Универзитет у Београду

Машински факултет

Биомеханика ткива и органа

Решени задаци - Први део

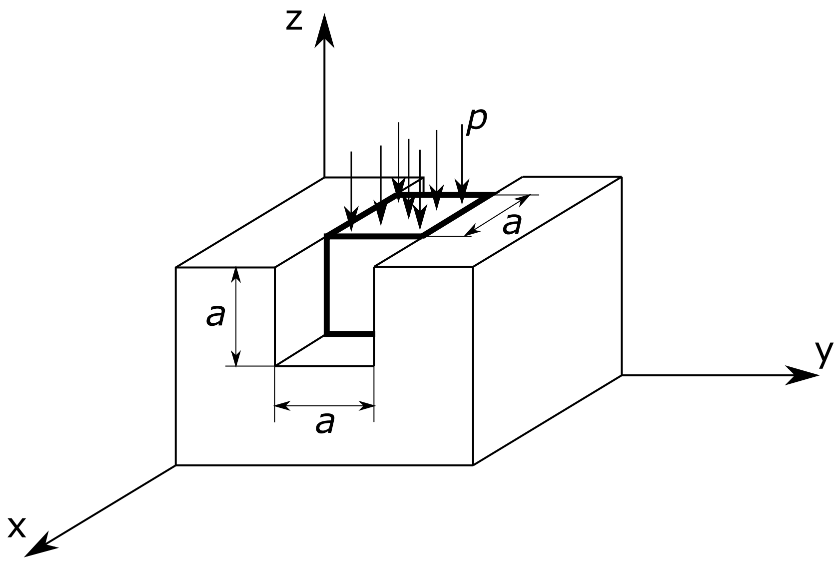
Београд, 2019. ℝ

Задатак 1 Челична коцка странице $a = 10\,\mathrm{cm}$, која се налази под притиском $p = 80\,\mathrm{MPa}$, постављена је у жљеб на начин приказан на Сл. 1. Уколико је познат модуо еластичности ($E = 200\,\mathrm{GPa}$) и Поасонов коефицијент ($\nu = 0,3$) челика, одредити:

а) главне напоне: σ_1, σ_2, σ_3

б) главне деформације, као и запреминску: ε_1, ε_2, ε_3 и ε_V

в) апсолутну деформацију страница коцке и промену њене запремине: Δa_x, Δa_y, Δa_z, ΔV.



Слика 1

Решење:

а) С обзиром на то да су странице коцке које су нормалне на x-осу слободне, главни напон у правцу x-осе је једнак нули:

$$\sigma_x = 0$$

Главни напон у правцу z-осе такође можемо директно одредити, јер у том правцу делује само притисак p. Пошто је смер z-осе супротан дејству притиска:

$$\sigma_z = -p = -80\,\mathrm{MPa}$$

Посматрана коцка је ограничена зидовима жљеба, нормалним на правац y-осе, тј. дефромација коцке у правцу те осе мора бити $\varepsilon_y = 0$. Ако се узме у обзир[1] да је:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

где је $\sigma_x = 0$, следи да је главни напон у правцу y-осе једнак:

$$\sigma_y = \nu\sigma_z = 0,3 \cdot (-80) = -24\,\mathrm{MPa}$$

У овом случају, главни напони су једнаки напонима дуж координатних оса - очигледно је да су то екстремне вредности напона:

$$\boxed{\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -24\,\mathrm{MPa}, \quad \sigma_3 = -80\,\mathrm{MPa}}$$

б) Деформација у правцу y-осе је већ директно одређена:

$$\varepsilon_y = 0$$

док се деформације у правцима x- и z-осе могу одредити на следећи начин:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = -\frac{0,3}{2 \cdot 10^5}(-24 - 80) = 1,56 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right) = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_y) = \frac{1}{2 \cdot 10^5}(-80 + 0,3 \cdot 24) = -3,64 \cdot 10^{-4}$$

У овом случају, главне деформације су једнаке деофрмацијама дуж координатних оса:

$$\boxed{\varepsilon_1 = 1,56 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -3,64 \cdot 10^{-4}}$$

Запреминска деформација коцке износи:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{1}$$

$$\boxed{\varepsilon_V = -2,08 \cdot 10^{-4}}$$

в) Према дефиницији, деформација је једнака релативној промени дужине:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta a_x}{a}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta a_y}{a}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta a_z}{a}$$

одакле следи:

$$\begin{aligned}
\Delta a_x &= \varepsilon_x \cdot a = 1,56 \cdot 10^{-4} \cdot 100\,\mathrm{mm} = 0,0156\,\mathrm{mm} \\
\Delta a_y &= \varepsilon_y \cdot a = 0 \\
\Delta a_z &= \varepsilon_z \cdot a = -3,64 \cdot 10^{-4} \cdot 100\,\mathrm{mm} = -0,0364\,\mathrm{mm}
\end{aligned}$$

[1] Погледати додатак: Деформације при сложеном напрезању

Дакле, коцка се издужила у правцу x-осе и скратила у правцу z-осе. С обзиром на то да је почетна запремина коцке $V = a^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3$, а да је:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}$$

апсолутна промена запремине коцке износи:

$$\Delta V = \varepsilon_V \cdot V = -2,08 \cdot 10^{-4} \cdot 1000\,\mathrm{cm}^3 = -0,208\,\mathrm{cm}^3$$

С обзиром на то да су нам познате промене дужина страница, можемо израчунати нову запремину тела, а затим и запреминску деформацију:

$$V_1 = 100,0156 \cdot 100 \cdot 99,9636 = 999791,9432\,\mathrm{mm}^3$$

$$\Delta V = 999791,9432 - 1000000 = -208,0568\,\mathrm{mm}^3$$

$$\varepsilon_V = \frac{-208,0568}{1000000} = -2,08 \cdot 10^{-4}$$

Дакле, деформације су довољно мале да израз (1) даје резултате са занемарљивом грешком (погледати додатак: Запреминска деформација).

Задатак 2 Одредити вектор напона у равни одређеној нормалом $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$, уколико је познат тензор[2] напона:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

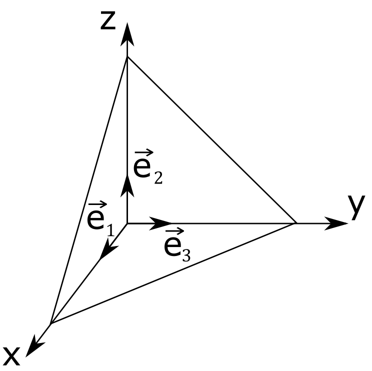
Решење:

$$\overrightarrow{\sigma_n} = \mathbf{T} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_n} = -4\vec{i} + \frac{10}{3}\vec{j}}$$

[2]Погледати додатак: О тензору напона

Задатак 3 Инфинитезимално мали тетраедар, приказан на Сл. 2, оптерећен је у складу са тензором напона $\mathbf{T}$. Израчунати вектор напона у равни одређеној нормалом $\vec{n} = \frac{2}{7}\overrightarrow{e_1} - \frac{3}{7}\overrightarrow{e_2} + \frac{6}{7}\overrightarrow{e_3}$.



$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ 63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix}$$

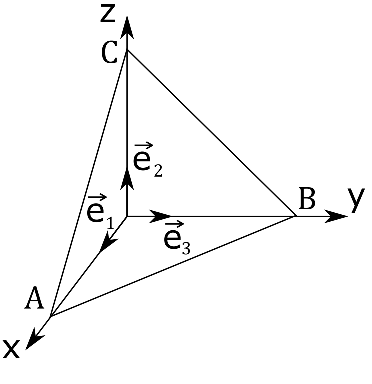
Слика 2

<u>Решење:</u>

$$\overrightarrow{\sigma_n} = \mathbf{T} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ 63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 & 90 & -42 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_n} = 69\overrightarrow{e_1} + 90\overrightarrow{e_2} - 43\overrightarrow{e_3}}$$

Задатак 4 Напонско стање инфинитезимално малог тетраедра, приказаног на Сл. 3, дато је тензором напона $\mathbf{T}$. Једно теме тетраедра налази се у координатном почетку, док су преостала три задата на следећи начин: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,2)$. Одредити вектор напона у равни у којој лежи страница ABC.



$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ 63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix}$$

Слика 3

<u>Решење:</u>

Нормалу на страницу ABC најлакше је одредити уз помоћ векторског производа вектора који се подударају са две њене ивице, нпр. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. С обзиром на то да се подразумева да те две ивице леже у равни странице ABC, резултат векторског производа биће нормалан на њу. Пошто је потребно да нормала буде јединични вектор, такође је потребно и поделити резултујући вектор са његовим интензитетом.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се могу пронаћи на следећи начин:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

где су α_1, β_1 и γ_1 углови под којима вектор $\overrightarrow{AB}$ лежи у односу на осе координатног истема:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$$

На исти начин долази се до вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$$

Множењем вектора $\overrightarrow{AB}$ са вектором $\overrightarrow{AC}$ (тим редом), добија се вектор у правца и смера спољашње нормале на посматрану површину:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$

$$\left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N}\right|} = \frac{2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}}{3}$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{e_3}$$

Сада можемо одредити вектор напона у задатој равни:

$$\overrightarrow{\sigma_n} = \mathbf{T} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ 63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 70 & 77 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_n} = -14\overrightarrow{e_1} + 70\overrightarrow{e_2} + 77\overrightarrow{e_3}}$$

Задатак 5 За дати тензор напона $\mathbf{T}$, одредити главне напоне и све три инваријанте напона [3].

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

<u>Решење:</u>

Главни напони су једнаки сопственим вредностим задатог тензора напона. Карактеристична једначина се налази из услова:

$$\det |\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 27\lambda^2 + 234\lambda - 648 = 0$$

Сопствене вредности тензора напона $\mathbf{T}$ су коренови карактеристичне једначине, до којих можемо доћи растављањем полинома на чиниоце, уз примену Безуовог става. Слободни члан 648 дељив је са ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8,... Први корен карактеристичне једначине биће она вредност која задовољава једначину:

$$1^3 - 27 \cdot 1^2 + 234 \cdot 1 - 648 \neq 0$$

$$(-1)^3 - 27 \cdot (-1)^2 + 234 \cdot (-1) - 648 \neq 0$$

$$2^3 - 27 \cdot 2^2 + 234 \cdot 2 - 648 \neq 0$$

[3] Погледати додатак: Сопствене вредности и сопствени вектори тензора. Инваријанте тензора.

$$(-2)^3 - 27 \cdot (-2)^2 + 234 \cdot (-2) - 648 \neq 0$$

$$\vdots$$

$$6^3 - 27 \cdot 6^2 + 234 \cdot 6 - 648 = 0$$

Дакле први корен карактеристичне једначине је 6. Сада можемо поделити једначину са полиномом $(\lambda - 6)$ и добити полином другог степена:

$$\begin{array}{lll}
(\lambda^3 & -27\lambda^2 + 234\lambda - 648) : (\lambda - 6) = \lambda^2 - 21\lambda + 108 \\
-\lambda^3 & \ \ +6\lambda^2 \\
& -21\lambda^2 + 234\lambda \\
& +21\lambda^2 - 126\lambda \\
& \qquad\ \ + 108\lambda - 648 \\
& \qquad\ \ - 108\lambda + 648
\end{array}$$

Сада је потребно решити добијену квадратну једначину:

$$\lambda_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 1 \cdot 108}}{2 \cdot 1} = \frac{21 \pm 3}{2} = 12 \ \vee \ 9$$

Уобичајено је да се сопствене вредности поређају од највеће до најмање:

$$\lambda_1 = 12, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = 6$$

А они су уједно и главни напони:

$$\boxed{\sigma_1 = 12\,\mathrm{MPa}, \quad \sigma_2 = 9\,\mathrm{MPa}, \quad \sigma_3 = 6\,\mathrm{MPa}}$$

Прва инваријанта тензора напона је:

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\mathbf{T} = 10 + 9 + 8 = 27\,\mathrm{MPa}$$

А такође се може израчунати и уз помоћ сопствених вредности:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 12 + 9 + 6 = 27\,\mathrm{MPa}$$

Друга инваријанта тензора напона је:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})^2 - \mathrm{tr}\left(\mathbf{T}^2\right)\right]$$

$$\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 38 & 4 \\ 38 & 89 & 34 \\ 4 & 34 & 68 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[27^2 - (104 + 89 + 68)\right] = 234\,\mathrm{MPa}$$

Она се може добити и сабирањем детерминанти минора:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 86 + 68 + 80 = 234\,\mathrm{MPa}$$

Трећа инваријанта тензора напона је:

$$I_3 = \det \mathbf{T} = 648\,\mathrm{MPa}$$

$$\boxed{I_1 = 27\,\mathrm{MPa}, \quad I_2 = 234\,\mathrm{MPa}, \quad I_3 = 648\,\mathrm{MPa}}$$

Задатак 6 Одредити сопствене вредности и сопствене векторе тензора напона (главне напоне и њихове правце), максимални смичући напон и раван у којој он делује, као и све инваријанте тензора напона:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

Карактеристична једначина добија се из услова:

$$\det |\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Пошто се у једном реду налазе две нуле, поступак тражења коренова карактеристичне једначине је олакшан:

$$(1-\lambda)\left[(3-\lambda)(3-\lambda) - 1\right] = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

Сопствене вредности тензора напона $\mathbf{T}$ су коренови карактеристичне једначине, поређани од највећег ка најмањем:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$$

А они су уједно и главни напони:

$$\boxed{\sigma_1 = 4\,\mathrm{MPa}, \quad \sigma_2 = 2\,\mathrm{MPa}, \quad \sigma_3 = 1\,\mathrm{MPa}}$$

Сопствени вектори који представљају правце простирања главних напона могу се одредити на следећи начин:

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = 0$$

Овом матричном систему еквивалентан је систем једначина:

$$\begin{aligned} (3-\lambda)\cos\alpha - \cos\beta = 0 \\ -\cos\alpha + (3-\lambda)\cos\beta = 0 \\ (1-\lambda)\cos\gamma = 0 \end{aligned}$$

Решавањем овог система долази се до вредности углова под којима нормала $\vec{n}$ лежи у односу на осе координатног система. За прву сопствену вредност $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{aligned} (3-4)\cos\alpha - \cos\beta =& 0 \\ -\cos\alpha + (3-4)\cos\beta =& 0 \\ (1-4)\cos\gamma =& 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} -\cos\alpha - \cos\beta = 0 \\ -\cos\alpha - \cos\beta = 0 \\ -3\cos\gamma = 0 \end{aligned}$$

Одакле следи:

$$\cos\alpha = -\cos\beta, \quad \cos\gamma = 0$$

Прве две једначине система су исте, дакле, постоји бесконачно много решења тог подсистема (две исте праве имају бесконачно заједничких тачака). Као додатни услов за решавање узима се чињеница да је вектор нормале јединични вектор:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 0 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{n_1} = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\}}$$

Аналогно за $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{aligned} (3-2)\cos\alpha - \cos\beta =& 0 \\ -\cos\alpha + (3-2)\cos\beta =& 0 \\ (1-2)\cos\gamma =& 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \cos\alpha - \cos\beta = 0 \\ -\cos\alpha + \cos\beta = 0 \\ -\cos\gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta, \quad \cos\gamma = 0$$

$$\boxed{\overrightarrow{n_2} = \left\{ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\}}$$

А за $\lambda_3 = 1$ добија се:

$$\begin{aligned} (3-1)\cos\alpha - \cos\beta =& 0 \\ -\cos\alpha + (3-1)\cos\beta =& 0 \\ (1-1)\cos\gamma =& 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 2\cos\alpha - \cos\beta = 0 \\ -\cos\alpha + 2\cos\beta = 0 \\ 0\cos\gamma = 0 \end{aligned}$$

У овом случају прве две једначине система имају јединствено решење - праве које су одређене овим једначинама секу се у нули (то је једино решење које задовољава тај подсистем). Међутим, постоји бесконачно много решења треће једначине.

$$\cos\alpha = \cos\beta = 0, \quad 0\cos\gamma = 0$$

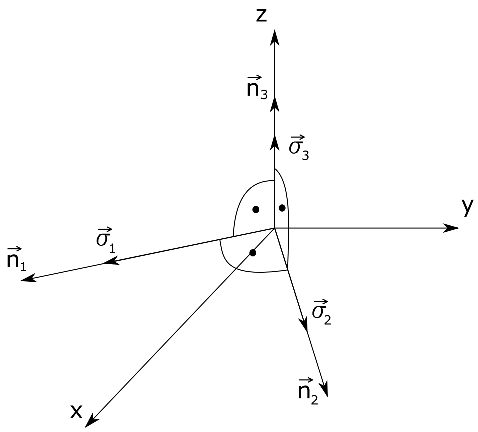
Додатни услов је такође:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

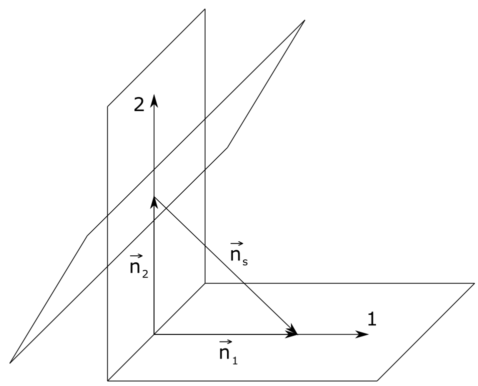
$$(\cos\gamma)^2 = 1 \Rightarrow \cos\gamma = \pm 1$$

$$\boxed{\overrightarrow{n_3} = \{0, 0, \pm 1\}}$$

Једно од могућих решења приказано је на Сл. 4. Максимални сми-



Слика 4



Слика 5

чући напон је:

$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}\left(\lambda_{max} - \lambda_{min}\right) = \pm\frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \lambda_3\right) = \pm\frac{3}{2}\,\mathrm{MPa}$$

а раван у којој он лежи налази се под углом од 45° у односу на главне равни 1 и 3. Нормала која одређеује раван максималног смичућег напона може се одредити одузимањем нормала главних равни (Сл. 5):

$$\overrightarrow{n_s} = \overrightarrow{n_1} - \overrightarrow{n_3} = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp 1\right\}$$

Инваријанте тензора напона су:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 4 + 2 + 1 = 7\,\mathrm{MPa}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 3 = 14\,\mathrm{MPa}$$

$$I_3 = \det \mathbf{T} = 8\,\mathrm{MPa}$$

$$\boxed{I_1 = 7\,\mathrm{MPa}, \quad I_2 = 14\,\mathrm{MPa}, \quad I_3 = 8\,\mathrm{MPa}}$$

Задатак 7 Одредити сопствене вредности и сопствене векторе тензора напона:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\ [\mathrm{MPa}]$$

Карактеристична једначина добија се из услова:

$$\det|\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - 1\left(-\lambda - 1\right) + 1\left(1 + \lambda\right) = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

тј.

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

Слободан члан 2 је дељив са ± 1 и ± 2. За $\lambda = -1$ једначина је задовољена, тако да је то прва тражена сопствена вредност. Сада се дељењем карактеристичне једначина са полиномом $\lambda + 1$ долази до:

$$\begin{array}{lll}
(\lambda^3 & & -3\lambda - 2) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 2 \\
-\lambda^3 & -\lambda^2 & \\
 & -\lambda^2 - 3\lambda & \\
 & +\lambda^2 + \lambda & \\
 & \quad -2\lambda - 2 & \\
 & \quad +2\lambda + 2 &
\end{array}$$

Сада је потребно решити добијену квадратну једначину:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \vee 2$$

Сопствене вредности, поређане од највеће до најмање, су:

$$\lambda_1 = 2\,\mathrm{MPa}, \quad \lambda_{2,3} = -1\,\mathrm{MPa}$$

Правац првог сопственог вектора добија се из система једначина за прву сопствену вредност $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned}
-2\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= 0 \\
\cos\alpha - 2\cos\beta + \cos\gamma &= 0 \\
\cos\alpha + \cos\beta - 2\cos\gamma &= 0
\end{aligned}$$

Детерминанта овог система линеарних једначина једнака је нули:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Дакле, систем има бесконачно много решења:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$$

Која се могу одредити из додатног услова:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Први сопствени вектор је:

$$\boxed{\overrightarrow{n_1} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}}$$

За други сопствени вектор систем једначина је:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =& 0\\
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =& 0\\
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =& 0
\end{aligned}$$

Тј. добија се само једна једначина са три непозната угла. С обзиром на то да постоји и један додатни услов, једно решење можемо предпоставити:

$$\cos\beta = 0$$

тако да следи:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha$$

и из додатног услова се добија:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\gamma = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Дакле, други сопствени врекtор је:

$$\boxed{\overrightarrow{n_2} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{1,0,-1\}}$$

С обзиром на то да је трећа сопствена вредност иста као и друга, такође се добија једна једначина са три непознате величине. Углови се морају одабрати тако да други и трећи сопствени вектор буду линеарно независни и ортогонални, као и да трећи сопствени вектор буде јединични. Да би вектори били ортогонални, њихов скаларни производ мора бити једнак нули:

$$\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{n_3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\gamma = 0$$

Дакле:

$$\cos\alpha = \cos\gamma$$

Тј:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = -2\cos\alpha$$

Када се узме у обзир додатни услов:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

$$2\left(\cos\alpha\right)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$$

$$2\left(\cos\alpha\right)^2 + (-2\cos\alpha)^2 = 1$$

Коначно, тражене вредности су:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = \cos\gamma$$

$$\cos\beta = -2\cos\alpha = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}$$

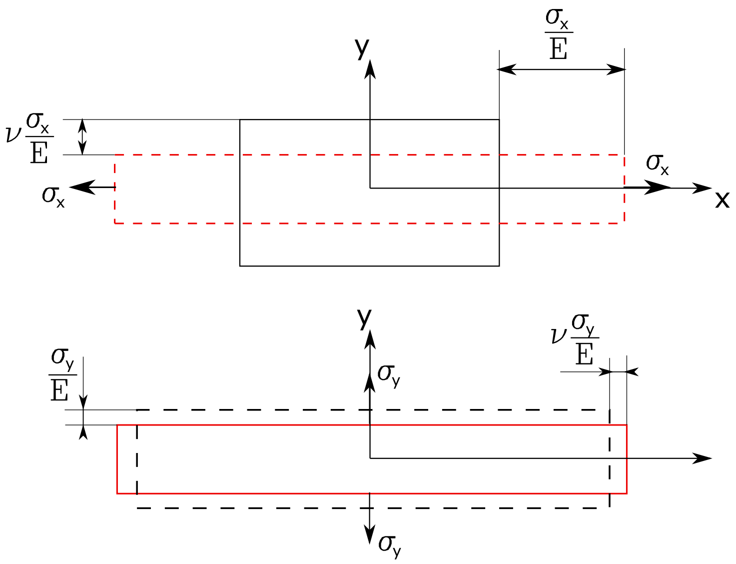
Трећи сопствени вектор је:

$$\boxed{\overrightarrow{n_3} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right\} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{1, -2, 1\right\}}$$

Додатак

Деформације при сложеном напрезању

Из искуства нам је познато да, уколико се тело дуж једног правца издужи, услед тога ће се у другом правцу и сабити.



Слика 6: Узастопно напрезање дуж x и y осе.

У случају тродимензионалног проблема, укупна деформација дуж x-осе је:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

где члан $\frac{\sigma_x}{E}$ представља деформацију услед напрезања у правцу те осе, која је умањена за удео друге две деформације, а тај удео одговара Поасоновом коефицијенту ν.

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]$$

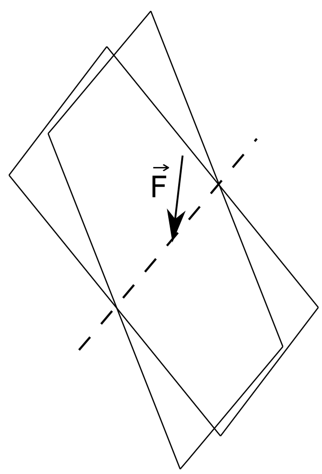
Запреминска деформација

Разматрамо запреминску деформацију квадра страница a, b и c:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(a+\Delta a)\cdot(b+\Delta b)\cdot(c+\Delta c)-(a\cdot b\cdot c)}{a\cdot b\cdot c}\\
&= (1+\varepsilon_a)\cdot(1+\varepsilon_b)\cdot(1+\varepsilon_c)-1\\
&= (1+\varepsilon_b+\varepsilon_a+\varepsilon_a\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c)-1\\
&= 1+\varepsilon_c+\varepsilon_b+\varepsilon_b\varepsilon_c+\varepsilon_a+\varepsilon_a\varepsilon_c+\varepsilon_a\varepsilon_b+\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c-1\\
&= \varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c
\end{aligned}$$

где се величине $\varepsilon_b\varepsilon_c$, $\varepsilon_a\varepsilon_c$, $\varepsilon_a\varepsilon_b$ и $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c$ могу занемарити само у случају веома малих деформација (њихови производи су тада још мање величине). Што је деформација већа, то добијени израз даје резултате са већом грешком!

О тензору напона



Слика 7

У прорачунима напрезања најчешће се сусрећемо са вектором напона. Векторска величина садржи информације о правцу, смеру и интензитету неког дејства. С обзиром на то да је напон мера оптерећења која представља однос силе и површине на коју та сила делује, можемо закључити да се у оквиру појма напона јављају два правца - правац дејства силе и правац у коме се протеже površ коју посматрамо. Дакле, вектор напона је напонско стање само у једној одабраној равни!

Услед тога се уводи појам тензора, величине вишег реда од вектора. Наиме, за разлику од вектора који има три компоненте у тродимензионалном простору, тензор их има девет. На тај начин је могуће представити све информације о стању напона у некој тачки у простору, тј. дејство све три пројекције силе на три нормалне равни у простору.

Уколико је познат тензор напона, вектор напона у жељеној равни може се израчунати множењем[4] његовог тензора са нормалом те равни:

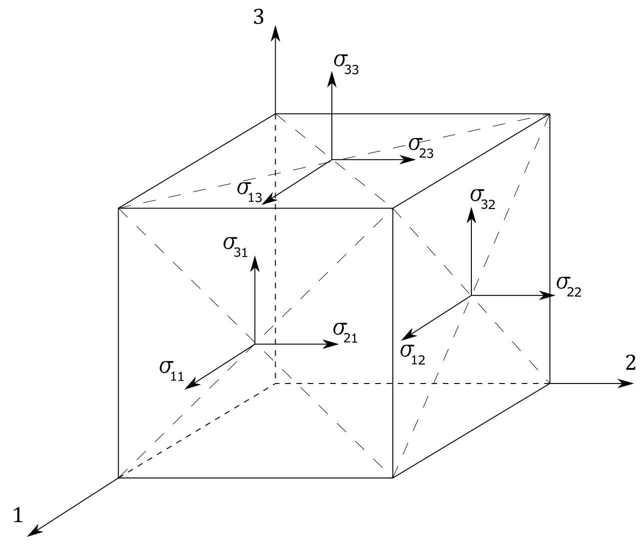
$$\overrightarrow{\sigma_n} = \mathbf{T} \cdot \vec{n}$$

Кошијев тензор напона

Кошијев тензор напона је дефинисан на следећи начин:

$$[\mathbf{T}] = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

где, по конвенцији, први индекс (i) показује правац дејства компоненте тензора напона (тј. правац дејства вектора напона), а други индекс (j) показује нормалу на раван у којој дејсвује тај вектор напона (Сл. 8). Нпр. вектор напона σ_{21} делује у равни на коју је нормална оса 1, а у смеру осе 2.



Слика 8

[4]Резултат множења тензора и вектора је вектор.

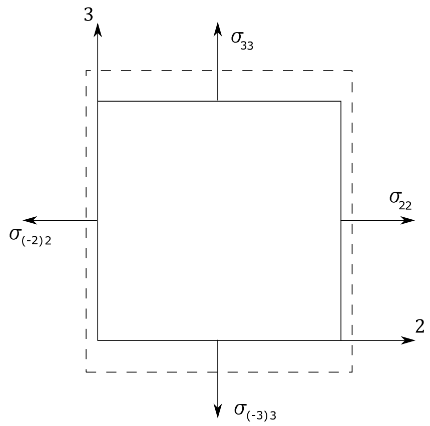
Може се показати да важи:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

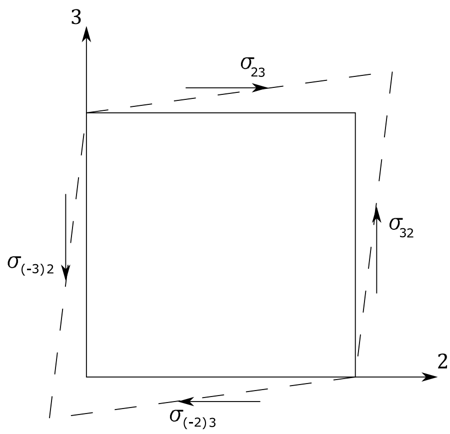
Дакле, тензор напона је симетричан.

Такође, на Сл. 8 се може приметити да су компоненте тензора напона које се налазе на дијагонали матрице заправо нормални напони, док су преостале компоненте напони смицања.

Може се показати да силе које проузрокују норалне напоне доводе до промене облика и запремине тела на које делују (Сл. 9), док силе које изазивају смичуће напоне доводе само до промене облика тела (Сл. 10).



Слика 9: Нормални напони



Слика 10: Смичући напони

Хуков закон

Хуков закон представља један од конститутивних модела понашања материјала, који претпоставља линеарну везу између напона и деформација. Овај конститутивни модел важи за еластично деформисање материјала који се често срећу у инжењерској пракси, као што је челик. Уколико се ради о једноосном напрезању:

$$\sigma = E\varepsilon$$

где је E модуо еластичности матријала.
Међутим, за случајеве сложеног напрезања при којима се јављају и нормални и смичући напони, важи проширени Хуков закон. За координатни

систем (1,2,3), у матричном облику:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56}\\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}$$

где матрица крутости представља везу између вектор колона. Може се приметити да коефицијенти:

- C_{11}, C_{22} и C_{33} представљају везу између нормалног напона и одговарајуће линијске деформације,
- C_{44}, C_{55} и C_{66} представљају везу између смичућег напона и одговарајућег угла клизања,
- C_{12}, C_{13} и C_{23} представљају спрегу линијских деформација у различитим правцима,
- C_{45}, C_{46} и C_{56} представљају спрегу углова клизања у различитим равнима,
- C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{25}, C_{26} и C_{36} представљају везу између нормалних напона и углова клизања.

С обзиром на то да је матрица крутости симетрична, исто важи и за елементе испод њене главне дијагонале:

$$C_{ij}=C_{ji}$$

Уколико се потражи зависност деформација од напона, везу представља матрица еластичности:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36}\\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46}\\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56}\\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}$$

Сопствене вредности и сопствени вектори тензора. Инваријанте тензора.

Над векторима се често врше линеарне трансформације, чији резултат је неки нови вектор. Међутим, врло су интересантни они вектори којима се након линеарне трансформације мења само интензитет, а правац и смер остају исти. Такви вектори се називају сопствени вектори, а њихов интензитет након трансформације се добија када се првобитни интензитет помножи са сопственом вредношћу λ.

Конкретан пример је множење тензора и вектора, чиме се као резултат добија вектор. Ако је у питању тензор напона, можемо предпоставити да у тродимензионалном простору постоје 3 међусобно управне равни у којима постоје само нормалне компоненте напона. Дакле, пошто нема смичућих компоненти, целокупно напрезање представљено је само нормалним напонима - они у тим равнима имају екстремне вредности. Самим тим, можемо пронаћи јединичне векторе нормала на те равни $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, који множењем са тензором напона $\mathbf{T}$ као резултат дају векторе другачијег интензитета - векторе нормалних напона у тим равнима, тј. главне напоне $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

$$\mathbf{T}\vec{n} = \lambda\vec{n}$$

Што се може написати и на следећи начин:

$$\mathbf{T}\vec{n} = \lambda\mathbf{I}\vec{n}$$

Одакле следи:

$$\mathbf{T}\vec{n} - \lambda\mathbf{I}\vec{n} = 0$$

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\,\vec{n} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

Чиме је добијен матрични систем линеарних једначина. Да би овај хомогени систем имао нетривијално решење $\vec{n} \neq 0$, детерминанта матрице мора бити једнака нули:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Развојем ове детерминанте долази се до карактеристичне једначине чији коренови представљају сопствене вредности λ. У овом случају то је кубна једначина:

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda - c = 0 \tag{3}$$

Уобичајено је да се сопствене вредности записују у опадајућем поретку:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

Матрична једначина (2) може се развити у класични систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned}
(\sigma_{11} - \lambda)\cos\alpha + \sigma_{12}\cos\beta + \sigma_{13}\cos\gamma = 0\\
\sigma_{21}\cos\alpha + (\sigma_{22} - \lambda)\cos\beta + \sigma_{23}\cos\gamma = 0\\
\sigma_{31}\cos\alpha + \sigma_{32}\cos\beta + (\sigma_{33} - \lambda)\cos\gamma = 0
\end{aligned}$$

Решавањем система за сваку од сопствених вредности, долази се до углова којима су одређени правац и смер јединичних нормалних вектора $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3})$ којима су одређене равни главних напона. Коначно, главни напони су:

$$\overrightarrow{\sigma_1} = \lambda_1\overrightarrow{n_1}, \quad \overrightarrow{\sigma_2} = \lambda_2\overrightarrow{n_2}, \quad \overrightarrow{\sigma_3} = \lambda_3\overrightarrow{n_3}$$

Може се показати да се равни у којима се налазе екстремне вредности напона смицања налазе под углом од 45° у односу на главне равни, а одговарајући напони су:

$$\tau_1 = \pm\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\tau_2 = \pm\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3)$$

$$\tau_3 = \pm\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_3)$$

Максимална вредност одговара напону за који важи:

$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}(\lambda_{max} - \lambda_{min})$$

Још једна интересатна чињеница је да су коефицијенти a, b и c карактеристичне једначине (3) једнаки инваријантама тензора напона I_1, I_2 и I_3, редоследно:

$$I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{T} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{T})^2 - \operatorname{tr}\left(\mathbf{T}^2\right)\right]$$

$$I_3 = \det \mathbf{T}$$

Прва инваријанта је једнака збиру нормалних напона у било које три ортогоналне равни, тако да важи и:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Док се друга инваријанта може наћи и сабирањем детерминанти минора тензора напона:

$$\begin{aligned} I_2 =& \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ =& \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{21}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 - \sigma_{32}^2 \right] \end{aligned}$$