Проф. др. Михаило Лазаревић

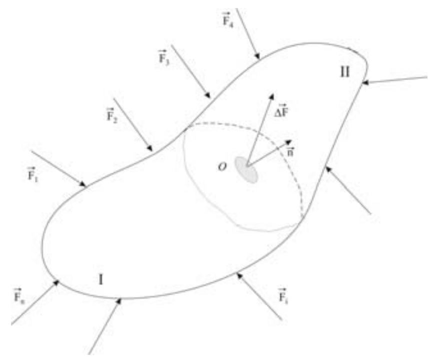
ОСНОВНЕ РЕЛАЦИЈЕ ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

Основни појмови

Овде ће бити изложени основни појмови теорије еластичности. Овде разматрамо потпуно еластична тела, тј. тела која су изложена спољашњим силама, враћају се односно заузимају првобитни облик по престанку деловања спољашњих сила. Такође овде се уводе и следеће претпоставке:

п1) тело је изотропно односно има иста еластична својства у свим правцима
п2) тело је хомогено тј. има исте особине у свим тачкама тела
п3) дефорације су мале

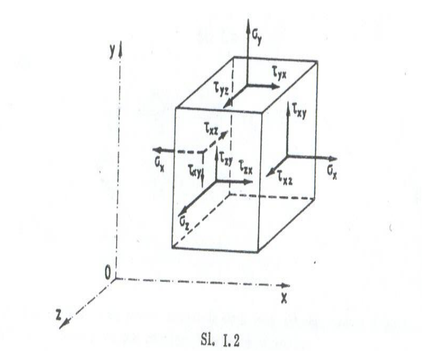
Према томе како дејствују на тело спољашње силе могу се поделити на површинске (на пр. хидростатички притисак, међусобни притисак чврстих тела при додиру итд.) и запреминске силе (силе теже, силе инерције итд.).Површинске силе делују само на тачке спољне површине тела и независне су од масе уоченог тела, док запреминске силе делују у свакој тачки тела и сразмерне су уоченој маси датог тела. Посматра се произвољно тело које је оптерећено датим системом спољашњих сила $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_i, ..., \vec{F}_n\right)$ и које се при том налази у *равнотежи,сл.1.1*



Слика 1.1

Као одговор на дејство спољашњих сила у унутрашњости тела појавиће се унутрашње силе између тачака (делића) датог тела. Да бисмо одредили те силе у ма којој тачки тела О, замислимо да је тело подељено помоћу неког попречног пресека који садржи тачку О и дели тело на два дела I и II. Ако уочимо део I, имајући у виду да је тело било у равнотежи тада ће и део тог тела овде I бити у равнотежи тј. под дејством спољашњих сила које делују на дати део као и унутрашњих сила распоређених по попречном пресеку *n-n* које представљају утицај горњег дела на доњи део (I). Ако се уочи мала површина ΔA са нормалом $\vec{n}$ око тачке О, где је са $\Delta\vec{F}$ означен главни вектор унутрашњих сила који делује у уоченој површини ΔA,може се добити величина ϕ_n која представља укупни напон у тачки О за раван са нормалом $\vec{n}$.

$$\phi_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



Слика 1.2

Напонско стање је описано тзв. тензорима другог реда (скраћено тензорима) пошто поред величине, правца и смера који одређују векторску величину, напонско стање зависи и од орта нормале површине на коју се напон односи, $\phi_n = \phi_n\left(\vec{r}_O, \vec{n}\right)$. То значи да напон у једној тачки мође имати различите вредности за различите пресечне равни које пролазе кроз ту тачку. Према томе, ако кажемо да нам је познато стање напона у некој тачки у уоченом телу, то онда значи да нам је познат вектор напона за било коју пресечну раван у тој тачки. С друге стране ако се уведе *тензор напона* $\boldsymbol{\sigma}$ показује се да у потпуности одређује напонско стање у датој тачки, и она има двоиндексно означавање, где први индекс се односи на површину где напон делује а други на правац његовог деловања,сл..1.2. При томе, ако знамо тензор напона, можемо одредити вектор напона за било коју пресечну раван у тој тачки и обрнуто ако знамо векторе напона за било које три некомпланарне пресечне равни у тој тачки можемо одредити тензор напона у тој тачки. Осим тога, пројекција укупног напона ϕ_n на нормалу $\vec{n}$ се назива нормалним напоном у тачки О за раван са нормалом $\vec{n}$, док се пројекција напона ϕ_n на саму раван назива напоном смицања (тангенцијалним напоном) у тачки О за посматрану раван. Према томе, кроз било коју тачку у телу могуће је очевидно провући и три произвољне међусобно управне равни са укупно девет компонентних напона.

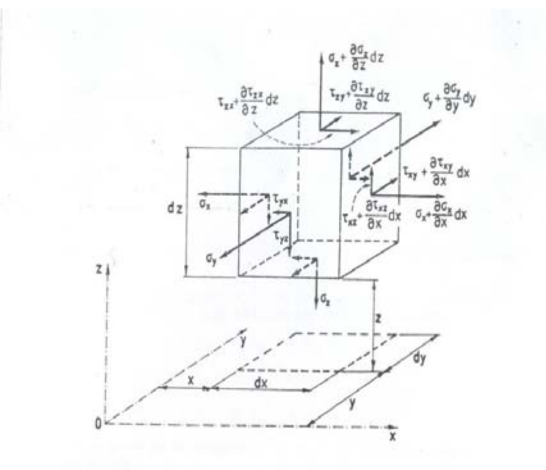
Услови равнотеже- dV издвојеног из тела – Навијеове једначине

Уочени паралопипед $dV = dxdydz$ нападају континуално распоређене унутрашње силе док у појединим тачкама у унутрашњости делују запреминске силе.Напони који одговарају странама које пролазе кроз тачку дефинисану координатама (x, y, z) су:

$$(\sigma_{xx} \to \sigma_x), \tau_{xy}, \tau_{xz},$$

$$(\sigma_{yy} \to \sigma_y), \tau_{yx}, \tau_{yz},$$

$$(\sigma_{zz} \to \sigma_z), \tau_{zx}, \tau_{zy},$$



Слика 1.3

Напони за остале три стране разлоковаће се од ових за мале прираштаје који зависе од померања страна dx, dy, dz .На пр. за страну која је паралелна координатној равни xz, а померена је од ове за dy одговарајући напони биће ,сл.1.3

$$\sigma_y + (\partial\sigma_y / \partial y)dy, \quad \tau_{yx} + (\partial\tau_{yx} / \partial y)dy, \quad \tau_{yz} + (\partial\tau_{yz} / \partial y)dy,$$

Услови равнотеже су (главни вектор датог система сила једнак је нули):

$$1) \sum F_x = 0, \; 2) \sum F_y = 0, \quad 3) \sum F_z = 0,$$

Тако пројектовањем свих сила које делују на уочени dV у x правцу и коришћењем првог услова равнотеже $\sum F_x = 0$ произилази:

$$(\sigma_x + (\partial\sigma_x / \partial x)dx - \sigma_x)dydz + (\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx} / \partial y)dy - \tau_{yx})dzdx$$

$$+(\tau_{zx} + \partial\tau_{zx} / \partial z)dz - \tau_{zx})dxdy + \omega_x dxdydz = 0$$

или после срeђивања

$$(\partial\sigma_x / \partial x + \partial\tau_{yx} / \partial y + \partial\tau_{zx} / \partial z + \omega_x)dxdydz = 0$$

Како је $dV \neq 0$ следи да је:

$$\textbf{p1)} \quad \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \omega_x = 0$$

На сличан из услова 2) $\sum F_y = 0$, 3) $\sum F_z = 0$, добијају се следеће једначине:

p2) $\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \omega_y = 0$,'

p3) $\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \omega_z = 0$

Добијене диференцијалне једначине равнотеже дају везу између напона и запреминских сила и познате су под називом ***Навијеове једначине.***

Такође и други сет једначина сума момената (главни момент датог система је такође једнак нули),

$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$.

Тако је за осу која пролази кроз тежиште dV и која је паралелна са z осом:

$$\sum M_z = \tau_{xy} dydzdx / 2 + (\tau_{xy} + (\partial \tau_{xy} / \partial x)dx)dydzdx / 2$$
$$-\tau_{yx} dxdzdy / 2 - (\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y)dy)dydzdy / 2 = 0$$

Занемаривањем чланова вишег реда уз чињеницу да је $dV \neq 0$ добија се да је

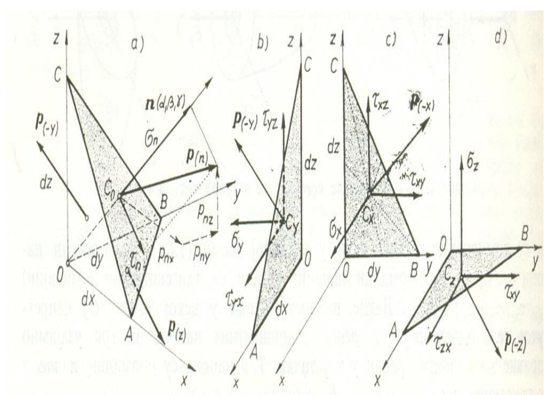
p4) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

На сличан начин применом преостала два услова равнотеже закључује се да важи:

p5) $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

p6) $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Напон за произвољну раван кроз уочену тачку О



Слика 1.4

Напонско стање тела биће потпуно одређено ако су познати напони у свим тачкама, и то за све равни кроз одговарајуће тачке. Може се показати да су напони за разне равни кроз дату тачку зависни међу собом. Тачније речено, ако је познато шест компонентних напона $\sigma_x, \sigma_y, ..., \tau_{xz}$ за било коју тачку тела, могуће је израчунати и напоне за произвољну раван кроз исту тачку,сл.1.4. Повуцимо кроз тачку О напрегнутог тела три ортогоналне равни и нека су компоненте напона у тој тачки $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$. Да бисмо одредили напоне за раван кроз тачку О чија нормала $\vec{n}$ је одређена са косинусима правацама тј. $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ замислимо неку раван π паралелну овој, на бесконачно малом растојању dh од тачке О. При томе ће ова раван са координатним равнима образовати у телу мали татраедар са ивицама $dxdydz$. при томе компоненте средњих напона на одговарајућим међусобно управним страницама тетраедра бити: $\sigma_x + d\sigma_x, \tau_{xy} + d\tau_{xy}, ...\tau_{zy} + d\tau'_{zy}$. Нека су $p_n \to \phi_{nx}, \phi_{ny}, \phi_{nz}$ компоненте напона за кроз посматрану тачку О паралелну равни π . Тада ће компоненте напона за раван π бити $\phi_{nx} + d\phi_{nx}, \phi_{ny} + d\phi_{ny}, \phi_{nz} + d\phi_{nz}$. У граничном процесу када $dh \to 0$ раван $\pi \to$ равни са $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, при чему ће бесконачно мале величине $d\sigma_x, d\tau_{xy}, ..., d\tau'_{zy}, d\phi_{nx}, d\phi_{ny}, d\phi_{nz} \to 0$ тако да ће напони за раван π постати идентични са напонима за раван са нормалом $\vec{n}$.Поред сила распоређених по странама тетраедра, тачке тетраедра у општем случају делују и спољашње запреминске силе. Како се татраедар налази у равнотежи одговарајући услови равнотеже важе, тј:

$$1)\ \sum F_x = 0,\ 2)\ \sum F_y = 0,\ \ 3)\ \sum F_z = 0,$$

Применом првог услова добијамо:

$$(\phi_{nx} + d\phi_{nx})A - (\sigma_x + d\sigma_x)\cos\alpha A - (\tau_{yx} + d\tau'_{yx})\cos\beta A -$$
$$(\tau_{zx} + d\tau'_{zx})\cos\gamma A + \omega_x\left(\frac{1}{3}Adh\right) = 0$$

где A представља површину странице која лежи у равни π. Сличне релације могу се добити из преостала два услова равнотеже. Пуштајући да $dh \to 0$ добијају се следећи изрази:

$$\phi_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma$$
$$\phi_{ny} = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma$$
$$\phi_{nz} = \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma$$

или у кондезованом облику

$$\begin{Bmatrix}\phi_{nx}\\ \phi_{ny}\\ \phi_{nz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{Bmatrix}$$
$$\Rightarrow \{\phi_n\} = [\sigma]\{\vec{n}\}$$

Претходни изрази представљају *Кошијеве једначине* које нам омогућавају да се помоћу познатих шест компоненти напона за три ортогоналне равни у произвољној тачки нађемо и компоненте напона за било коју раван кроз ту тачку.

Главни напони

За произвољну раван са нормалом $\vec{n}$, нормални напон према претходним изразима биће:

$$\sigma_n = \vec{n}\cdot\phi_n = \left(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}\right)\cdot\left(\phi_{nx}\vec{i} + \phi_{ny}\vec{j} + \phi_{nz}\vec{k}\right) =$$
$$= \cos\alpha\phi_{nx} + \cos\beta\phi_{ny} + \cos\gamma\phi_{nz} =$$
$$= \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

Вектори који су повучени из посматрне тачке у правцу одговарајућих нормала n за разне произвољне равни и чије су пројекције:

$$\xi = \cos\alpha / \sqrt{|\sigma_n|},\ \eta = \cos\beta / \sqrt{|\sigma_n|},\ \ \zeta = \cos\gamma / \sqrt{|\sigma_n|},$$

образоваће централну површину другог реда јер после замене $[\xi, \eta, \zeta]$ у претходни израз добија се:

$$\pm 1 = \sigma_x\xi^2 + \sigma_y\eta^2 + \sigma_z\zeta^2\gamma + 2\tau_{xy}\xi\eta + 2\tau_{yz}\eta\zeta + 2\tau_{zx}\zeta\xi$$

Произилази , да постоји одговарајући правоугли систем тзв. *главних оса* и ако се ове усвоје за координатне, добија се да су тада одговарајући напони $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Према томе, у свакој тачки уоченог тела постоје три међусобне управне равни на које су односни наспони управни, при чему је за једну раван нормални напон највећи а за последњу најмањи. Ти напони који одговарају овим равнима називају се *главни напони у посматраној тачки тела и означени су са* $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Усвајајући правце главних напона за координатне осе и посматрајући у датој тачки укупне напоне за различите равни као векторе положаја, уочава се да ти вектори дефинишу тзв. *Ламеов* (Lame-ov) *елипсоид напона* .

$$\left(\frac{\phi_{n1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{n2}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{n3}}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$

Наиме, имајући у виду дефиницију главних оса из Кошијевих једначина следи:

$$\phi_{n1} = \cos\alpha\sigma_1,\ \ \phi_{n2} = \cos\beta\sigma_2,\ \ \phi_{n3} = \cos\gamma\sigma_3,$$

које након квадрирања и сабирања водећи рачуна при том да је

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

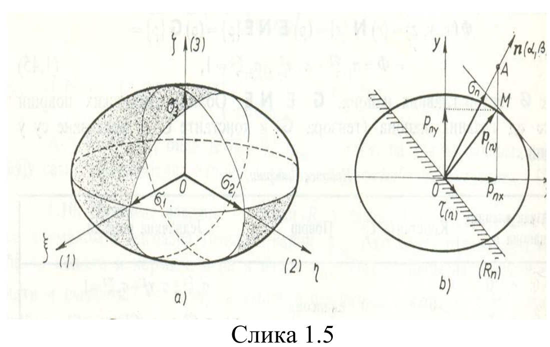
добија се Ламеов елипсоид напона са средиштем у O, полуоса једнаких главним напонима $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$,сл.1.5. Ако су два напона једнака $\sigma_1 = \sigma_2$ елипсоид је обртни(ротациони) а када су сва три главна напона једнака $\sigma_s = \sigma,\ s = 1,2,3$ онда је *сфера*(*напонска сфера*), полупречника σ.Код равног стања напрезања Ламеов елипсоид напона се своди на елипсу напона односно *круг напона* .Саме главне напоне $\sigma_i,\ i = 1,2,3$ и њихове косинусе смерова одређујемо из Кошијевих једначина које сада гласе:

$$\sigma_i \cos\alpha_i = \sigma_x \cos\alpha_i + \tau_{yx}\cos\beta_i + \tau_{zx}\cos\gamma_i$$
$$\sigma_i \cos\beta_i = \tau_{xy}\cos\alpha_i + \sigma_y \cos\beta_i + \tau_{zy}\cos\gamma_i$$
$$\sigma_i \cos\gamma_i = \tau_{zx}\cos\alpha_i + \tau_{yz}\cos\beta_i + \sigma_z \cos\gamma_i$$

Како су претходне једначине хомогене по $\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i$ да би имале нетривијално решење мора бити испуњено да је детерминанта система једнака нули, а она представља тзв. карактеристичну или секуларну једначину трећег реда:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0$$

чијим решавањем одређујемо $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ који су познати под називом *главне вредности тензора напона* $\boldsymbol{\sigma}$



Слика 1.5

$$f(\sigma_s) = \det\left|\phi_n - \sigma_s I\right| = \sigma_s^3 - I_1(\phi_n)\sigma_s^2 + I_2(\phi_n)\sigma_s - I_3(\phi_n) = 0$$

Овде су са I_1, I_2, I_3 означена прва,друга и трећа инваријанта тензора напона $[\sigma] \to \boldsymbol{\sigma}$, где су :

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \,,\, I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \det|\boldsymbol{\sigma}| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Ове скаларне вредности I_1, I_2, I_3 називају се и *напонским инваријантама* тензора напона $\boldsymbol{\sigma}$ јер остају инваријанте при трансформацији координата. Решавањем Кошијевих једначина по $\cos\alpha_s, \cos\beta_s, \cos\gamma_s$, $s = 1,2,3$ за сваку вредност σ_s, $s = 1,2,3$ добијају се три главна правца $\vec{n}_s$ тј.:

$$\frac{\cos\alpha_s}{\begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \end{vmatrix}} = \frac{\cos\beta_s}{\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xz} \\ & \tau_{yz} \end{vmatrix}} = \frac{\cos\gamma_s}{\begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \end{vmatrix}} = Cs$$

Пошто су вектори главних праваца $\vec{n}_s$ јединични и показује се да испуњавају услов ортогоналности $(\vec{n}_r)\{\vec{n}_s\} = 0,\ r,s = 1,2,3 \quad r \neq s$ односно они представљају један ортонормирани базис тако да се у тачки О може он узети уместо постојећег правоуглог триедра $Oxyz$, добија се да је тензор напона сада дијагоналан:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$I_{1\Gamma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \,,\, I_{2\Gamma} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_{3\Gamma} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

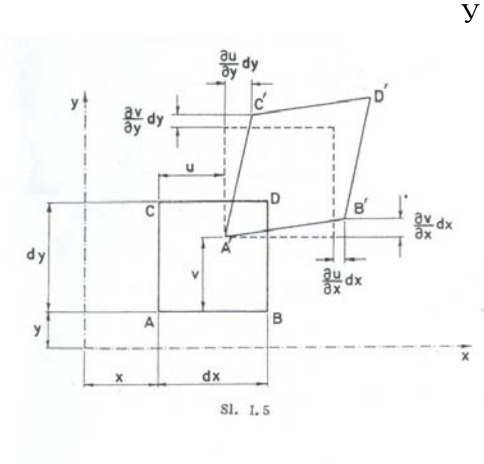
На основу Виетових правила показује се да су

$$I_1(\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = I_{1\Gamma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2(\sigma) = I_{2\Gamma} \,,\, I_3(\sigma) = I_{3\Gamma} \,,\quad |\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\Gamma}|$$

чиме је доказано да су I_1, I_2, I_3 заиста напонске инваријанте.

Деформације.Кинематички услови



Слика 1.6

У претходним разматрањима коришћени су услови равнотеже који су чисто статичке природе и није вођено рачуна о еластичним променама тела. Услови равнотеже су били независни од деформација јер су оне, према усвојеној претпоставци, у општем случају врло мале. Како, међутим, за изналажење напона услови равнотеже *нису довољни,*то је потребно узети у обзир и деформације услед деловања спољашњих сила. Ако су координате произвољне тачке у телу пре деформације биле (x, y, z) после деформисања тела њене ће координате постати $x \to x+u,\ y \to y+v,\ z \to z+w$ где су u, v, w померања тачке у x, y, z правцу,сл.1.6. При томе померања u, v, wсе мењају од тачке до тачке тј. функције су од $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z), w = w(x,y,z)$. Ради једноставности разматраћемо равански случај деформисања тела тј. тачке тела које су пре промене облика(површине) лежале у једној равни, и по деформисању остају у истој тој равни. Према томе, почетни правоугаони елемент $ABCD$ тела страна dx, dy после извршене деформације заузеће положај тј. $A'B'C'D'$ (види слику ....) . Настале деформације су двојаке природе. Уздужна деформација (специфично издужење или дилатација) је последица промене дужине страница посматраног елемента, док је тзв. деформација клизања последица обртања старница у односу на x, y осу. Дилатација уоченог одсечка првобитне дужине ΔL је дефинисана следећим изразом:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta L}$$

где је $\Delta\delta$ промена дужине одсечка после деформације. Деформација клизања γ представља промену првобитног правог угла 90° пре деформације и после деформисања.Нека су са $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ означене пројекције померања тачке А на координатне осе и развојем истих у Тејлоров ред и занемаривањем величина вишег реда, добијамо да су компоненте померања тачке B при преласку у B', види сл.1.6

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx,\ v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx,$$

При томе је дилатација ε_x

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \Rightarrow A'B' = \left(1 + \varepsilon_x\right)AB = \left(1 + \varepsilon_x\right)dx$$

С друге стране,

$$\left(A'B'\right)^2 = \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2$$

На основу претходна два израза добијамо:

$$2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 = 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Пошто су деформације врло мале, то су и дилатације и изводи померања такође мале величине, па занемаривањем величина вишег реда произилази:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

односно на сличан начин добија се и за y првац:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

односно у случају тродимензионалних деформација имамо и компоненту и у z правцу

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Такође , на сличан начин може се констатовати да се права AB по деформацији обрнула ка y оси за угао $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, а права AC (после деформације $A'C'$) ка x оси за угао $\partial u / \partial y$. Према томе, клизање γ_{xy} биће једнако:

$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$

У случају тродимензионалних деформација имаћемо и :

$\gamma_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z$, $\gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y$

где се на основу увида у претходне изразе може закључити да су клизања симетрична, тј.:

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$,

Шест компонената деформације

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$,

одређује потпуно деформацију у посматраној тачки тела. Помоћу њих је могуће израчунати специфично издужење у било ком правцу као и деформацију угла између било која два међусобно управна правца, а за исту тачку. Такође, слично као и код главних напона, да у било којој тачки тела постоје три међусобно управна правца за која су клизања једнака нули $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{13} = 0$, $\gamma_{23} = 0$, тако да се ти правци називају *правци главних дилатација.*При томе је

$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

и представља инваријантну величину где је један од главних праваца у коме је дилатација највећа а за један најмања. Према томе ако су нам позната померања u, v, w могуће је одредити једнозначно шест компонентни деформација у датим тачкама тела и обрнуто ако су нам познате $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, односно тј. тензор деформације у уоченој тачки тела $\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$* тј. сада имамо систем парцијалних диференцијалних једначина чијим решавањем изналазимо тражена померања u, v, w. При томе компоненте деформација морају задовољавати извесне услове да би систем имао једнозначна решења, односно у уоченој тачки компоненте деформација не могу бити произвољне. Ти допунски услови су познати као *Сен Венанови услови тј. једначине компатибилности деформација (шест парцијалних диференцијалних једначина).* Тензор деформације $\boldsymbol{\varepsilon}$ је дефинисан односно одређен са:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

где су сада:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x, \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y, \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z, \\ &2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx} = \gamma_{xy}, \\ &2\varepsilon_{xz} = 2\varepsilon_{zx} = \gamma_{xz}, \\ &2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} = \gamma_{yz.} \end{aligned}$$

односно тензор деформације је

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Уопштени Хуков закон

---

* касније ће бити детаљније разматран

Први је Hooke 1660 године поставио закон *„Ut tensio cis vis“* којим се успоставља веза између напона и деформација. Према том закону постоји *линеарни однос (закон пропорционалности) између напона и дилатације код аксијалног напрезања* $\sigma = E\varepsilon$ где је E коефицијент пропорционалности који је 1807 године увео Thomas Young. Пошто је ε неименован број модул E има исту јединицу као и напон, али представља материјалну константу пошто не зависи од напона и дформација, већ само од материјалних карактеристика деформабилног тела. Експерименти су потврдили да овај закон важи за многе материјале али за случај *малих деформација.*

Напонско и деформабилно стање у некој тачки напрегнутог тела одређена су тензором напона $\boldsymbol{\sigma}$ и тензором деформација $\boldsymbol{\varepsilon}$ тако да између њих мора постојати веза. Оваквих веза би било 9 али због симетричности тензора имамо 6 функционалних релација:

$$\sigma_x = f_1\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\right),$$

$$\sigma_y = f_2\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\right),$$

.....

$$\tau_{yz} = f_6\left(-\|-\right)$$

Видели смо да су деформације зависне од померања u, v, w односно функције кордината x, y, z посматране тачке О . Исто се односи и на напоне, тј. напон $\bar{\sigma}$ у блиској тачки $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ мало се разликује од напона σ у тачки (x, y, z) па се те две вредности због малих деформација могу изједначити, $\bar{\sigma} = \sigma$. Ако је тело идеално еластично тада се користи хипотеза о природном стању деформабилног тела: „ *када нема деформације тада не постоји ни напона“* односно у недеформисаном стању $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$ па је и $\boldsymbol{\sigma = 0}$ те су и фунцкије $f_i\left(0,0,0,0,0,0\right) = 0,\ i = 12,...,6$. Ова нам претпоставка омогућава да не водимо рачуна *о претходним напрезањима* којма је тело било изложено већ да посматрамо стање напрезања од тренутка почетка напрезања.

Слично основном Хуковом закону (аксијално напрезање) претпоставља се да за иделано еластично тело такође у важности *линеарна зависнот* између напона и деформације а то је базирано на чињеницама:

- задатој деформацији $\boldsymbol{\varepsilon}$ у уоченој тачки мора да одговара јединствени тензор напона $\boldsymbol{\sigma}$ и обрнуто , а то у сваком случају задовољава линеарна зависност између њих.
- имајући у виду хипотезу о природном стању и развојем у Маклоренов ред претходних 6 функционалних релација, са тачношћу до малих величина другог реда добија се линеарна функција зависности напона од компонентних деформација тј.

$$\sigma_x = \left[f_1\right]_0 + \left[\partial f_1 / \partial\varepsilon_x\right]_0 \varepsilon_x + \ldots + \left[\partial f_1 / \partial\gamma_{yz}\right]_0 \gamma_{yz}$$

Коефицијенти $\left[(.)\right]$ у претходном изразу су константе, те се може писати на следећи начин:

$$\sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{xy} + C_{15}\gamma_{xz} + C_{16}\gamma_{yz}$$
$$\sigma_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\gamma_{xy} + C_{25}\gamma_{xz} + C_{26}\gamma_{yz}$$
$$\sigma_z = C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z + C_{34}\gamma_{xy} + C_{35}\gamma_{xz} + C_{36}\gamma_{yz}$$
$$\tau_{xy} = C_{41}\varepsilon_x + C_{42}\varepsilon_y + C_{43}\varepsilon_z + C_{44}\gamma_{xy} + C_{45}\gamma_{xz} + C_{46}\gamma_{yz}$$
$$\tau_{xz} = C_{51}\varepsilon_x + C_{52}\varepsilon_y + C_{53}\varepsilon_z + C_{54}\gamma_{xy} + C_{55}\gamma_{xz} + C_{56}\gamma_{yz}$$
$$\tau_{yz} = C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}\gamma_{xy} + C_{65}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{yz}$$

Коефицијенти C_{ik} се зову *коефицијенти еластичности* и они представљају материјалне карактеристике и зависе једино од материјалне природе деформабилног тела а не зависе од напона нити од деформација.
На основу претпоставке да је тело *хомогено* (састав је исти у свакој тачки) може се закључити да су $C_{ik} = const$ а пошто су тензори деформација и напона симетрични то ће и тензор ***C*** са компонентама $C_{ik} = C_{ki} = const$ бити симетричан. На основу овога број константи се смањује са 36 на $6 + (36-6)/2 = 21$, тј. на главној дијагонали 6 и остали симетрично у односу на њу.
Даље ако се уведе претпоставка да је тело и *изотропно* (има исте физичке особине у свим правцима) то ће као последично дати да одговарајуће везе се не мењају при *трансформацији координата.*
Добија се да су:
$C_{14} = C_{15} = C_{16} = 0,\ C_{24} = C_{25} = C_{26} = 0,\ C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0,$
На основу овога, број константи се смањује са 21 на 12 константи, односно одговарајуће везе су:
$$\sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z$$
$$\sigma_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z$$
$$\sigma_z = C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z$$
$$\tau_{xy} = C_{44}\gamma_{xy} + C_{45}\gamma_{xz} + C_{46}\gamma_{yz}$$
$$\tau_{xz} = C_{54}\gamma_{xy} + C_{55}\gamma_{xz} + C_{56}\gamma_{yz}$$
$$\tau_{yz} = C_{64}\gamma_{xy} + C_{65}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{yz}$$
Такође, ако се размотре и три одговарајуће ротације закључује се да мора бити и
$C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0$
тако да се добија $12 - 3 = 9$ константи, односно:
$$\sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z$$
$$\sigma_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z$$
$$\sigma_z = C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z$$
$$\tau_{xy} = C_{44}\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = C_{55}\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = C_{66}\gamma_{yz}$$
одакле се може закључити да *сваки нормални напон зависи од свих дилатација али тангенцијални напон зависи од одговарајућег клизања.* Исто тако закључује се на бази изотропности да су:
$C_{12} = C_{13} = C_{23} = B,\quad C_{11} = C_{22} = C_{33} = A,\quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = C,$
тако да се број константи свео на 3 (A, B, C) па се одговарајуће једначине могу написати у следећем облику:

$\sigma_x = A\varepsilon_x + B\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right), \quad \sigma_y = A\varepsilon_y + B\left(\varepsilon_z + \varepsilon_x\right)$

$\sigma_z = A\varepsilon_z + B\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$

$\tau_{xy} = C\gamma_{xy}, \ \tau_{xz} = C\gamma_{xz}, \ \tau_{yz} = C\gamma_{yz}$

Допунском анализом на бази изотропности из претходних једначина добија се најзад следећа веза између константи $2C = A - B$, број константи се свео на $3-1=2$. Ламе је увео следеће константе $\lambda = B, \ \nu = C = \left(A - B\right)/2, \Rightarrow A = \lambda + 2\nu$ који су познати као *Ламе-ови коефицијенти.* На тај начин добија се

- *Уопштени Хуков закон-*

$\sigma_x = \left(\lambda + 2\nu\right)\varepsilon_x + \lambda\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) = \lambda\varepsilon_v + 2\nu\varepsilon_x$

$\sigma_y = \left(\lambda + 2\nu\right)\varepsilon_y + \lambda\left(\varepsilon_z + \varepsilon_x\right) = \lambda\varepsilon_v + 2\nu\varepsilon_y$

$\sigma_z = \left(\lambda + 2\nu\right)\varepsilon_z + \lambda\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = \lambda\varepsilon_v + 2\nu\varepsilon_z$

$\tau_{xy} = \nu\gamma_{xy},$

$\tau_{xz} = \nu\gamma_{xz}, \qquad \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$\tau_{yz} = \nu\gamma_{yz}$

за просторно стање напрезања.С обзиром на тензоре напона и деформације Хуков закон се може написати и у тензорском облику

$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\varepsilon_v \boldsymbol{I} + 2\nu\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \lambda\varepsilon_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\nu \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

где су сада $\boldsymbol{I}$ јединична матрица, а $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = div\vec{s} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z},$

$\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

Да би се изразиле деформације помоћу напона детерминанта прве три једначине је једнака $\Delta = 4\nu^2(3\lambda + 2\nu) \neq 0$ тако да решавањем претходног система једначина по компонентним деформацијама уопштени Хуков закон може се изразити помоћу једначина:

$\varepsilon_x = \left(2\nu/\Delta\right)\left[2\left(\lambda + \nu\right)\sigma_x - \lambda\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$

$\varepsilon_y = \left(2\nu/\Delta\right)\left[2\left(\lambda + \nu\right)\sigma_y - \lambda\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]$

$\varepsilon_z = \left(2\nu/\Delta\right)\left[2\left(\lambda + \nu\right)\sigma_z - \lambda\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$

$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/\nu$

$\gamma_{xz} = \tau_{xz}/\nu$

$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/\nu$

Ако се уведу две материјалне константе E Јунгов модул еластичности материјал и Пуасонов коефицијент μ* које су одређене следећим релацијама:

* у литератури се може наћи Пуасонов коефицијент означен са ν - (однос попречне и уздужне деформације)

$$E = \frac{(3\lambda + 2\nu)\nu}{(\nu + \lambda)}, \quad \mu = \frac{|\varepsilon_x|}{|\varepsilon_z|} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \nu)}$$

и представљају увек позитивне константе за све материјале. Такође, Ламеов коефицијент ν је познат и под називом као модул смицања односно *модул клизања, тј.* $\nu = G\left[N/m^2\right]$. Ако се претходно уведене константе замене у једначине коначно се добија:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \qquad G = E/2(1+\mu)$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$$

$$\gamma_{zy} = \tau_{zy}/G$$

Формулисање проблема теорије еластичности

У општем случају тродимензионалног напонског стања имао, према томе, 15 непознатих величина од тога 6 напона $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx},$, 6 компонентних деформација

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx},\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx},\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy},$ и три померања u, v, w.

Такође,имамо и 15 једначина , 6 једначина еластичности – уопштени Хуков закон, 6 једначина деформација

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$$

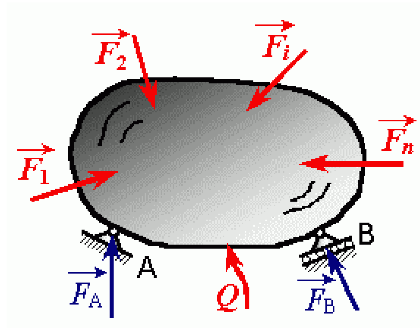
$$\gamma_{zx} = \partial w/\partial x + \partial u/\partial z,$$

$$\gamma_{yz} = \partial v/\partial z + \partial w/\partial y$$

и три услова равнотеже –*Навијеове једначине.* Водећи и рачуна о тзв. контурним условима могуће је решити задатке теорије еластичности.

Енергија елатичног деформисања чврстог тела

Рад спољашњих сила које делују на тело



Слика 5.1

Рад спољашњих сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..\vec{F}_n$ на деформабилном телу троши се на деформисање тог тела, где при томе спољашње силе врше рад W_e ,(сл.5.1). Осим тога тело може да прими или преда околини количину топлоте Q .Рад спољашњих сила и доведена топлота се троше на повећање унутрашње енергије тела U и на повећање његове кинетичке енергије E_k . Према првом закону термодинамике добија се:

$$\boxed{W_e + Q = U + \Delta E_k}.$$

При лаганом повећању оптерећења прираст кинетичке енергије тела може се занемарити, као и промена топлоте са околином тј:

$$\boxed{W_e \cong U},$$

тј. целокупан рад спољашњих сила се троши на повећање унутрашње енергије тела, која се тада назива и *енергијом деформисања*. Код еластичних тела, енергија деформисања се може поново претворити у механички рад. Овде ће се разматрати случај линеарно-еластичних тела где силе линеарно се повећавају, односно напрезања линеарно зависе од деформација, где се након растерећења тела потпуно враћају у првобитни облик са истом запремином.

Енергија деформисања и густина енергије деформисања

Одређивање енергије деформисања тела

а)за случај нормалне компоненте напрезања
б) за случај тангенцијалне компоненте напрезања
ц) општег случаја оптерећења

Примењује се метода суперпозиције, тј. посебно се посматра енергија деформисања сваке компонентне напрезања, а укупну енергију деформисања одредићемо њиховим сабирањем.Уочава се диф. елеменат тела запремине $dV = dxdydz$

а)за случај нормалне компоненте напрезања(сл.5.2)

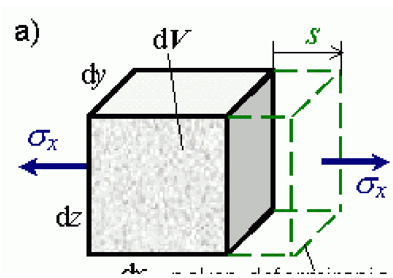
При лаганом оптерећивању одговарајуће напрезање постепено линеарно расте са порастом деформације. Елементарни рад спољашњих сила је:

$$\mathrm{d}W_e = \int_{(s)} F_x \cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}U \quad .$$

Како је у случају једноосног напрезања на основу Хуковог закона $\sigma_x = E\varepsilon_x$ добија се да је:

$$\boxed{\mathrm{d}U=\int_{(s)}F_x\,\mathrm{d}s=\int_0^{\varepsilon_x}\sigma_x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}\varepsilon_x\mathrm{d}x=E\,\mathrm{d}V\int_0^{\varepsilon_x}\varepsilon_x\mathrm{d}\varepsilon_x=E\,\mathrm{d}V\frac{\varepsilon_x^2}{2}=\frac{1}{2}\sigma_x\,\varepsilon_x\,\mathrm{d}V}$$

Енергија деформисања по јединици запремине тела представља густину енергије деформисања U_o.У претходном случају густина енергије деформисања је



Слика 5.2

$$\boxed{U_{\mathrm{o}}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{2}\sigma_x\,\varepsilon_x}$$

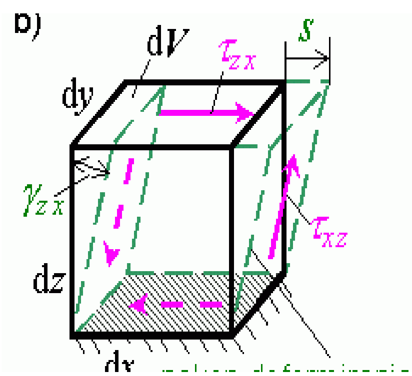
Ако тело није линеарно-еластично густина енергије деформирања је

$$U_{\mathrm{o}}=\int_0^{\varepsilon_x}\sigma_x\mathrm{d}\varepsilon_x=k\sigma_x\varepsilon_x\,,$$

гје је $0<k<1$ константа зависна о својствима тела.

б) елемент оптерећен тангенцијалним компонентама напрезања

$\tau_{xz}=\tau_{zx}$



Слика 5.3

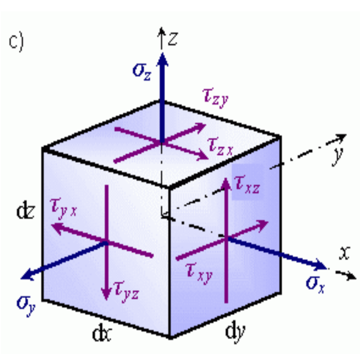
Елемент на сл. 5.3 налази се у стању чистог смицања. Ако је доња плоча непомична, сила која на њој делује не врши рад. Рад бочних сила такође је једнак нули, јер је помак управан на правац силе. Рад врши само сила на горњој плочи.Елементарни рад спољашњих сила износи:

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}(\tau_{zx}\cdot\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x)\gamma_{zx}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}\mathrm{d}V=\mathrm{d}U\,,$$

гдје је γ_{zx} угао деформације елемента.Густина енергије деформисања елемента дата је изразом:

$$\boxed{U_{\mathrm{o}}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}}\,.$$

ц) општег случаја оптерећења, сл.5.4



Слика 5.4

Напрезање σ_x врши рад само на деформацији ε_x, напрезање σ_y врши рад на деформацији ε_y, напрезање τ_{zx} на деформацији γ_{zx}, итд. Радови се могу независно рачунати, па је укупни рад унутарњих сила у општем случају напрезања дат изразом:

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}=\mathrm{d}U=\frac{1}{2}(\sigma_x\,\varepsilon_x+\sigma_y\,\varepsilon_y+\ldots+\tau_{zx}\,\gamma_{zx})\mathrm{d}V\,,$$

а густина енергије деформисања је:

$$\boxed{U_{\mathrm{o}}=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})}\,.$$

У случају главних напрезања (сл.5.5) и главних деформација густина енергије деформисања је:

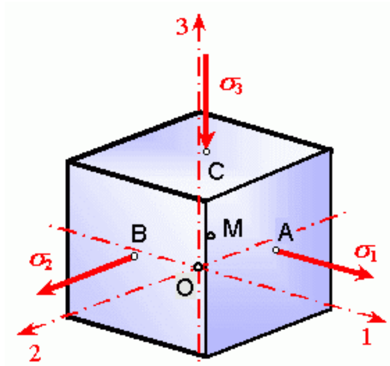
$$\boxed{U_o = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right)}$$

Компоненте напрезања и деформација повезане су Хуковим законом, те се енергија деформисања може изразити само као функција напрезања, односно деформација. Следи:

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$$

Густина енергија не зависи од избора координатног система, па у случају подударања оса с главним правцима напрезања следи једноставнији облик израза:

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]}.$$



Слика 5.5

Делови енергије деформисања тела

Деформисање околине сваке тачке може се раставити на истовремену промену облика (**дисторзија**) и промену запремине (**дилатација**). Енергију деформисања може се раставити на два дела:**енергију промене запремине** или **дилатацијску** (**хидростатичку**) **енергију** и на **енергију промене облика** или **дисторзијску енергију**.

Запреминска деформација Θ изражава промену запремине и везана је за подужне деформације изразом:

$$\boxed{\Theta \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}.$$

Ако уврстимо Хуков закон следи:

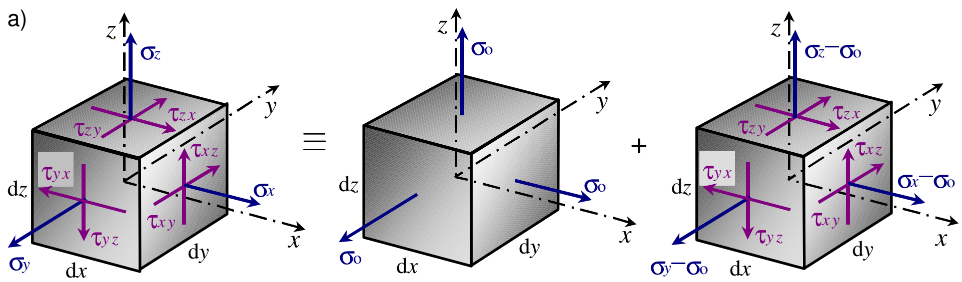
$$\boxed{\Theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_o = \frac{\sigma_o}{K}},$$

гдје су K – запремински модул еластичности и σ_o – средње нормално напрезање ("**хидростатички притисак**") дефинисани изразима:

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}},$$

$$\boxed{\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}}.$$

Сваки се тензор напрезања може раставити у два дела: **сферни део** и **девијаторски део**. Сферни део представља једнолико сабијање или једнолико растезање у свим смеровима и узрокује само дилатацију или **промену запремине**. То средње напрезање одговара хидростатичком притиску, па одатле и назив хидростатичка енергија деформисања. Девијаторски део узрокује само дисторзију или **промену облика**, слика 5.6.



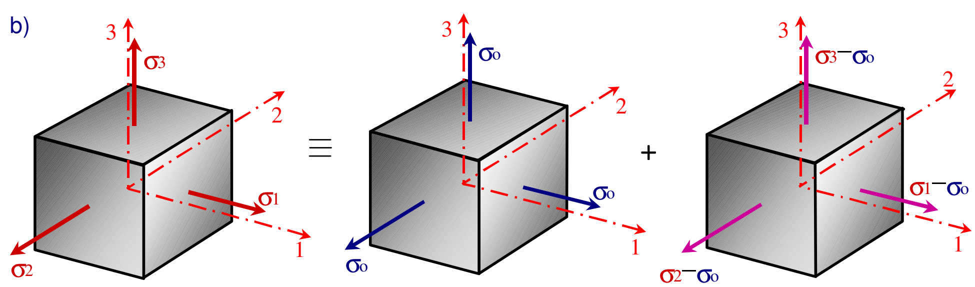
сферни део девијаторски део

Слика 5.6

У матричном запису тензор напрезања је:

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\left[\sigma_{ij}^{o}\right]+\left[s_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_o & 0 & 0\\ 0 & \sigma_o & 0\\ 0 & 0 & \sigma_o\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\sigma_x-\sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & (\sigma_y-\sigma_o) & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z-\sigma_o)\end{bmatrix}$$

или изражен с главним напрезањима, слика 5.7, у облику:



сферни део девијаторски део

Слика 5.7

$$\left[\sigma_{ij}\right]-\left[\sigma_{ij}^{o}\right]+\left[s_{ij}\right]-\begin{bmatrix}\sigma_o & 0 & 0\\ 0 & \sigma_o & 0\\ 0 & 0 & \sigma_o\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\sigma_1-\sigma_o) & 0 & 0\\ 0 & (\sigma_2-\sigma_o) & 0\\ 0 & 0 & (\sigma_3-\sigma_o)\end{bmatrix}$$

Израз за густину дилатацијске (хидростатичке) енергије деформисања

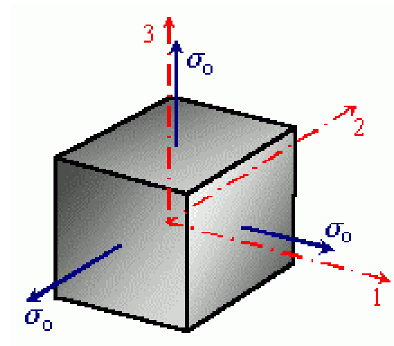
Ако уврстимо компоненте сферног тензора напрезања $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_o$,сл.5.8 густина дилатацијске (хидростатичке) енергије U_{oh} дата је изразом:

$$U_{oh}=\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_o^2=\frac{\sigma_o^2}{2K}$$

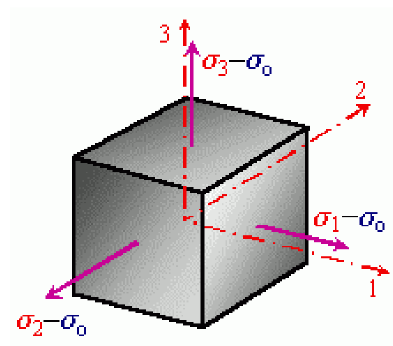
$$\boxed{U_{oh}=\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2}.$$

Израз за густину дисторзијске енергије деформисања

Густина дисторзијске енергије деформисања можемо добити тако да у израз за U_o уврстимо компоненте девијаторског тензора напрезања, сл.5.9, или тако да од укупне густине енергије деформисања одузмемо густину дилатацијске енергије:



Слика 5.8



Слика 5.9

$$\boxed{U_o = U_{oh} + U_{od}}$$

$$\boxed{U_{od} = U_o - U_{oh}}.$$

Следи израз за густину дисторзијске енергије деформисња:

$$U_{od} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]-\frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2,$$

који након срећивања има облик:

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right],$$

односно у облику:

$$\boxed{U_{od} = \frac{1}{3G}\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2\right)}.$$

Максимална тангенцијална напрезања код просторног стања напрезања у уоченој тачки тела су дата изразима:

$$\boxed{\tau_{12} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}, \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}.$$

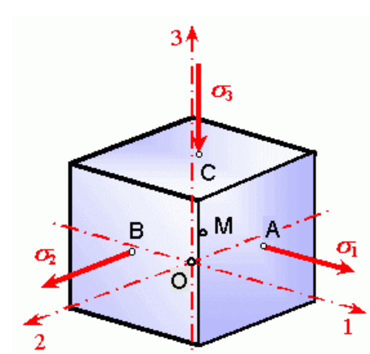
Питања:

1. Примена првог закона термодинамике на деформабилно тело.
2. Одређивање енергије деформисања тела за случај нормалне компоненте напрезања
3. Одређивање енергије деформисања тела за случај нормалне компоненте напрезања за случај тангенцијалне компоненте напрезања
4. Одређивање енергије деформисања тела општег случаја оптерећења
5. Објаснити приказивање тензора напрезањау два дела: **сферни део** и **девијаторски део**

6.

Задатак1 За просторно стање напрезања у тачки м тела задано на сл. з.1 треба одредити густину енергије деформисања и одговарајуће делове исте,(густину дилатацијске (хидростатичке) енергије деформисања, густину дисторзијске енергије деформисања). Познато је:

$\sigma_1 = 190\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 90\ \text{MPa}$, $\sigma_3 = -100\ \text{MPa}$, Пуасонов коефицијент $\nu = 0{,}32$, Јунгов модуо еластичности $E = 207\ \text{GPa}$, $\sigma_{dop} = 260\ \text{MPa}$.



Слика з.1

Питања

1. Како се дефинише укупни напон, нормални и тангенцијални напон у уоченој тачки тела?
2. Шта представљају Навијеове једначине?
3. Зашто су $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$
4. На који начин одређујемо напон за произвољну раван кроз уочену тачку О –Кошијеве једначине?
5. Дефинисати главне напоне, главне осе.
6. Шта представља и како се одређује Ламеов (Lame-ov) елипсоид напона?
7. Шта су то напонске инваријанте, дефинисати их, значај?
8. Како се дефинише уздужна деформација, и деформаиција клизања?
9. Показати да је $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$,
10. Показати да је $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$,
11. Дефинисати правце главних дилатација.
12. Шта представља $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$?
13. Написати тензор деформације $\boldsymbol{\varepsilon}$ у функцији уздужних и деформација клизања.
14. Како се зову коефицијенти C_{ik} и шта они предствљају, особине?
15. На основу хомогености и изотропности на колико се независних коефицијената своде C_{ik} .
16. Ламевои коефицијенти, веза са Јунговим модулом еластичности E, и Пуасоновим коефицијентом μ и модулом клизања G.
17. Написати уопштени Хуков закон у тензорској нотацији.
18. Поставка проблема задатка у теорији еластичности, односно могућност решавања истих.

Задаци:

1. Извести одговарајуће релације између E, μ, G
2. Извести напонске варијанте у функцији главних напона
   $I_{1Г} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, I_{2Г} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$
   $I_{3Г} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

LITERATURA

1.Thomas G. Mezger, The Rheology Handbook 2nd Edition by 2006, Vincentz Network, Hannover, Germany

2. Тензорски рачун, Т. Анђелић, Грађевинска књига,1959,Београд

3. Теорија еластичности, Д. Рашковић,Научна књига, Београд,1985.