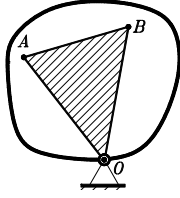


Sferno kretanje tela (Obrtanje tela oko nepokretne tačke)

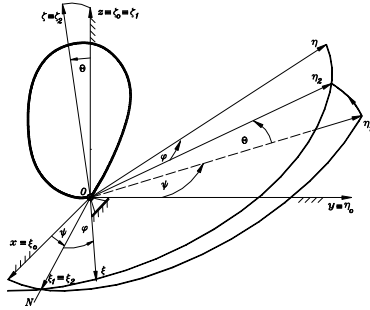
Sferno kretanje tela ili obrtanje tela oko nepokretne tačke je takvo kretanje tela koje ima jednu nepokretnu tačku. Položaj tela u prostoru može biti jednoznačno određen položajem triju njegovih tačaka koje ne pripadaju istoj pravoj. Kada je u pitanju telo koje vrši sferno kretanje, treba zapaziti da



su od šest koordinata tačaka A i B nezavisne samo tri zbog postojanja tri relacije koje se mogu uspostaviti između koordinata tih tačaka, a koje govore o nepromenljivosti dužina \overline{OA} , \overline{OB} i \overline{AB} . Dakle, telo koje vrši sferno kretanje ima 6-3 nezavisnih koordinata, tj. tri stepena slobode kretanja. Jedan od postupaka za analizu sfernog kretanja tela je Ojlerov postupak.

Ojlerov postupak podrazumeva korišćenje dva Dekartova pravouglav koordinatna sistema: $Oxyz$ – nepokretan i $O\xi\eta\zeta$ – pokretan sistem, kruto vezan za posmatrano telo. Kretanje tela tada je u potpunosti opisano kretanjem

pokretnog u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Neka se u početnom trenutku oba koordinatna sistema poklapaju ($Ox \equiv O\xi_o$, $Oy \equiv O\eta_o$ i $Oz \equiv O\zeta_o$).



Polazeći od tog početnog položaja, do proizvoljnog položaja pokretnog koordinatnog sistema dolazi se ako se izvrše tri nezavisna obrtanja.

- 1) Prvo se izvrši obrtanje koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ oko ose $Oz \equiv O\zeta_o$ za ugao ψ - ugao precesije. Na taj način, pokretni koordinatni sistem iz položaja $O\xi_o\eta_o\zeta_o$ prelazi u položaj $O\xi_1\eta_1\zeta_1$.
- 2) Sledeće obrtanje koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ vrši se oko ose $O\xi_1 \equiv O\xi_2 \equiv ON$, kao nepokretne, za ugao θ - ugao nutacije. Na taj način, pokretni koordinatni

sistem prelazi u položaj $O\xi_2\eta_2\zeta_2$. Osa ON oko koje je izvršena ova rotacija naziva se čvorna osa.

- 3) Poslednje obrtanje vrši se oko ose $O\zeta_2 \equiv O\zeta$ za ugao φ - ugao sopstvene rotacije.

Na taj način dobija se proizvoljni položaj pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$. Smatraće se da su Ojlerovi uglovi pozitivni ako se uočena obrtanja posmatrana sa pozitivnih krajeva osa Oz , ON i $O\zeta$ vide kao matematički pozitivna. U toku obrtanja tela oko nepokretne tačke menjaju se Ojlerovi uglovi ψ , θ i φ . Jednačine

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

nazivaju se konačne jednačine sfernog kretanja tela.

Brzina tačke tela pri sfernom kretanju. Vektor trenutne ugaone brzine. Jednačina trenutne ose obrtanja

Vektor brzine \vec{V} tačke M tela koje vrši sferno kretanje može se odrediti korišćenjem vektora položaja \vec{r} uočene tačke, koji je izražen preko komponentata paralelnih jediničnim vektorima $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, tj.

$$\vec{r} = \xi \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu} + \zeta \vec{\nu},$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{\xi} \vec{\lambda} + \eta \dot{\vec{\mu}} + \zeta \dot{\vec{\nu}}.$$

Osim toga, vektor brzine \vec{V} tačke M tela može se izraziti i u obliku

$$\vec{V} = V_\xi \vec{\lambda} + V_\eta \vec{\mu} + V_\zeta \vec{\nu},$$

$$\vec{V} = (\vec{V} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda} + (\vec{V} \cdot \vec{\mu}) \vec{\mu} + (\vec{V} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu},$$

$$\begin{aligned} \vec{V} = & (\dot{\xi} \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} + \eta \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\lambda} + \zeta \dot{\vec{\nu}} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda} + \\ & + (\dot{\xi} \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \eta \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mu} + \zeta \dot{\vec{\nu}} \cdot \vec{\mu}) \vec{\mu} + \\ & + (\dot{\xi} \vec{\lambda} \cdot \vec{\nu} + \eta \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\nu} + \zeta \dot{\vec{\nu}} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} &= 1, & \vec{\mu} \cdot \vec{\mu} &= 1, & \vec{v} \cdot \vec{v} &= 1, \\
\vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} &= 0, & \vec{\mu} \cdot \vec{v} &= 0, & \vec{v} \cdot \vec{\lambda} &= 0, \\
\dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\lambda} &= 0, & \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mu} &= 0, & \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} &= 0, \\
\dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} &= -\dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\lambda}, & \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} &= -\dot{\vec{v}} \cdot \vec{\mu}, & \dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} &= -\dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{v}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} \zeta - \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} \eta) \vec{\lambda} + \\
&+ (\dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} \xi - \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} \zeta) \vec{\mu} + \\
&+ (\dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} \eta - \dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} \xi) \vec{v}.
\end{aligned}$$

Ako se uvedu oznake

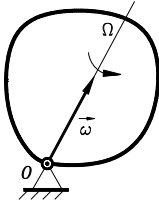
$$\dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} = \omega_\eta, \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} = \omega_\zeta, \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} = \omega_\xi,$$

tada je

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= (\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta) \vec{\lambda} + \\
&+ (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta) \vec{\mu} + \\
&+ (\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi) \vec{v},
\end{aligned}
\quad \vec{V} = \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad \vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{v}, \quad \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Ako se pode od uslova

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0, \quad \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta = 0, \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta = 0, \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi = 0,$$



$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta},$$

-trenutna osa obrtanja i obeležava sa $O\Omega$.

Vodeći računa o kolinearnosti vektora $\vec{\omega}$ i trenutne ose obrtanja, zaključuje se da je trenutni raspored brzina tačaka tela koje vrši sferno kretanje isti kao da se telo obrće oko, u tom trenutku nepokretne trenutne ose. Ovo zapažanje može se uzeti kao osnova za uvođenje naziva za vektor $\vec{\omega}$ - vektor trenutne ugaone brzine.

Ojlerove kinematičke jednačine

Za određivanje trenutne ugaone brzine tela koje vrši sferno kretanje polazi se od toga da se položaj tela može odrediti pomoću tri Ojlerova ugla. Tada je položaj tela poznat u svakom trenutku ako su poznate konačne jednačine sfernog kretanja tela $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Neka su uočena dva položaja tela koje vrši sferno kretanje, koji odgovaraju trenucima t i $t + \Delta t$ na sledeći način:

$$\begin{aligned}
t &: \quad \psi & \theta & \varphi \\
t + \Delta t &: \quad \psi + \Delta\psi & \theta + \Delta\theta & \varphi + \Delta\varphi
\end{aligned}$$

Odgovarajuće srednje ugaone brzine za dati interval vremena određene su izrazima $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Granične vrednosti ovih srednjih ugaonih brzina predstavljaju odgovarajuće trenutne ugaone brzine:

$$\begin{aligned}
- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t} &= \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} \quad \text{- ugaona brzina precesije,} \\
- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} &= \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad \text{- ugaona brzina nutacije,} \\
- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} &= \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \text{- ugaona brzina sopstvene rotacije.}
\end{aligned}$$

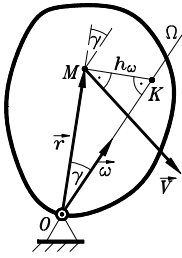
Vektori ugaonih brzina precesije $\vec{\omega}_p = \dot{\psi} \vec{k}$, nutacije $\vec{\omega}_n = \dot{\theta} \vec{n}$ i sopstvene rotacije $\vec{\omega}_{sr} = \dot{\varphi} \vec{v}$ usmereni su duž osa Oz , ON i $O\zeta$, čiji su jedinični vektori \vec{k} , \vec{n} i \vec{v} , respektivno. Imajući u vidu da se ove ose seku u jednoj tački, vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$, tela koje vrši sferno kretanje, može se pisati u obliku

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_{sr} = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{v}.$$

Projekcije vektora trenutnog ugaonog ubrzanja tela koje vrši sferno kretanje na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \omega_{\xi} \bar{\lambda} + \omega_{\eta} \bar{\mu} + \omega_{\zeta} \bar{\nu}, \\ \bar{\varepsilon} &= \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}_{\xi} \bar{\lambda} + \dot{\omega}_{\eta} \bar{\mu} + \dot{\omega}_{\zeta} \bar{\nu} + \omega_{\xi} \dot{\bar{\lambda}} + \omega_{\eta} \dot{\bar{\mu}} + \omega_{\zeta} \dot{\bar{\nu}}, \\ \dot{\bar{\lambda}} &= \bar{\omega} \times \bar{\lambda}, \quad \dot{\bar{\mu}} = \bar{\omega} \times \bar{\mu}, \quad \dot{\bar{\nu}} = \bar{\omega} \times \bar{\nu}, \\ \bar{\varepsilon} &= \dot{\omega}_{\xi} \bar{\lambda} + \dot{\omega}_{\eta} \bar{\mu} + \dot{\omega}_{\zeta} \bar{\nu} + \omega_{\xi} (\bar{\omega} \times \bar{\lambda}) + \omega_{\eta} (\bar{\omega} \times \bar{\mu}) + \omega_{\zeta} (\bar{\omega} \times \bar{\nu}), \\ \bar{\varepsilon} &= \dot{\omega}_{\xi} \bar{\lambda} + \dot{\omega}_{\eta} \bar{\mu} + \dot{\omega}_{\zeta} \bar{\nu} + \bar{\omega} \times (\omega_{\xi} \bar{\lambda} + \omega_{\eta} \bar{\mu} + \omega_{\zeta} \bar{\nu}), \\ \bar{\varepsilon} &= \dot{\omega}_{\xi} \bar{\lambda} + \dot{\omega}_{\eta} \bar{\mu} + \dot{\omega}_{\zeta} \bar{\nu} + \bar{\omega} \times \bar{\omega}, \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\omega}_{\xi} \bar{\lambda} + \dot{\omega}_{\eta} \bar{\mu} + \dot{\omega}_{\zeta} \bar{\nu}. \\ \bar{\omega} &= \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}, \\ \bar{\varepsilon} &= \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \bar{i} + \varepsilon_y \bar{j} + \varepsilon_z \bar{k}.\end{aligned}$$

Projekcije brzine tačke tela koje vrši sferno kretanje na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema



Polazeći od izraza za brzinu tačke tela koje vrši sferno kretanje može se intenzitet brzine V , proizvoljne tačke M tela, odrediti u obliku

$$V = \omega r \sin \angle(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega r \sin \gamma = \omega h_{\omega},$$

gde je $h_{\omega} = \overline{MK} = r \sin \gamma$ rastojanje tačke M od trenutne ose obrtanja. Pravac vektora \bar{V} normalan je na $\bar{\omega}$ i \bar{r} (a time i na h_{ω}), a orijentisan je na onu stranu odakle se obrtanje vektora $\bar{\omega}$, najkraćim putem, do poklapanja sa vektorom \bar{r} vidi kao matematički pozitivno.

Ako se vektor brzine \bar{V} određuje preko njegovih projekcija V_{ξ} , V_{η} i V_{ζ} , na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, tj.

$$\bar{V} = V_{\xi} \bar{\lambda} + V_{\eta} \bar{\mu} + V_{\zeta} \bar{\nu},$$

tada sledi da je

$$\begin{aligned}V_{\xi} &= \bar{V} \cdot \bar{\lambda} = \omega_{\eta} \zeta - \omega_{\zeta} \eta, \\ V_{\eta} &= \bar{V} \cdot \bar{\mu} = \omega_{\zeta} \xi - \omega_{\xi} \zeta, \\ V_{\zeta} &= \bar{V} \cdot \bar{\nu} = \omega_{\xi} \eta - \omega_{\eta} \xi.\end{aligned}$$

$$V = \sqrt{V_{\xi}^2 + V_{\eta}^2 + V_{\zeta}^2}, \quad \cos \angle(\bar{V}, \bar{\lambda}) = \frac{V_{\xi}}{V}, \quad \cos \angle(\bar{V}, \bar{\mu}) = \frac{V_{\eta}}{V}, \quad \cos \angle(\bar{V}, \bar{\nu}) = \frac{V_{\zeta}}{V}.$$

Na isti način može se odrediti intenzitet, pravac i smer vektora brzine \bar{V} , tačke tela koje vrši sferno kretanje, preko projekcija V_x , V_y i V_z na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$,

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}, \quad \bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} V_x &= \bar{V} \cdot \bar{i} = \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y &= \bar{V} \cdot \bar{j} = \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z &= \bar{V} \cdot \bar{k} = \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned}$$

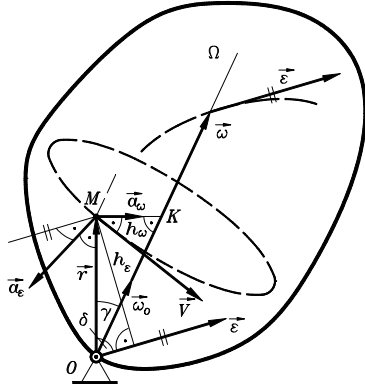
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad \cos \angle(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos \angle(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos \angle(\bar{V}, \bar{k}) = \frac{V_z}{V}.$$

Jednačina trenutne ose obrtanja, tela koje vrši sferno kretanje, u odnosu na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ je

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \omega_y z - \omega_z y = 0, \quad \omega_z x - \omega_x z = 0, \quad \omega_x y - \omega_y x = 0, \\ \frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$

Ubrzanje tačke tela koje vrši sferno kretanje

Ubrzanje proizvoljne tačke M tela koje vrši sferno kretanje je



$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}},$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

$$a_\varepsilon = \varepsilon r \sin \angle(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon r \sin \delta = \varepsilon h_\varepsilon,$$

gde je $h_\varepsilon = r \sin \delta$ rastojanje tačke M od pravca vektora trenutnog ugaonog ubrzanja. Ova komponenta ubrzanja tačke tela koje vrši sferno kretanje naziva se obrtno ubrzanje.

$$\vec{a}_\varepsilon = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \times \vec{r} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r},$$

$$\vec{a}_\varepsilon = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}) \times \vec{r} = \vec{a}_{\varepsilon_1} + \vec{a}_{\varepsilon_2}.$$

Pri tome je $a_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 r \sin \angle(\vec{\varepsilon}_1, \vec{r})$. Pravac vektora \vec{a}_{ε_1} normalan je na ravan koju obrazuju vektori $\vec{\varepsilon}_1$ i \vec{r} , a smer je određen datim vektorskim proizvodom. Intenzitet vektora \vec{a}_{ε_2} dat je sa

$a_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 r \sin \angle(\vec{\varepsilon}_2, \vec{r})$, pravac je normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{\varepsilon}_2$ i \vec{r} , a smer neposredno sledi iz datog vektorskog proizvoda.

Intenzitet druge komponente ubrzanja $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ tačke tela koje vrši sferno kretanje, koja će biti označena sa \vec{a}_ω , određen je izrazom

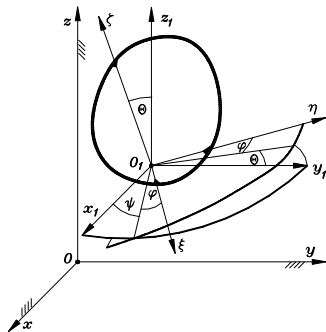
$$a_\omega = \omega V \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{V}) = \omega V \sin 90^\circ = h_\omega \omega^2,$$

gde je $h_\omega = \overline{MK} = r \sin \gamma$ rastojanje tačke M od trenutne ose obrtanja $O\Omega$. Pravac vektora \vec{a}_ω normalan je na ravan koju obrazuju $\vec{\omega}$ i \vec{V} i upravan je na trenutnu osu obrtanja $O\Omega$. Smer vektora \vec{a}_ω je onaj odakle se rotacija vektora $\vec{\omega}$ najkraćim putem do poklapanja sa vektorom \vec{V} vidi kao matematički pozitivna, tj. uvek je usmeren ka osi obrtanja. Ova komponenta ubrzanja tačke tela koje vrši sferno kretanje naziva se aksipetalno ubrzanje. Kada su poznate komponente \vec{a}_ε i \vec{a}_ω , intenzitet vektora ubrzanja proizvoljne tačke tela koje vrši sferno kretanje određen je npr. na osnovu kosinusne teoreme sa

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2 + 2a_\varepsilon a_\omega \cos \angle(\vec{a}_\varepsilon, \vec{a}_\omega)}.$$

Opšte kretanje tela

Jednačine opšteg kretanja slobodnog tela



Opšte kretanje slobodnog tela je takvo kretanje pri kome telo može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru. Slobodno telo koje vrši opšte kretanje ima šest stepeni slobode kretanja, odnosno njegov položaj određen je sa šest generalisanih koordinata. Konačne jednačine opšteg kretanja slobodnog krutog tela date su u obliku

$$x_{O_1} = f_1(t), \quad y_{O_1} = f_2(t), \quad z_{O_1} = f_3(t),$$

$$\psi = f_4(t), \quad \theta = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t).$$

Pretpostavlja se da su funkcije f_i ($i=1,2,3, \dots, 6$) neprekidne, jednoznačne i najmanje dva puta diferencijabilne.

Brzina tačke tela koje vrši opšte kretanje

Za proizvoljnu tačku M tela važi

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}_M,$$

gde je sa \vec{r}_{O_1} određen položaj proizvoljno izabranog pola translacije O_1 i gde je sa $\vec{\rho}_M$ određen položaj tačke M u odnosu na pol O_1 . Tada je

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_{O_1} + \dot{\vec{\rho}}_M, \quad \vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_M^{O_1}, \quad \vec{V}_M^{O_1} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_1 M}, \quad \vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_M.$$

Ubrzanje tačke tela koje vrši opšte kretanje

Ubrzanje proizvoljne tačke M posmatranog tela je

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_M = \dot{\vec{V}}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_M.$$

- $\dot{\vec{V}}_{O_1} = \vec{a}_{O_1}$ - ubrzanje pola translacije,
 - $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M = \vec{a}_\varepsilon$ - obrtno ubrzanje tačke M ,
 - $\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_M = \vec{\omega} \times \vec{V}_M^{O_1} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_M) = \vec{a}_\omega$ - aksipetalno ubrzanje tačke M ,
- $$\vec{a}_M = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_M^{O_1}.$$