4 Тејлоров полином

4.1 Тејлоров и Маклоренов полином

Нека је f диференцијабилна функција у некој околини тачке a. Тада је *једначина тангенте*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

заправо *линеарна апроксимација* функције f у околини тачке a.

Ако означимо

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

тада је

$$f(a) = T_1(a),\ f'(a) = T_1'(a) \text{ и } f(x) \approx T_1(x) \text{ за } x \text{ из околине тачке } a.$$

Полином $T_1(x)$ је *Тејлоров полином* првог степена за функцију f у околини тачке a.

Слично, можемо пожелити да два пута диференцијабилну функцију f у околини тачке a апроксимирамо квадратним полиномом $T_2(x)$ тако да важи

$$f(a) = T_2(a),\ f'(a) = T_2'(a) \text{ и } f''(a) = T_2''(a).$$

Тада је

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Тејлоров полином другог степена за функцију f у околини тачке a.

Дефиниција 4.1. Нека је функција $f(x)$ дефинисана на интервалу који садржи тачку a у унутрашњости и n пута диференцијабилна у тачки a.

Тејлоров полином реда n за функцију f у околини тачке a је полином

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ако је $a = 0$, полином T_n називамо *Маклореновим полиномом.*

Пример 4.1. Наћи Маклоренов полином степена $n \in \mathbb{N}$ за функцију $f(x) = e^x$.

Тражени полином је облика

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Како је $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ и $f(0) = 1$, добијамо

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

У горњој формули смо користили да је $0! = 1$ и $f^{(0)} = f$.

Пример 4.2. Наћи Тејлоров полином степена 3 за функцију $f(x) = x^3$ у околини тачке $a = 2$.

Овде је $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ (приметимо да су сви изводи реда већег од 3 једнаки нули, па је $f(x) \equiv T_3(x)$). Дакле, $f(2) = 8$, $f'(2) = f''(2) = 12$, $f'''(2) = 6$ и заменом у формули

$$T_3(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

добијамо

$$T_3(x) = 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

4.2 Маклоренови развоји неких основних функција

Маклоренови развоји су Маклоренови полиноми произвољног степена, тј. степени редови. За функцију f која има све изводе у тачки a тај развој је облика

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Пример 4.3. Наћи Маклоренов развој функције $f(x) = e^x$.

На основу примера 4.1 Маклореновог полинома степена n, видимо да је тражени (бесконачни) развој

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Пример 4.4. Наћи Маклоренов развој функције $f(x) = \sin x$.

Овде је $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, па је $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$. Примећујемо да је $f^{(4k)} = f$, $f^{(4k+1)} = f'$, $f^{(4k+2)} = f''$ и $f^{(4k+3)} = f'''$ за $k \in \mathbb{N}$. Дакле,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Слично се добијају и следећи Маклоренови развоји:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^a \approx 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \binom{a}{3} x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Пример 4.5. Апроксимирати функцију $\ln(1 + x - x^2)$ Маклореновим полиномом четвртог степена.

Користимо познати развој $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$ кад $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
\ln(1 + x - x^2) &= x - x^2 - \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3} - \frac{(x-x^2)^4}{4} + o\left((x-x^2)^4\right) \\
&= x - x^2 - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - 3x^4\right) - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
&= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

4.3 Процена грешке

При апроксимацији n пута непрекидно диференцијабилне функције f Тејлоровим полиномом степена n у околини тачке a:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

јавља се грешка R_n, при чему важи $R_n = o(x^n)$.

Следеће опште тврђење је доказао Лагранж, а у доказу се користи Ролова теорема.

Теорема 4.1. Нека је функција f $n+1$ пута диференцијабилна у интервалу који садржи тачке a и b и нека је $T_n(x)$ њен Тејлоров полином степена n у околини тачке a. Тада за грешку $R_n(x)$ важи

$$R_n(b) = f(b) - T_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

где је c нека (непозната) тачка између a и b.

Доказ. Очекујемо да $R_n(b)$ буде реда величине следећег члана у Тејлоровом развоју, тј. $O((b-a)^{n+1})$. Дакле, нека је $R_n(b) = k \cdot (b-a)^{n+1}$ за неки реалан број k.

Посматрајмо функцију

$$g(x) = f(x) - T_n(x) - k(x-a)^{n+1}.$$

Подсетимо се да за полином T_n важи $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ за $k = 0, 1, \ldots, n$, што значи да је

$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad g(b) = 0.$$

Сада користимо Ролову теорему.

Како је $g(a) = g(b) = 0$, постоји тачка $x_1 \in (a, b)$ таква да је $g'(x_1) = 0$.

Како је $g'(a) = g'(x_1) = 0$, постоји тачка $x_2 \in (a, x_1)$ таква да је $g''(x_2) = 0$.

$\ldots$

Како је $g^{(n)}(a)$=$g^{(n)}(x_n)$=0, постоји тачка $x_{n+1} \in (a, x_n)$ таква да је $g^{(n+1)}(x_{n+1})$=0.

Означимо $c = x_{n+1}$. Јасно је да је $a < x_{n+1} < b$. Како је $T_n^{(n+1)}(x) = 0$ (извод реда $n+1$ полинома степена n је нула), имамо

$$g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - k \cdot (n+1)!,$$

одакле је $k = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. Према томе, $R_n(b) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}$. □

Пример 4.6. Проценити грешку апроксимације функције $f(x) = \cos x$ Маклореновим полиномо другог степена за $x = 0,6$.

Одговарајући Маклоренов полином је $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, а грешка је облика

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!} x^3, \quad \text{за неко } c \text{ између } 0 \text{ и } 0,6.$$

Сада проценимо апсолутну вредност грешке за $x = 0,6$:

$$|R_2(0,6)| = \frac{|\sin c|}{3!} 0,6^3 \leqslant \frac{0,6^3}{6} = 0,036.$$

4.4 Испитивање асимптотике функције

Важна примена Тејлоровог полинома је у одређивању асимптотике функције. Размотримо следеће примере.

Пример 4.7. Израчунати граничне вредности

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln(1 + 1/x)\right), \quad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^4 x}{x \sin 3x}, \quad \text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$$

а) Ако искористимо Маклоренов развој за функцију $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ кад $t \to 0$ (мало „о" од $f(t)$ је функција за коју важи $o(f(t))/f(t) \to 0$ кад $t \to 0$ тј. $o(f(t))$ је занемарљиво мала у поређењу са $f(t)$) имамо

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) = \lim_{x\to\infty} \left(x - x + \frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

Алтернативно, задатак се може решити применом Лопиталовог правила. Ако уведемо смену $x = 1/t, t \to 0$, дати лимес се своди на

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right) = \lim_{t\to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \underset{(0/0)}{\overset{\text{л.п.}}{=\!=}} \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

б) Користимо Маклоренове развоје $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ и $\sin t = t + o(t^2)$ кад $t \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^4 x}{x \sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}{x \sin 3x} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(3x + o(x^2))} = \frac{2}{3}.$$

в) Користимо Маклоренове развоје $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ и $\ln(1+t) = t + o(t)$ кад $t \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = -\frac{1}{6}.$$

Пример 4.8. Наћи домен и асимптоте функције $\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}} + x - 1$.

Домен ове функције је $\frac{x^3}{x+1} \geqslant 0$, тј. $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$. Права $x = -1$ је вертикална асимптота, јер је

$$\lim_{x\to -1-} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 = \infty.$$

Да бисмо одредили понашање функције кад $x \to \pm\infty$, можемо користити Маклоренов полином функције $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ кад $t \to 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}+x-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\left(1-\frac{1}{2(x+1)}+o\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)+x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2x-\frac{3}{2}+o(1)\right),$$

па је права $y=2x-\frac{3}{2}$ коса асимптота кад $x\to\infty$. Слично,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}+x-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(1-\frac{1}{2(x+1)}+o\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)+x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right),$$

па је права $y=-\frac{1}{2}$ хоризонтална асимптота кад $x\to-\infty$.

4.5 Задаци

1. Апроксимирати функцију
$$y=(x^2-1)e^{-2x}$$
Маклореновим полиномом четвртог степена и проценити грешку апроксимације на интервалу $[0,1]$.

   Првих пет извода су $y'(x)=-2e^{-2x}(x^2-x-1)$, $y''(x)=2e^{-2x}(2x^2-4x-1)$, $y'''(x)=-4e^{-2x}(2x^2-6x+1)$, $y^{(4)}(x)=16e^{-2x}(x^2-4x+2)$ и $y^{(5)}(x)=-32e^{-2x}(x^2-5x+4)$. Даље је $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=-4$ и $y^{(4)}(0)=32$, па је Маклоренов полином четвртог степена
$$T_4(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^4(0)}{4!}x^4,\quad \text{тј.}\quad T_4(x)=-1+2x-x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^4.$$
Грешка апроксимације је
$$R_4(x)=\frac{y^{(5)}(t)}{5!}x^5,\quad \text{за}\quad t\in(0,x),\quad \text{при чему је}\quad x\in[0,1].$$
За оцену грешке, нађимо максимум функције $|y^{(5)}(t)|$ за $t\in(0,1)$ и узимамо да је x=1:
$$\max_{t\in(0,1)}|-32e^{-2t}(t^2-5t+4)|<32e^0\cdot 4=128,\quad \text{па је}\quad |R_4(1)|<\frac{16}{15}\quad\text{за}\quad x\in[0,1].$$

2. Апроксимирати функцију
$$y=\sqrt[5]{2x-1}$$
Тејлоровим полиномом степена 3 у околини тачке $a=1$. Користећи овај полином приближно израчунати $\sqrt[5]{1,2}$ и проценити грешку.

   Прва четири извода су $y'(x)=\frac{2}{5}(2x-1)^{-4/5}$, $y''(x)-\frac{16}{25}(2x-1)^{-9/5}$, $y'''(x)=\frac{288}{125}(2x-1)^{-14/5}$ и $y^{(4)}(x)=-8064/625(2x-1)^{-19/5}$. Тејлоров полином трећег степена у тачки $a=1$ је
$$T_3(x)=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3,\quad \text{тј.}$$
$$T_3(x)=1+\frac{2}{5}(x-1)-\frac{8}{25}(x-1)^2+\frac{48}{125}(x-1)^3.$$
Даље је $y(1,1)\approx T_3(1,1)=1,037184$. За $1<t<1,1$ је $(2t-1)^{-19/5}<1$, па је
$$|R_3(1,1)|<\frac{1}{4!}\frac{8064}{625}\cdot 0,1^4\approx 5,4\cdot 10^{-5}.$$

3. Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију $y=y(x)$ дату једначином $x+y=\operatorname{arctg}(xy)$.

   Прво приметимо да је $y=0$ за $x=0$. Диференцирањем дате једначине (по x) добијамо
$$1+y'=\frac{y+xy'}{1+(xy)^2},$$
одакле за $x=y=0$ добијамо $y'(0)=-1$. Даљим диференцирањем добијамо
$$y''=\frac{(y'+y'+xy'')(1+(xy)^2)-(y+xy')2xy(y+xy')}{(1+(xy)^2)^2},$$
одакле за $x=y=0$ и $y'(0)=-1$ добијамо $y''(0)=-2$. Тражени Маклоренов полином је $T_2(x)=-x-x^2$.