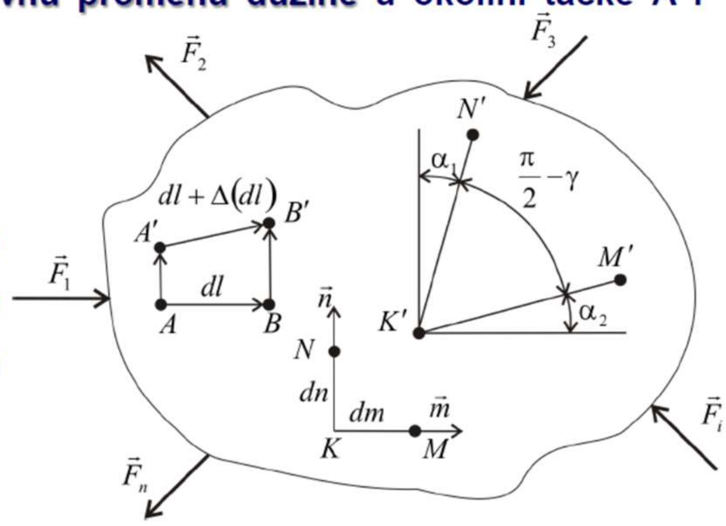
Apsolutna (ukupna) promena dužine nastaje kao posledica pojave normalnog napona u čvrstom telu.

Odnos apsolutne (ukupne) promene dužine i prethodne dužine predstavlja srednju dilataciju (srednju relativnu promenu dužine u okolini tačke A i pravcu AB):

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta(dl)}{dl}$$

Granična vrednost ove srednje vrednosti kada dl teži nuli zove se dilatacija (specifična promena dužine u tački A za pravac AB):

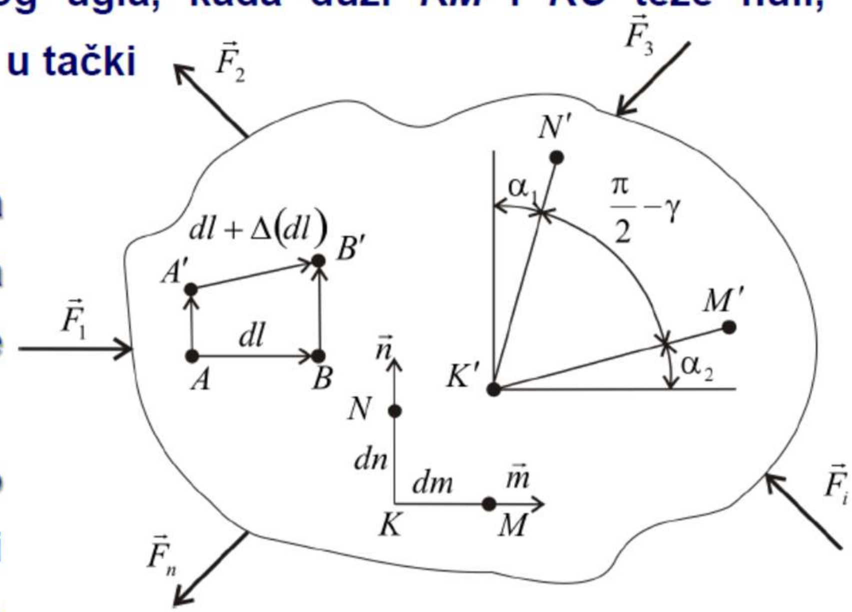
$$\varepsilon = \lim_{dl \to 0} \frac{\Delta(dl)}{dl}$$



Deformacije: dilatacija i klizanje

Ako se posmatra prav ugao sa temenom u tački *K* čvrstog tela pre deformacije, čiji kraci prolaze kroz tačke *M* i *N*, taj ugao se posle deformacije promenio za ugao γ koji se zove ugao klizanja.

Granična vrednost promene pravog ugla, kada duži *KM* i *KC* teže nuli, predstavlja klizanje $\gamma_{MKN} = \alpha_1 + \alpha_2$ u tački *K* za ravan *MKN*.



Deformacije: dilatacija i klizanje

Klizanje je mera promene oblika tela kao posledica dejstva tangencijalnog napona i zove se deformacija smicanja.

Klizanje može da bude pozitivno ako prav ugao postaje oštar i obrnuto, negativno ako prav ugao postaje tup.

Основни појмови теорије еластичности

- Дилатација

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta L}$$

При томе је дилатација ε_x

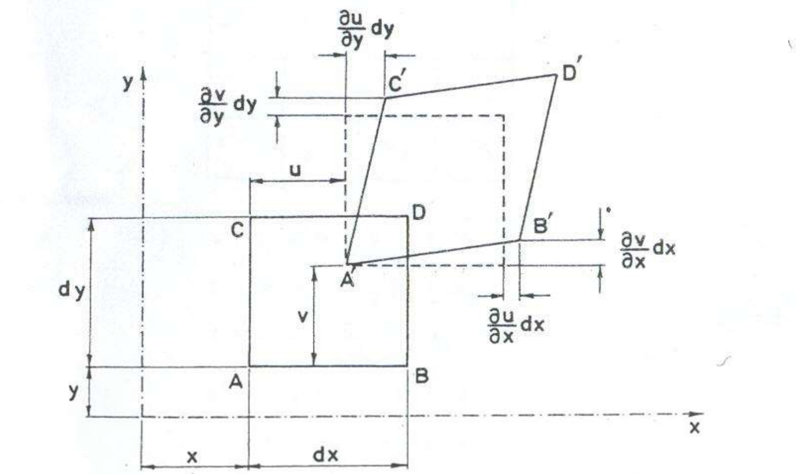
$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \Rightarrow A'B' = (1+\varepsilon_x)AB = (1+\varepsilon_x)dx$$

С друге стране,

$$(A'B')^2 = \left(\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2$$

На основу претходна два израза добијамо:

$$2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 = 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$



Sl. I. 5

Пошто су деформације врло мале, то су и дилатације и изводи померања такође мале величине, па занемаривањем величина вишег реда произилази:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

односно на сличан начин добија се и за y правац:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

односно у случају тродимензионалних деформација имамо и компоненту и у z правцу

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Основни појмови теорије еластичности

Такође , на сличан начин може се констатовати да се права AB по деформацији обрнула ка y оси за угао $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, а права AC (после деформације $A'C'$) ка x оси за угао $\partial u / \partial y$. Према томе, клизање γ_{xy} биће једнако:

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$$

У случају тродимензионалних деформација имаћемо и :

$$\gamma_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \,,\ \gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y$$

где се на основу увида у претходне изразе може закључити да су клизања симетрична, тј.:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx},\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx},\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy},$$

Шест компонената деформације

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx},\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx},\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy},$$

правца за која су клизања једнака нули $\gamma_{12}=0$, $\gamma_{13}=0$, $\gamma_{23}=0$, тако да се ти правци називају *правци главних дилатација*.При томе је

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

деформација не могу бити произвољне. Ти допунски услови су познати као *Сен Венанови услови тј. једначине компатибилности деформација (шест парцијалних диференцијалних једначина).* Тензор деформације $\boldsymbol{\varepsilon}$ је

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

где су сада:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\varepsilon_x,\varepsilon_{yy}=\varepsilon_y,\varepsilon_{zz}=\varepsilon_z,\\ &2\varepsilon_{xy}=2\varepsilon_{yx}=\gamma_{xy},\\ &2\varepsilon_{xz}=2\varepsilon_{zx}=\gamma_{xz},\\ &2\varepsilon_{yz}=2\varepsilon_{zy}=\gamma_{yz.}\end{aligned}$$

односно тензор деформације је

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{zx}/2\\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2\\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z\end{bmatrix}$$

Стање напона у датој тачки – Тензор напона:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

Стање деформација у датој тачки: – Тензор деформација

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix}$$

Robert Hooke
1635-1703

Thomas Young
1773-1829

Moguća stanja naprezanja u opterećenom telu

Pri promjeni orijentacije presjeka u točki tela, mijenja se vektor naprezanja $\vec{p}$ po smjeru i iznosu, te se razlikuju sljedeća moguća stanja naprezanja tijela:

• **linearno** (ili **jednoosno**) stanje naprezanja: $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, slika.

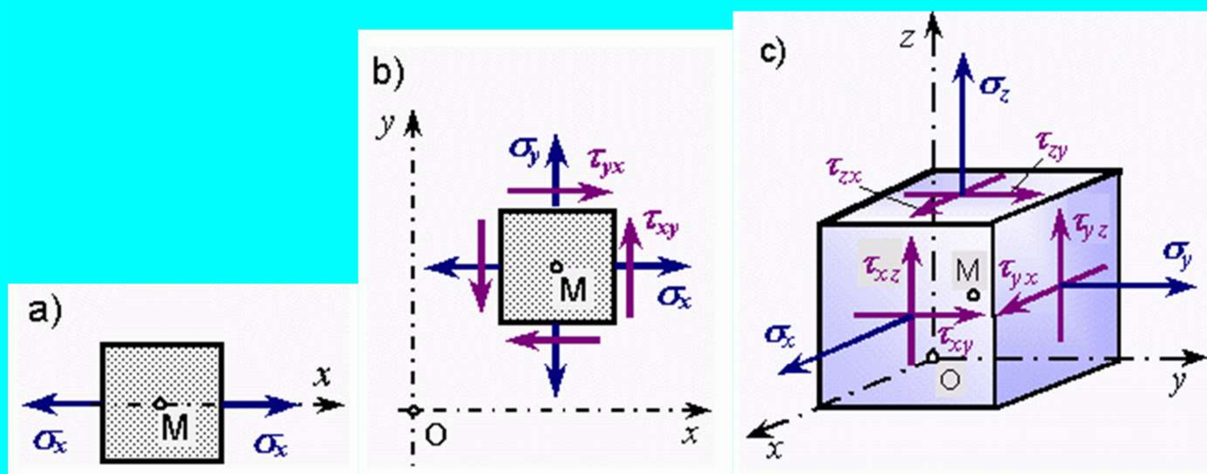
Vektor naprezanja $\vec{p}$ uvijek leži na jednom pravcu, bez obzira na orijentaciju preseka.

• **ravannsko** (ili **dvoosno**) stanje naprezanja: $\sigma_1 > \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$, slika.

Pri proizvoljnoj promjeni preseka, vektor naprezanja $\vec{p}$ uvek leži u istoj ravni,

• **prostorno** (ili **troosno**) stanje naprezanja: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$, slika.

Pri proizvoljnoj promeni preseka tela, vektor naprezanja $\vec{p}$ menja orijentaciju u prostoru.



Matrica tenzora naprezanja kod prostornog stanja naprezanja tela

U pravouglom $(0xyz)$-koordinatnom ssistemu, slika, komponente naprezanja prostornog (troosnog) stanja naprezanja u tački tela su: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{xz}, τ_{zx}. naprezanjana smicanje koja djeluju na međusobno okomitim presecima su jednaka, tj.: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

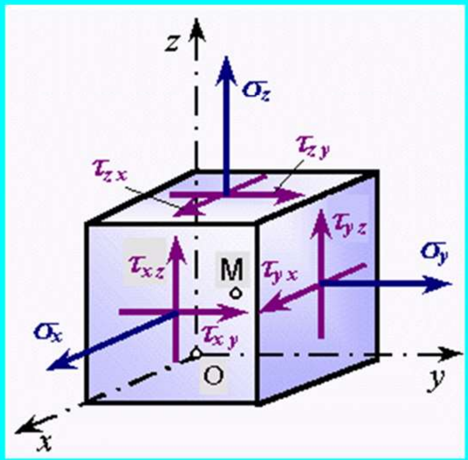
Tenzor naprezanja σ_{ij} u nekoj tački tijela definisan je sa **9** komponenti, ali od njih su samo **6 međusobno različite**. Prema tome matrica tenzora naprezanja $[\sigma_{ij}]$ je **simetrična** s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. ima u tehničkom označavanju oblik:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Postoji orijentacija koordinatnih osi u prostoru za koju su posmične komponente naprezanja u točki tijela jednake nuli, a normalna naprezanja imaju ekstremne vrednosti, slika. To su osi **1**, **2** i **3** u tački tijela i zovu se **glavni pravci naprezanja**, a naprezanja u njima su **glavna naprezanja** σ_1, σ_2 i σ_3, a za koje vrijedi: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Za takvu orijentaciju koordinatnih osi matrica tenzora naprezanja $[\sigma_{ij}]$ u točki tijela ima članove samo na glavnoj dijagonali, tj. ima oblik:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$



Definicija **glavnih pravaca naprezanja i glavnih naprezanja u tački tela**

Invarijante tenzora naprezanja kod prostornog stanja naprezanja tela

Među komponentama tenzora naprezanja kod zakreta koordinatnog sistema u tački tela važe ovi odnosi, slika:

$$\boxed{I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{konst.}},$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{2\sigma} &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = \text{konst.} \end{aligned}},$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{3\sigma} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \text{konst.} \end{aligned}}.$$

Veličine $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$ i $I_{3\sigma}$ nazivaju se **prva**, **druga** i **treća invarijanta** tenzora naprezanja σ_{ij}, jer se **ne menjaju** pri rotaciji koordinatnog sistema u tački tela.

Određivanje glavnih naprezanja i glavnih pravaca kod prostornog stanja naprezanja tela

Komponente tenzora naprezanja u tački tela kod prostornog stanja naprezanja transformiraju se kao komponente tenzora 2. reda, slika.

Glavna naprezanja $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ su rješenja za nepoznatu σ, tj. koreni su jednačine 3. reda:

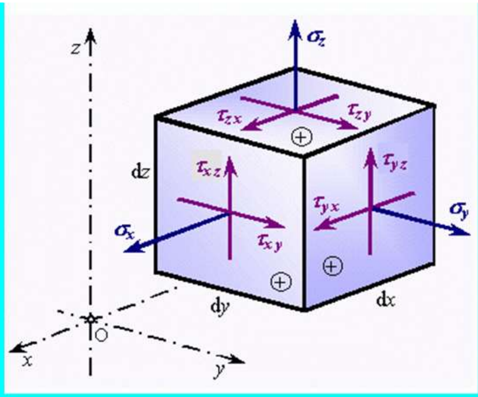
$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0,$$

gdje su $I_{1\sigma}$ - prva, $I_{2\sigma}$ - druga i $I_{3\sigma}$ - treća invarijanta tenzora naprezanja, tj. vrede izrazi:

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{konst.}$$

$$\begin{aligned} I_{2\sigma} &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = \text{konst.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{3\sigma} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \text{konst.} \end{aligned}$$



Definicija prostornog (zapreminskog) modula elastičnosti materijala tela

Ako se uzorak materijala optereti jednolikim pritiskom p u svim smerovima, tzv. ogled "**hidrostatičkog pritiska**", slika, smanjiće se njegova zapremina Eksperimenti pokazuju da je relativna (zapreminska) deformacija tijela proporcionalna pritisku p, tj.:

$$\Theta = -\frac{p}{K},$$

gdje se konstanta K naziva zapreminski **modul elastičnosti** ili **modul stišljivosti** (**kompresibilnosti**).

Za element tela vredi: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$,
što uvršteno u Hookeov zakon:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

daje: $\varepsilon_x = -\frac{p}{E}(1-2\nu) = \varepsilon_y = \varepsilon_z$.
Zapreminska se deformacija može izraziti kao:

$$\Theta = -p\,\frac{3(1-2\nu)}{E},$$

a to u usporedjenju s ranijim izrazom daje:

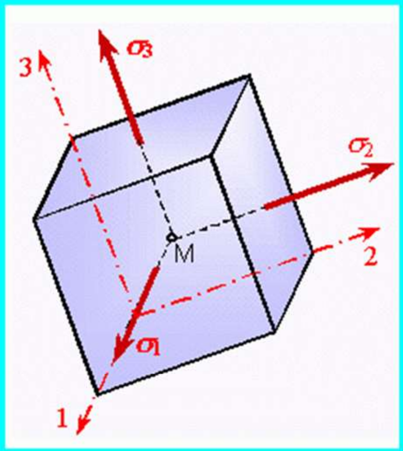
$$\Theta = -p\,\frac{3(1-2\nu)}{E} = -p\,\frac{1}{K}.$$

Definicija glavnih pravaca naprezanja i glavnih naprezanja u tački tela

Postoji orijentacija koordinatnih osi u prostoru za koju su posmične komponente naprezanja u tački tela jednake nuli, a normalna naprezanja imaju ekstremne vrijednosti, slika. To su osi **1**, **2** i **3** u točki tela, koja se zovu **glavni pravci naprezanja**, a naprezanja u njima su **glavna naprezanja** σ_1, σ_2 i σ_3, a za koje vredi: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Za takvu orijentaciju koordinatnih osi matrica tenzora naprezanja $[\sigma_{ij}]$ u točki tela ima članove samo na glavnoj dijagonali, tj. ima oblik:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$



Уопштени Хуков закон

- Уопштени Хуков закон-

$$\sigma_x = (\lambda + 2\nu)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z) = \lambda\varepsilon_v + 2\nu\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\nu)\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_z + \varepsilon_x) = \lambda\varepsilon_v + 2\nu\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\nu)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \lambda\varepsilon_v + 2\nu\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = \nu\gamma_{xy},$$

$$\tau_{xz} = \nu\gamma_{xz}, \qquad \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\tau_{yz} = \nu\gamma_{yz}$$

за просторно стање напрезања.С обзиром на тензоре напона и деформације Хуков закон се може написати и у тензорском облику

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\varepsilon_v \boldsymbol{I} + 2\nu\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \lambda\varepsilon_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\nu \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

где су сада ***I*** јединична матрица, а
$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = div\vec{s} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$,

$\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

Да би се изразиле деформације помоћу напона детерминанта прве три једначине је једнака $\Delta = 4\nu^2(3\lambda + 2\nu) \neq 0$ тако да решавањем претходног система једначина по компонентним деформацијама уопштени Хуков закон може се изразити помоћу једначина:

$$\varepsilon_x = (2\nu/\Delta)\left[2(\lambda+\nu)\sigma_x - \lambda\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = (2\nu/\Delta)\left[2(\lambda+\nu)\sigma_y - \lambda\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = (2\nu/\Delta)\left[2(\lambda+\nu)\sigma_z - \lambda\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/\nu$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz}/\nu$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/\nu$$

Ако се уведу две материјалне константе E Јунгов модул еластичности материјал и Пуасонов коефицијент μ^* које су одређене следећим релацијама:

$$E=\frac{(3\lambda+2\nu)\nu}{(\nu+\lambda)},\ \ \mu=\frac{|\varepsilon_x|}{|\varepsilon_z|}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)}$$

и представљају увек позитивне константе за све материјале. Такође, Ламеов коефицијент ν је познат и под називом као модул смицања односно *модул клизања, тј.* $\nu=G\left[N/m^2\right]$. Ако се претходно уведене константе замене у једначине коначно се добија:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right]$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy}=\tau_{xy}/G, \qquad G=E/2(1+\mu)$$

$$\gamma_{xz}=\tau_{xz}/G$$

$$\gamma_{zy}=\tau_{zy}/G$$

Формулисање проблема теорије еластичности

У општем случају тродимензионалног напонског стања имао, према томе, 15 непознатих величина од тога 6 напона $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx},$, 6 компонентних деформација

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, и три померања u, v, w.
Такође,имамо и 15 једначина , 6 једначина еластичности – уопштени Хуков закон, 6 једначина деформација

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$$

$$\gamma_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z ,$$

$$\gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y$$

и три услова равнотеже –*Навијеове једначине.* Водећи и рачуна о тзв. контурним условима могуће је решити задатке теорије еластичности.

Generalisani Hukov zakon

Veza napon - deformacija za izotropno telo

- Veze između komponentalnih napona i deformacija date su sa vezama dilatacija i normalnih napona:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned}} \qquad (1)$$

Veza napon - deformacija za izotropno telo

kao i sa vezama između klizanja i smičućih napona:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{xy} = \frac{1}{G}\,\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{yz} = \frac{1}{G}\,\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{zx} = \frac{1}{G}\,\tau_{zx} \end{aligned}} \tag{2}$$

- Jednačine (1) i (2) pretstavljaju veze između komponentalnih napona i komponentalnih deformacija: generalisani Hukov zakon za idealno elastično izotropno telo

Veza napon - deformacija za izotropno telo

- Tenzori napona i deformacija su prikazivani u vidu odgovarajućih kvadratnih simetričnih matrica reda 3
- Elementi na glavnoj dijagonali su normalni naponi, odn. dilatacije, a vandijagonalni elementi su smičući naponi, odnosno klizanja
- Moguć je i alternativni matrični prikaz tenzora napona i deformacija, kao i veze između njih, gde se svih 6 različitih komponenti tenzora napona i deformacija prikazuju u matričnom obliku kao vektori kolone sa po 6 elemenata

- Vektori komponentalnih napona i komponentalnih deformacija prkazuju se u obliku

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Veza napon - deformacija za izotropno telo

- Jednačine (1) i (2) mogu da se prikažu zajedno kao jedna matrična jednačina:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\sigma} \tag{4}$$

gde je $\boldsymbol{C}$ matrica fleksibilnosti (elastičnosti), reda 6, data sa

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Veza napon - deformacija za izotropno telo

- Jednačina (4) može da se prikaže u inverznom obliku kao

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

gde je $\boldsymbol{D}$ matrica krutosti materijala, izražena preko Lameovih konstanti, data sa

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{7}$$

$\sigma_{nor} = 132MPa$

- Људска кост femur има $\sigma_{ult} = 132MPa$ у случају дејства аксијалне силе нас затезање и само $\sigma_{nor} = 58MPa$ за силе оптерећења које делују управно на кост
- Ако је акијално оптерећење на притисак тада је $\sigma_{ult} = 187MPa$ и . $\sigma_{nor} = 132MPa$ Другим речима кост има *степен сигурности (од 2-5)*

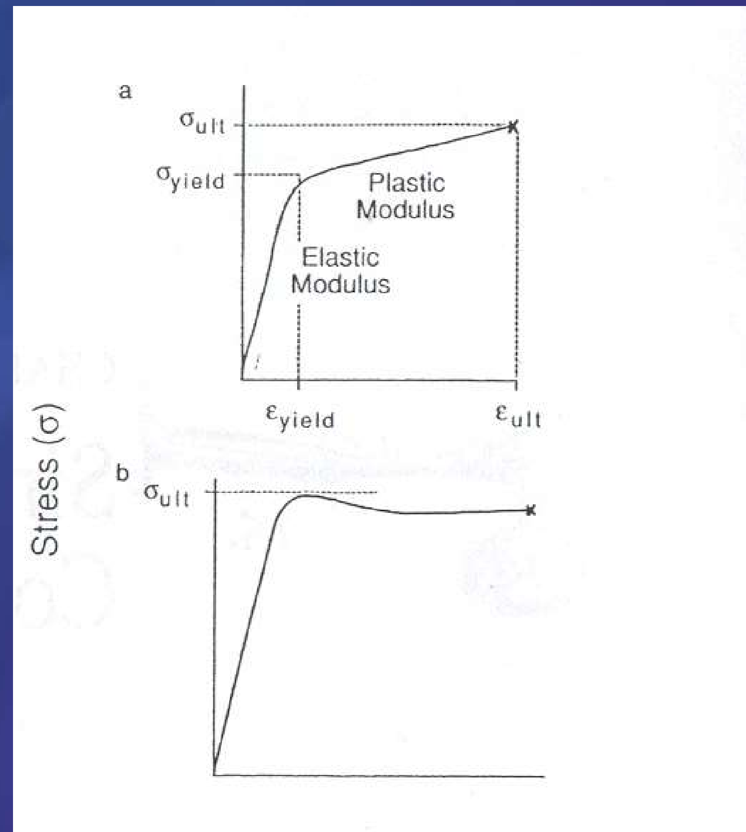
Конститутивна једначина људске кости

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j \qquad i, j = 1 \text{ to } 6$$

ортотропан материјал

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_i = S_{ij}\sigma_j \qquad i, j = 1 \text{ to } 6$$



napon-deformacija dijagram u slučaju cortical kos
у случају аксијалног оптерећења на затезање, аксијално оптерећење на притисак

- Очигледно је да матрица $[S_{ij}]$ представља инверзију матрице $[Cij]$ и дата је у функцији техничких константи Young.ов модул еластичности *Ei,*модула клизања *Gi,*и Poisson-ов коефицијента *v.*
- *за ортотропан материјал*

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1}=\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{23}}{E_2}=\frac{\nu_{32}}{E_3}$$

$$[S_{ij}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

- *трансверзално изотропични материјал*

$$E_1=E_2 \quad \nu_{12}=\nu_{21} \quad \nu_{31}=\nu_{32}=\nu_{13}=\nu_{23}$$

$$G_{23}=G_{31} \quad G_{12}=\frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$$

- ултразвучна техника за мерење анизотропних еластичних особина кости. Добија се таласна једначина где су: густина медијума, *V* брзина таласа, **U** јединични вектор правца померајa делића средине и **N** јединични вектор правца простирања таласа

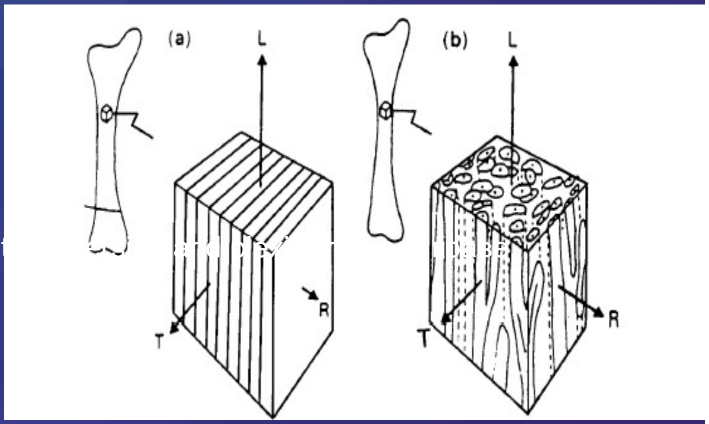
$$\rho V^2 U_m = C_{mrns} N_r N_s U_n$$

- *а) може се применити и за веома мале узорке*
- *б) поновљивост је изузетна*
- *ц)могу се мерити свих 5 или9 коефицијената на једном узорку*
- Техником просторног простирања таласа могуће је одредити Јунгов модул еластичности директно.

$$V^2 = \frac{E}{\rho}$$

TABLE 1.2 Elastic Stiffness Coefficients for Various Human and Bovine Bones[a]

Experiment (Bone Type)	C_{11} (GPa)	C_{22} (GPa)	C_{33} (GPa)	C_{44} (GPa)	C_{55} (GPa)	C_{66} (GPa)	C_{12} (GPa)	C_{13} (GPa)	C_{23} (GPa)
Van Buskirk and Ashman [1981] (bovine femur)	14.1	18.4	25.0	7.00	6.30	5.28	6.34	4.84	6.94
Knets [1978] (human tibia)	11.6	14.4	22.5	4.91	3.56	2.41	7.95	6.10	6.92
Van Buskirk and Ashman [1981] (human femur)	20.0	21.7	30.0	6.56	5.85	4.74	10.9	11.5	11.5
Maharidge [1984] (bovine femur haversian)	21.2	21.0	29.0	6.30	6.30	5.40	11.7	12.7	11.1
Maharidge [1984] (bovine femur plexiform)	22.4	25.0	35.0	8.20	7.10	6.10	14.0	15.8	13.6



- У табели су приказани (in GPa) за човечију (Haversian) кост and (both Haversian and plexiform) кост краве.

TABLE 1.3 Mean Values and Standard Deviations for the C_{ij} Measured by Van Buskirk and Ashman [1981] at Each Aspect over the Entire Length of Bone (all values in GPa)

	Anterior	Medial	Posterior	Lateral
C_{11}	18.7 ± 1.7	20.9 ± 0.8	20.1 ± 1.0	20.6 ± 1.6
C_{22}	20.4 ± 1.2	22.3 ± 1.0	22.2 ± 1.3	22.0 ± 1.0
C_{33}	28.6 ± 1.9	30.1 ± 2.3	30.8 ± 1.0	30.5 ± 1.1
C_{44}	6.73 ± 0.68	6.45 ± 0.35	6.78 ± 1.0	6.27 ± 0.28
C_{55}	5.55 ± 0.41	6.04 ± 0.51	5.93 ± 0.28	5.68 ± 0.29
C_{66}	4.34 ± 0.33	4.87 ± 0.35	5.10 ± 0.45	4.63 ± 0.36
C_{12}	11.2 ± 2.0	11.2 ± 1.1	10.4 ± 1.0	10.8 ± 1.7
C_{13}	11.2 ± 1.1	11.2 ± 2.4	11.6 ± 1.7	11.7 ± 1.8
C_{23}	10.4 ± 1.4	11.5 ± 1.0	12.5 ± 1.7	11.8 ± 1.1

TABLE 1.4 Elastic Moduli of Trabecular Bone Material Measured by Different Experimental Methods

Study	Method	Average Modulus	(GPa)
Townsend et al. [1975]	Buckling	11.4	(Wet)
	Buckling	14.1	(Dry)
Ryan and Williams [1989]	Uniaxial tension	0.760	
Choi et al. [1992]	Four-point bending	5.72	
Ashman and Rho [1988]	Ultrasound	13.0	(Human)
	Ultrasound	10.9	(Bovine)
Rho et al. [1993]	Ultrasound	14.8	
	Tensile test	10.4	
Rho et al. [1999]	Nanoindentation	19.4	(Longitudinal)
	Nanoindentation	15.0	(Transverse)
Turner et al. [1999]	Acoustic microscopy	17.5	
	Nanoindentation	18.1	
Bumrerraj [1999]	Acoustic microscopy	17.4	

Опсег је од 1 GPa до 8 GPa.

Моделирање еластичног понашања