

Ispitivanje funkcija

Kod ispitivanja funkcije, potrebno je uraditi sledeće:

- Odrediti oblast definisanosti funkcije.
- Ispitati specijalna svojstva (parnost, neparnost, periodičnost).
- Odrediti nule i znak.
- Odrediti intervale monotonosti¹ i ekstremne tačke.
 - Uslovi monotonosti.

Neka je $D \subseteq \mathbf{R}$ i $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$.

Ako za svako $x \in (a, b) \subseteq D$, $f'(x)$ postoji i

$f'(x) > 0$, onda je funkcija f rastuća

$f'(x) \geq 0$, onda je funkcija f neopadajuća

$f'(x) = 0$, onda je funkcija f konstantna

$f'(x) \leq 0$, onda je funkcija f nerastuća

$f'(x) < 0$, onda je funkcija f opadajuća

na (a, b) .

- Neka je f definisana u nekoj okolini x_0 u kojoj dostiže ekstremnu vrednost. Tada ili $f'(x_0)$ ne postoji ili je $f'(x_0) = 0$. Tačke domena funkcije u kojima $f'(x)$ ne postoji ili $f'(x) = 0$, nazivamo **kritičnim tačkama** i one predstavljaju moguće tačke u kojima funkcija dostiže ekstremnu vrednost.
- Neka je f neprekidna u x_0 . Neka je f diferencijabilna funkcija u nekoj okolini U tačke x_0 , osim eventualno u tački x_0 . Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (-\infty, x_0)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (x_0, +\infty)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni maksimum**. Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (x_0, +\infty)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (-\infty, x_0)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni minimum**.

¹Definicija monotonosti i ekstremne vrednosti funkcije može se videti u [3].

Drugim rečima i ne tako precizno, ako $f'(x)$ menja znak kada x prolazi kroz x_0 , onda je to tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

- Odrediti konveksnost i prevojne tačke.

- Neka funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ ima drugi izvod na (a, b) . $f(x)$ je **konkavna (konveksna)** na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) za $x \in (a, b)$.
- Neka je f definisana u nekoj okolini U tačke x_0 i u toj tački ima konačan ili beskonačan prvi izvod i neprekidna je. Tačka $(x_0, f(x_0))$ naziva se **prevojnou tačkom** grafika funkcije f , ako je f konveksna (konkavna) na skupu $\{x \in U \mid x > x_0\}$ i konkavna (konveksna) na skupu $\{x \in U \mid x < x_0\}$.

Neka funkcija f ima prvi izvod u nekoj okolini U tačke x_0 i ima drugi izvod u $U \setminus \{x_0\}$. Ako $f''(x)$ menja znak pri prolazu argumenta kroz tačku x_0 , onda je $(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka grafika funkcije f .

- Neka funkcija f u x_0 ima sve izvode zaključno sa n -tim ($n \geq 2$) pri čemu je

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{i} \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Ako je $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}$), onda funkcija ima ekstrem u tački x_0 i to za

$$f^{(n)}(x_0) > 0, \quad \text{lokalni minimum;} \\ f^{(n)}(x_0) < 0, \quad \text{lokalni maksimum.}$$

Ako je $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$) onda je x_0 prevojna tačka.

- Naći asimptote.

- Prava $x = x_0$ je **vertikalna asimptota** grafika funkcije ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

- Prava $y = kx + n$ je **kosa asimptota** grafika funkcije ako postoje $k \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{R}$ tako da je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = n,$$

ili

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = n.$$

Specijalno za $k = 0$ dobija se prava $y = n$, koja je paralelna sa x -osom i naziva se **horizontalna asimptota**.

- Odrediti ostale specifičnosti grafika.

- Nacrtati grafik.

Zadaci

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, jer deljenje sa nulom nije definisano, pa mora da važi

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1 \wedge x \neq -1.$$

- Funkcija je neparna, jer važi

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Dakle, grafik funkcije f je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

- Nula funkcije f je $x = 0$. Znak funkcije je prikazan u tablici.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	–	+	–	+

- Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}.$$

Vidimo da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, a to znači da je f opadajuća na čitavom domenu D .

- Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$$

$f''(x) = 0$ za $x = 0$. Tačka $A(0, 0)$ je moguća prevojna tačka. Odredimo znak drugog izvoda:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge x^2 - 1 > 0) \vee (x < 0 \wedge x^2 - 1 < 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \vee x \in (-1, 0). \end{aligned}$$

Dakle, funkcija je konkavna (\smile) na skupu $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, a konveksna (\frown) na skupu $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ i tačka $A(0, 0)$ je prevojna tačka grafika funkcije f .

- Asimptote.

Kako je $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$,

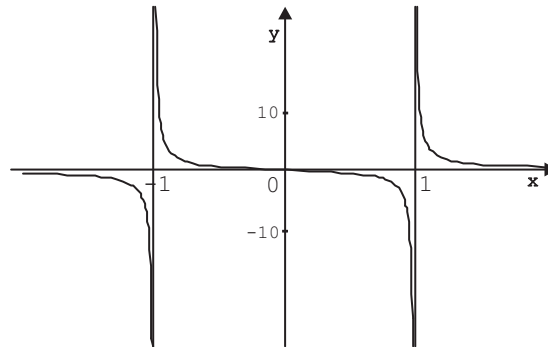
i kako je $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$,

to su prave $x = 1$ i $x = -1$ vertikalne asimptote funkcije f .

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$

to je prava $y = 0$, tj. x -osa horizontalna asimptota funkcije.



Slika 11.1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

2. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Lako se vidi da je tačka $x = 1$ jedina nula funkcije f .

Odredimo znak funkcije.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	—	—	+

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}, \quad x \in D.$$

Nule prvog izvoda su $x = 1$ i $x = -8$ a to su ujedno i kritične tačke.

Odredimo znak prvog izvoda, odnosno monotonost funkcije.

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow	\nearrow

Iz tablice se može zaključiti da u tački $x = -8$ funkcija ima lokalni maksimum, $A(-8, -\frac{81}{4})$. Tačka $x = 1$ nije ekstremna tačka.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{54(x-1)}{(x+2)^4}, \quad x \in D.$$

$f''(x) = 0$ za $x = 1$, to je tačka $P(1, 0)$ moguća prevojna tačka grafika funkcije f .

Odredimo znak drugog izvoda, odnosno koveksnost funkcije.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	konveksna (\cap)	konveksna (\cap)	konkavna (\cup)

Sada možemo zaključiti da je tačka $P(1, 0)$ prevojna tačka grafika funkcije f .

- Asimptote.

Funkcija f nije definisana u tački $x = -2$ i kako

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty,$$

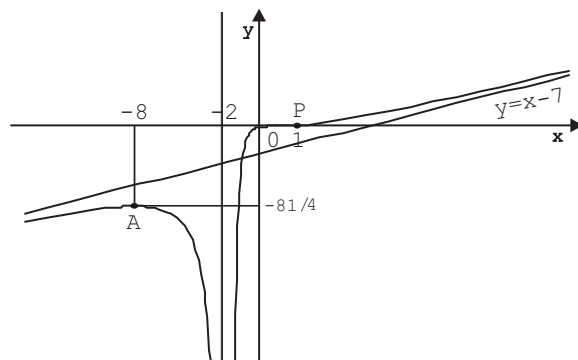
to je prava $x = -2$ vertikalna asimptota funkcije f .

Funkcija f nema horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty.$$

Funkcija f ima kosu asimptotu $y = x - 7$, jer je

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+2)^2} = 1 \quad \text{i} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-7x^2 - x - 1}{(x+2)^2} = -7. \end{aligned}$$



Slika 11.2: Grafik funkcije $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$.

3. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije:

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}.$$

Rešenje.

- Da bi kvadratni koren bio definisan, mora da važi

$$(x^2 - 9)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 3,$$

odnosno domen funkcije $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

- Funkcija je parna, zaista

$$f(-x) = \sqrt{((-x)^2 - 9)^3} = \sqrt{(x^2 - 9)^3} = f(x).$$

Dakle, grafik funkcije je simetričan u odnosu na y -osu.

- Nule funkcije f se određuju iz $f(x) = 0$, odnosno

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ili } x = -3.$$

Nule su dakle u tačkama $x = 3$ i $x = -3$.

Pošto je kvadratni koren nenegativna funkcija na domenu, nije teško videti da je funkcija f nenegativna tj. $f(x) \geq 0$ za svako $x \in D$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 9)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 - 9}, \quad x \in D.$$

Odredićemo nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ili } x = 3 \text{ ili } x = -3).$$

Sledi da su kritične tačke $x = 3$ i $x = -3$ (nulu smo isključili, jer $0 \notin D$).

Sada ćemo odrediti znak prvog izvoda, odnosno monotonost:

	$(-\infty, -3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	\searrow	\nearrow

Lako je zaključiti da su tačke $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$ lokalni minimumi date funkcije.

- Drugi izvod funkcije f je

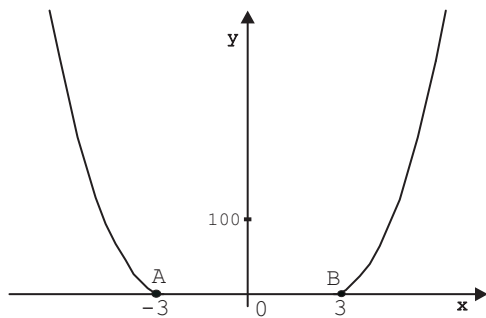
$$f''(x) = 3 \cdot \sqrt{x^2 - 9} + 3x \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3\sqrt{x^2 - 9} + 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}},$$

$$f''(x) = 3 \cdot \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad x \in D \setminus \{-3, 3\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \notin D.$$

Dakle, funkcija nema prevojnih tačaka, $f''(x) > 0$ za svako $x \in D \setminus \{-3, 3\}$, odnosno $f(x)$ je konkavna (\smile) na skupu $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.



Slika 11.3: Grafik funkcije $f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$.

- Asimptote.

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je neprekidna u svim tačkama domena.

Funkcija nema kosu asimptotu, jer je

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 9)^3}}{x} = \pm\infty.$$

Funkcija nema ni kosu ni horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{(x^2 - 9)^3} = +\infty.$$

- Odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f zaklapa sa pozitivnim delom x -ose u tački $x = 3$ ($x = -3$).

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(3) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

4. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = x \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0)$$

dakle, $x = 0$ i $x = -1$ su nule funkcije.

Znajući da je $(x+1)^2 \geq 0$ za svako $x \in D$, jasno je da je $f(x) \leq 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ i $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}}, \quad x \in D \setminus \{-1\}.$$

Nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}.$$

Kako $f'(-1)$ ne postoji, sledi da su $x = -1$ i $x = -\frac{3}{5}$ kritične tačke funkcije.

Odredimo znak prvog izvoda.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{3}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow

Funkcija ima lokalni maksimum u tački $x = -1$, $A(-1, 0)$ i lokalni minimum u tački $x = -\frac{3}{5}$, $B(-\frac{3}{5}, f(-\frac{3}{5}))$, $f(-\frac{3}{5}) \approx -0.33$.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{10x + 12}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}}, \quad x \in D \setminus \{-1\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda:

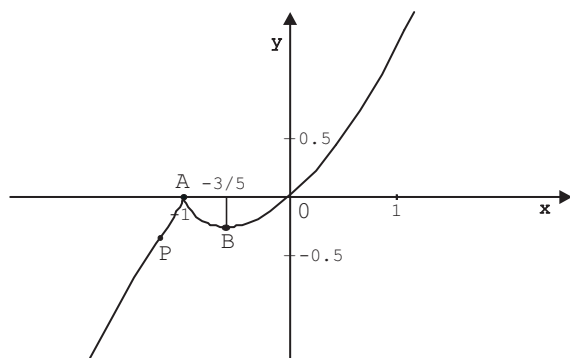
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{5}.$$

Moguće prevojne tačke su $x = -\frac{6}{5}$ i $x = -1$.

Znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{6}{5})$	$(-\frac{6}{5}, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	konveksna (\cap)	konkavna (\cup)	konkavna (\cup)

Sada možemo zaključiti da je tačka $P(-\frac{6}{5}, f(-\frac{6}{5}))$ prevojna tačka grafika funkcije f , $f(-\frac{6}{5}) \approx -0.41$.



Slika 11.4: Grafik funkcije $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

- Asimptote.

Funkcija je definisana i neprekidna nad skupom \mathbf{R} , te zbog toga nema vertikalnu asimptotu.

Funkcija f nema horizontalnu asimptotu jer je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x\sqrt[3]{(x+1)^2} = \pm\infty.$$

Funkcija f nema kosu asimptotu, zato što je

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} = +\infty.$$

5. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nula funkcije f je $x = 0$. Odredićemo znak funkcije.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

Odredimo nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4.$$

Kritične tačke funkcije f su $x = 1$ i $x = 4$. Znak prvog izvoda i monotonost funkcije je prikazana u tablici.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow

Dakle, f monotonno raste na skupu $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, a monotonno opada na skupu $(1, 2) \cup (2, 4)$.

- Drugi izvod funkcije je

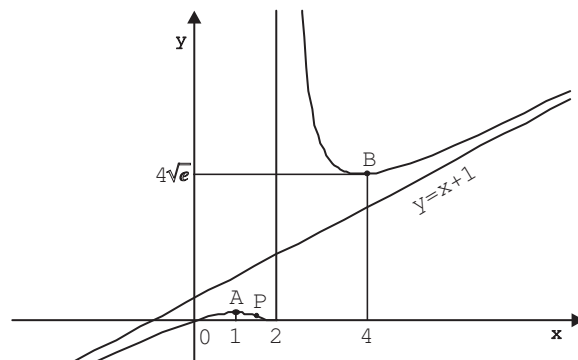
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{5x - 8}{(x-2)^4}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

$f''(x) = 0$ za $x = \frac{8}{5}$. Analizirajmo znak drugog izvoda.

	$(-\infty, \frac{8}{5})$	$(\frac{8}{5}, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konveksna (\cap)	konkavna (\cup)	konkavna (\cup)

Sada možemo zaključiti da je prevojna tačka grafika funkcije f je $P(\frac{8}{5}, \frac{8}{5} e^{\frac{5}{2}})$.

Može se ekstremna vrednost odrediti i preko drugog izvoda pa ćemo u ovom zadatku to uraditi.



Slika 11.5: Grafik funkcije $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$.

$f''(1) = -\frac{3}{e} < 0$, tako da u tački $A(1, \frac{1}{e})$ funkcija ima lokalni maksimum.

$f''(4) = \frac{3}{4}\sqrt{e} > 0$, tako da u tački $B(4, 4\sqrt{e})$ funkcija ima lokalni minimum.

- Asimptote.

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty,$$

prava $x = 2$ je vertikalna asimptota funkcije f . Sa druge strane važi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

što znači da kad $x \rightarrow 2^-$ grafik funkcije se „približava” tački $(2, 0)$.

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x-2}} = -\infty,$$

to funkcija nema horizontalnih asimptota.

Kako je

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1 \quad \text{i}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x-2}} - 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x-2}{x} = 1, \end{aligned}$$

to je prava

$$y = x + 1$$

kosa asimptota funkcije f kada $x \rightarrow \pm\infty$.

6. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = |x + 1| e^{-\frac{1}{x}}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Jasno je da $f(x) > 0$ za svako $x \in D$.

- Pošto je

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x > -1, x \neq 0 \\ -(x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

lako se dobija prvi izvod,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x < -1. \end{cases}$$

Ispitajmo postojanje prvog izvoda u tački $x = -1$. Odredimo levi izvod

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = e$$

a zatim, desni izvod

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = -e$$

Kao što vidimo levi i desni izvodi u tački $x = -1$ nisu jednaki, a to znači da ne postoji prvi izvod u $x = -1$.

Odredimo nule prvog izvoda.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{x+1}{x^2} = 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 0, \quad x \neq -1, \quad x \neq 0.$$

Kako je $x^2 + x + 1 \neq 0$ za svako $x \in \mathbf{R}$, sledi da prvi izvod nema nula. Jedina kritična tačka je $x = -1$.

Odredimo znak prvog izvoda:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\nearrow

Sada možemo zaključiti da je tačka $x = -1$ lokalni minimum funkcije f , na grafiku to je tačka $A(-1, 0)$.

- Drugi izvod funkcije f je

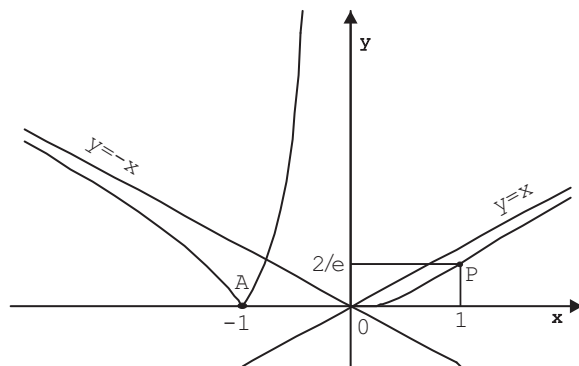
$$f''(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{-x+1}{x^4} \right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{-x+1}{x^4} \right), & x < -1 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, tako da je to, moguća prevojna tačka.

Odredimo znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	konveksna (\cap)	konkavna (\cup)	konkavna (\cup)	konveksna (\cap)

Drugi izvod menja znak prolazeći kroz tačke $x = -1$ i $x = 1$. Samo je tačka $x = 1$ prevojna tačka funkcije, $P(1, \frac{2}{e})$, zato što prvi izvod ne postoji u tački $x = -1$.



Slika 11.6: Grafik funkcije $f(x) = |x+1|e^{-\frac{1}{x}}$.

- Asimptote.

Funkcija f nije definisana u tački $x = 0$ i kako je

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x + 1| e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

to je prava $x = 0$ vertikalna asimptota funkcije f . A sa druge strane je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x + 1| e^{-\frac{1}{x}} = 1 \cdot 0 = 0. \quad (11.1)$$

Funkcija f nema horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x + 1| e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$$

i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x + 1| e^{\frac{-1}{x}} = +\infty.$$

Kose asimptote.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \right) = 1,$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x - 1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -1,$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x + 1)e^{\frac{-1}{x}} - x \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}}{-x^{-2}} = 1 - 1 = 0,$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(-x - 1)e^{-\frac{1}{x}} + x \right] = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}} =$$

$$= -1 + 1 = 0.$$

Dakle, imamo dve kose asimptote

$$y_1 = x \text{ (kada } x \rightarrow +\infty) \quad \text{i} \quad y_2 = -x \text{ (kada } x \rightarrow -\infty).$$

- Kako važi (11.1), odredićemo još ugao α između tangente funkcije f kada $x \rightarrow 0^+$ i pozitivnog dela x -ose

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x + 1}{x^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

7. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \ln \frac{x + 3}{1 - x}.$$

Rešenje.

- Funkcija f je definisana za $\frac{x+3}{1-x} > 0$. Domen date funkcije je $D = (-3, 1)$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije f se određuju rešavanjem jednačine $\frac{x+3}{1-x} = 1$, odakle sledi da je nula funkcije $x = -1$. Odredimo znak funkcije.

	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$
$f(x)$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)(1-x)}, \quad x \in (-3, 1).$$

Prvi izvod nema nula.

Lako se može videti da je $f'(x) > 0$ za svako $x \in D$, a to znači da je funkcija monotonno rastuća na čitavom domenu D .

Ekstremnih tačaka ne može biti.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{8x+8}{(x+3)^2(1-x)^2}, \quad x \in D$$

Odredimo znak drugog izvoda:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 8x+8 > 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in (-1, 1),$$

odnosno,

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1).$$

Dakle, funkcija f je konkavna (\smile) na intervalu $(-1, 1)$, a konveksna (\frown) na intervalu $(-3, -1)$.

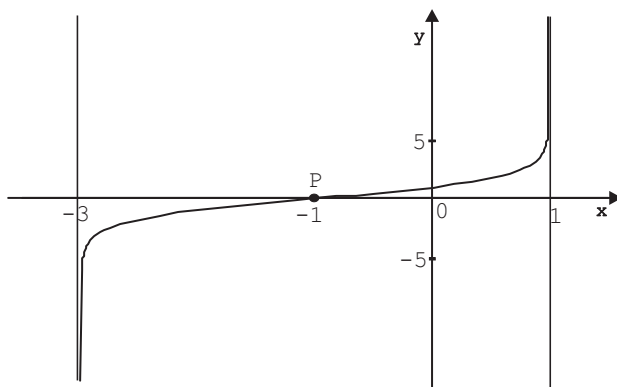
Tačka $P(-1, 0)$ je prevojna tačka grafika funkcije f .

- Asimptote.

Funkcija f ima dve vertikalne asimptote $x = -3$ i $x = 1$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln \frac{x+3}{1-x} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x+3}{1-x} = +\infty.$$

Funkcija nema kosu asimptotu, pošto je domen funkcije interval $(-3, 1)$, tako da argument x ne može da teži ka $+\infty$ ili $-\infty$, što je potrebno za postojanje kose asimptote.



Slika 11.7: Grafik funkcije $f(x) = \ln \frac{x+3}{1-x}$.

8. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija f je periodična sa osnovnim periodom π (važi $f(x + \pi) = f(x)$, $x \in D$). Zato je dovoljno da je posmatramo na intervalu $[0, \pi]$.
- Nule funkcije f se odrede iz $f(x) = 0$, odnosno

$$\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4} = 0,$$

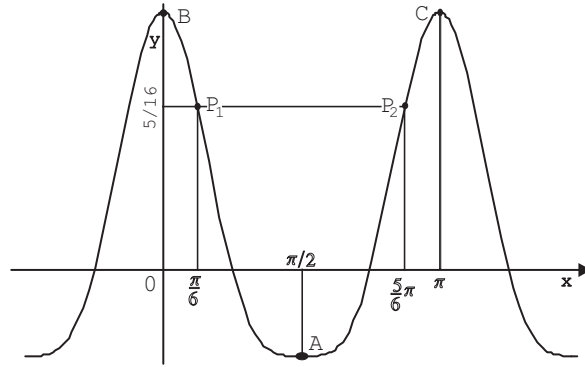
uvedemo smenu $t = \sin^2 x$. Dakle, imamo jednačinu

$$t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$$

čija su rešenja $t_1 = \frac{3}{2}$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Pošto $\sin^2 x \neq \frac{3}{2}$, rešenja dobijamo iz $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, odnosno $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nule funkcije f na $x \in [0, \pi]$ su $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3\pi}{4}$.

Odredimo znak funkcije.

	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
$f(x)$	+	−	+



Slika 11.8: Grafik funkcije $f(x) = \sin^4 x - 2 \sin^2 x + \frac{3}{4}$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = -4 \sin x \cdot \cos^3 x, \quad x \in D.$$

Nule prvog izvoda se dobijaju iz

$$-4 \sin x \cdot \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0.$$

Iz ovoga sledi da su tačke $x = 0$, $x = \pi$ i $x = \frac{\pi}{2}$ nule prvog izvoda na posmatranom intervalu, ujedno i sve kritične tačke.

Odredimo znak prvog izvoda.

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

Funkcija ima lokalni minimum u tački $A(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{4})$ i lokalne maksimume u tačkama $B(0, \frac{3}{4})$ i $C(\pi, \frac{3}{4})$.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = -4 \cos^4 x \left(1 - 3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right), \quad x \in D \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Funkcija je konkavna ako je $f''(x) > 0$, odnosno ako je

$$1 - 3 \operatorname{tg}^2 x < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} > \operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right).$$

Funkcija je konveksna ako je $f''(x) < 0$, odnosno za $x \in (0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi)$. Iz prethodna dva razmatranja da se zaključiti da su $P_1(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{16})$ i $P_2(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{16})$ prevojne tačke funkcije f .

- Asimptote.

Funkcija je definisana i neprekidna nad \mathbf{R} , te nema vertikalnih asimptota.

Funkcija f nema kosu asimptotu, jer n ne postoji:

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}).$$

9. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f određujemo iz uslova

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Iz toga sledi

$$-1 - x^2 \leq 2x \wedge 1 + x^2 \geq 2x \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \wedge (1-x)^2 \geq 0,$$

što je zadovoljeno za svako $x \in \mathbf{R}$. Dakle, domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.

- Funkcija je neparna. Zaista,

$$f(-x) = -x + \arcsin \frac{-2x}{1+x^2} = -x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x),$$

Tako da je dovoljno ispitati tu funkciju samo za $x \geq 0$.

- Iz

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

sledi da je $x = 0$ jedina nula funkcije f .

- Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 1 + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}.$$

Vidimo da f' nije definisana u $x = 1$. Oslobodimo se znaka apsolutne vrednosti,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2-1}{1+x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

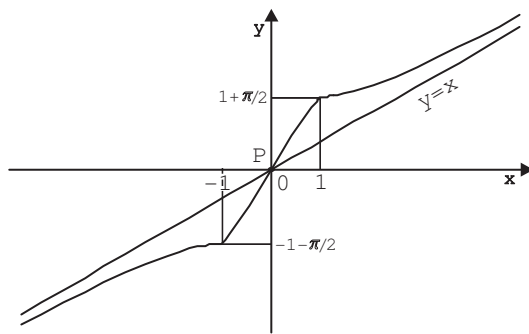
$f'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$. Što znači da funkcija f raste za svako $x \in \mathbf{R}^+$, a zbog neparnosti i nad celim \mathbf{R} . Ekstremnih tačaka

nema. Ispitajmo još levu i desnu graničnu vrednost od f' u tački $x = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 - \frac{2}{1+x^2} \right) = 0, \quad \alpha_1 = \arctg 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{2}{1+x^2} \right) = 2, \quad \alpha_2 = \arctg 2 \approx 63.43^\circ.$$

α_1 i α_2 su odgovarajući uglovi koje tangente grafika u tački $x = 1$ zaklapaju sa pozitivnim delom x -ose. Ovi podaci omogućavaju preciznije crtanje grafika funkcije. Primetimo da u tački $x = 1$ funkcija f je neprekidna ali nije diferencijabilna.



Slika 11.9: Grafik funkcije $f(x) = x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

- Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Analizirajmo znak drugog izvoda:

	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna (\frown)	konkavna (\smile)

Tačka $P(0, 0)$ je jedina prevojna tačka grafika funkcije. U tačkama $x = 1$ i $x = -1$ prvi izvod ne postoji te ne mogu biti prevojne tačke, iako drugi izvod menja znak prolazeći kroz te tačke.

- Asimptote.

Kako je f neprekidna nad $D = \mathbf{R}$, vertikalnih asimptota nema.

Ispitajmo postojanje kose asimptote,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2}}{x} \right) = 1 + 0 = 1,$$

$$\begin{aligned}
 n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Dakle, prava $y = x$ je kosa asimptota.

10. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije f se određuju iz $f(x) = 0$, odnosno

$$\operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0.$$

Dakle, $x = -1$ je nula funkcije.

$$\begin{aligned}
 f(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x > 0 \quad \vee \quad x < -1) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).
 \end{aligned}$$

Prikažimo to u tablici:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f(x)$	+	-	+

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Diskriminanta od $2x^2 + 2x + 1 = 0$ je $a^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$ i $a = 2$, te sledi da je trinom $2x^2 + 2x + 1 > 0$ za svako $x \in D$. To znači da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in D$, tj. $f(x)$ monotono opada nad čitavim domenom D . Ekstremnih vrednosti nema.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2}, \quad x \in D.$$

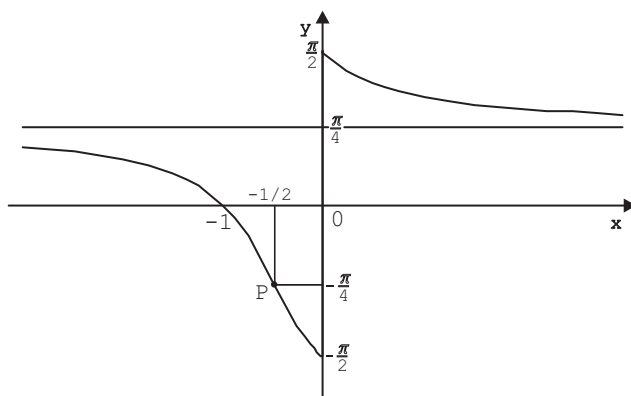
Nule drugog izvoda:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, $x = -\frac{1}{2}$ je jedina nula drugog izvoda i moguća prevojna tačka. Odredićemo znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	konveksna (\cap)	konkavna (\cup)	konkavna (\cup)

$P(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$ je prevojna tačka grafika funkcije.



Slika 11.10: Grafik funkcije $f(x) = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- Asimptote.

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2} \quad (11.2)$$

i

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}. \quad (11.3)$$

Ispitaćemo da li funkcija ima horizontalnu asimptotu. Iz

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

sledi da je prava $y = \frac{\pi}{4}$ horizontalna asimptota funkcije f .

- Kako važi (11.2) i (11.3), odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f kada $x \rightarrow 0^\pm$ zaklapa sa pozitivnim delom x -ose.

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1} = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije f , ako je

$$a) f(x) = \frac{x+2}{2x+1}. \quad b) f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}.$$

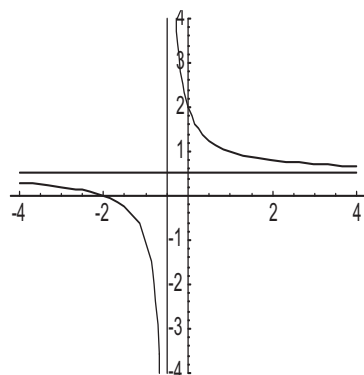
$$c) f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}. \quad d) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}.$$

$$e) f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x}. \quad f) f(x) = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}.$$

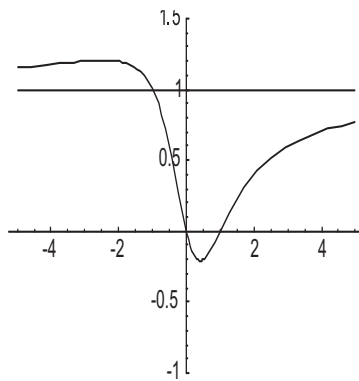
$$g) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \quad h) f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

$$i) f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right). \quad j) f(x) = \operatorname{arctg}(e^x) - \ln\left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right).$$

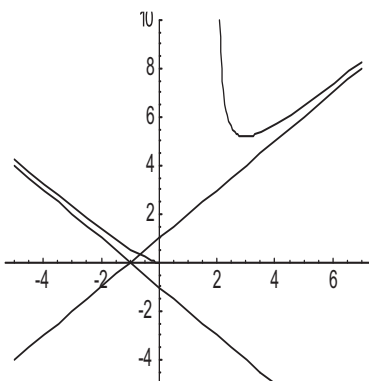
Grafici funkcija:



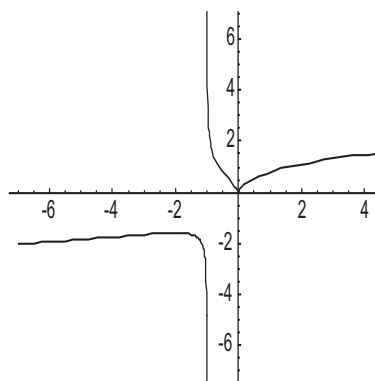
a).



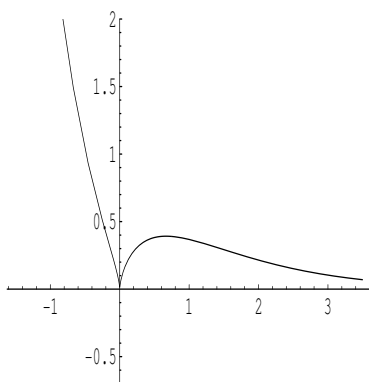
b).



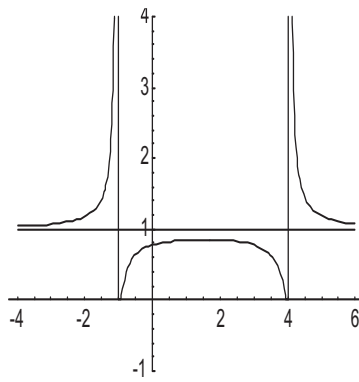
c).



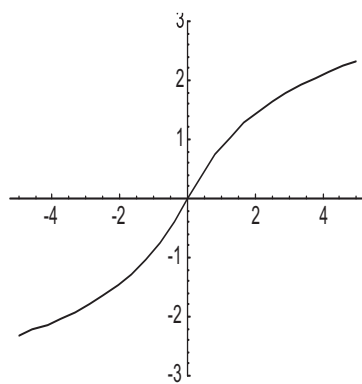
d).



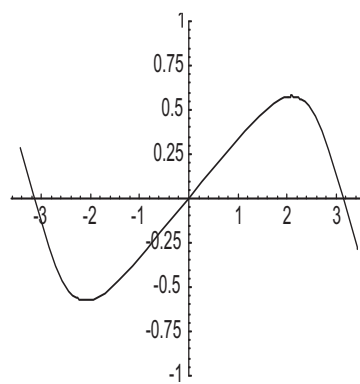
e).



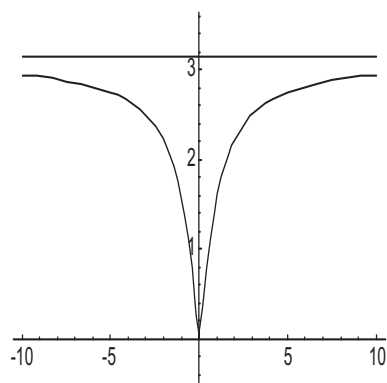
f).



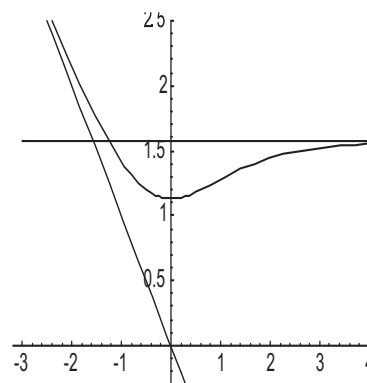
$g)$.



$h)$.



$i)$.



$j)$.