Испитивање функција

Теоријски увод

Испитивање функција је централни и свакако најбитнији део сваког курса математике. Он даје математичку основу за скицирање графика на основу математичке формуле одређених појава које се јављају у економији, природним наукама, техници, физици...

Да не би имали проблема са испитивањем тока функције потребно је да добро свладате решавање једначина и неједначина (то је средњошколска математика), одређивање граничних вредности (лимеса) и рачунање извода функције.

Ми ћемо испитивање функција разложити на седам делова:
1. Област дефинисаности функције (или домен функције)
2. Нуле, знак функције и пресек са y-осом
3. Парност и периодичност функције
4. Граничне вредности функције на крајевима домена и асимптоте функције
5. Први извод, монотоност и локални екстреми функције
6. Други извод, конвексност и превојне тачке функције
7. Цртање графика функције.

На основу свих претходно одређених тачака цртамо график функције. Уколико се неке 2 тачке не слажу међусобно не настављамо са радом, него се осврнемо и ако можемо утврдимо где је грешка (јер би наставак рада могао да проузрокује још грешака).

На графику означавамо (ако постоје) следеће тачке: нуле, пресек са y-осом – то је тачка $(0, f(0))$, минимуме и максимуме, превојне тачке, затим цртамо асимптоте и означавамо (цртицама) граничне вредности и на крају све то спојимо водећи рачуна о знаку, монотоности и конвексности. Ако се нешто не слаже, то је показатељ да смо начинили неку грешку у рачуну неке од претходних ставки! Такође на позитивном смеру x-осе треба ставити стрелицу и x, а на позитивном смеру y-осе треба ставити стрелицу и $f(x)$.

Наредни графици вам дају представу како изгледа функција (они су добијени коришћењем програмског пакета Мејпл), али на њима морате да означите све горе наведено. Такође од вас се не очекују природне пропорције него само да скицирате график (значи, да водите рачуна о знаку, монотоности и конвексности, као и какав је међусобни однос одговарајућих тачака и правих – шта је пре, шта је горе...). Приближне вредности координата служе за те процене, али се од вас не очекује да то радите на испиту!

Задаци

Испитати ток и скицирати график следећих функција:

1. $f(x) = \dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$.

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када су дефинисане функције $g(x)=x^3-3x$ и $h(x)=x^2-1$ (што је увек јер су полиноми дефинисани за свако $x\in\mathbb{R}$) и када је $h(x)=x^2-1\neq 0$, тј. $x^2\neq 1$, односно $x\neq\pm 1$.

Стога је домен функције f једнак $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

2° $f(0)=\dfrac{0^3-3\cdot 0}{0^2-1}=0$, па је пресек са y-осом тачка $Y(0,0)$.

Дату функцију можемо представити у облику $f(x)=\dfrac{x(x^2-3)}{x^2-1}$.

Одавде одређујемо нуле и знак на основу таблице у којој имамо знак сваког члана понаособ:

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-1	$+$	$+$	$+$	x	$-$	$-$	$-$	x	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	x	$-$	0	$+$	x	$-$	0	$+$

Добијамо да је функција $f(x)$ има нуле $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ и $x=\sqrt{3}$, као и да је
$f(x)<0$ за $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,0)\cup(1,\sqrt{3})$, а $f(x)>0$ за $x\in(-\sqrt{3},-1)\cup(0,1)\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

3° Како је $f(-x)=\dfrac{-x\big((-x)^2-3\big)}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x(x^2-3)}{x^2-1}=-f(x)$ за $\forall x\in D$ добијамо да је функција $f(x)$ непарна.

График ове функције је централно симетричан у односу на координатни почетак $O(0,0)$.

Функција $f(x)$ није ни периодична.
<u>Доказ</u>: претпоставимо супротно, тј. да је периодична са периодом T. Тада је $f(x+T)=f(x)$ за $\forall x\in D$, али ако би узели $x=-1-T$ добијамо контрадикцију $f(-1)=f(-1-T)$ – то је немогуће јер за -1 функција није дефинисана, а за $-1-T$ јесте).

4° Како је домен $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ потребно је одредити следећих шест лимеса:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}\cdot\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=-\infty$ јер кад $x\to-\infty$ онда $\frac{3}{x}\to 0$ и $\frac{1}{x^2}\to 0$.

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}=\left[\dfrac{(-1)^3-3\cdot(-1)}{(-1^-)^2-1}=\dfrac{4}{1^+-1}=\dfrac{4}{0^+}\right]=+\infty.$

Потпуно аналогно се добијају $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ можемо израчунати као и $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, али ћемо овде урадити на други начин, помоћу Лопиталовог правила јер је то лимес облика $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-3}{2x}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2}=+\infty.$

<u>Асимптоте</u>: Како смо добили да је $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$ (а и $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$) права $x=-1$ је вертикална асимптота.

Како је $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$ (а и $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$) и права $x=1$ је вертикална асимптота.
Како су $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ бесконачни функција нема хоризонталних асимптота, али може имати косих.
Како се сви лимеси потпуно аналогно рачунају и за $x\to-\infty$ и за $x\to+\infty$, свуда ћемо писати $x\to\pm\infty$.

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{x^3-3x}{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^3-x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1.$

Овај лимес је коначан и $\neq 0$, па тражимо коефицијент n:

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-k\cdot x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}-1\cdot x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x-x^3+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x}{x^2-1}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{2x}=\left[\dfrac{-2}{\infty}\right]=0.$

И овај лимес је коначан. Стога је права $y=1\cdot x+0$, тј. $y=x$ обострана коса асимптота.

5° $f'(x) = \dfrac{x^4+3}{(x-1)^2(x+1)^2}$. Сви чланови у овом изразу су позитивни па добијамо:

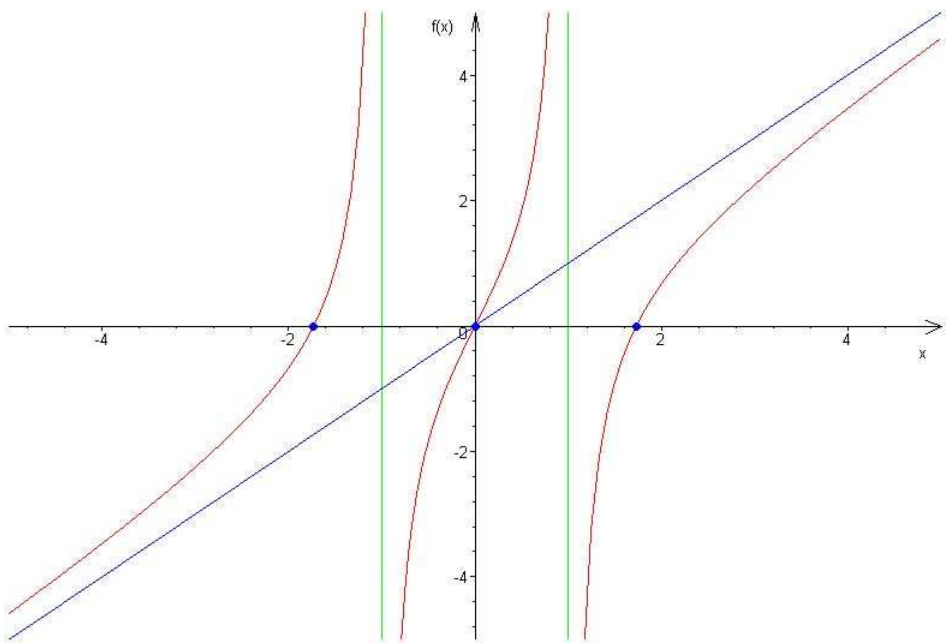
	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
x^4+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	x	$+$
$(x+1)^2$	$+$	x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	x	$+$	x	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	x	$\nearrow$	x	$\nearrow$

Функција је растућа на интервалима: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ и $(1,+\infty)$. Нема екстремних тачака.

6° $f''(x) = \dfrac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$. Знак $(x-1)^3$ је исти као и знак од $x-1$ и слично $(x+1)^3$ има исти знак као и $x+1$ (јер су у питању непарни степени). Како је увек $x^2+3>0$ јер је $x^2 \geqslant 0$, имамо таблицу:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$-4x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	x	$+$
$(x+1)^3$	$-$	x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	x	$-$	0	$+$	x	$-$
$f(x)$	$\cup$	x	$\cap$	P	$\cup$	x	$\cap$

Функција има једну превојну тачку $P(0,0)$.



■

2. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када су дефинисана функција $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ (што је увек јер су полиноми дефинисани за свако $x \in \mathbb{R}$ и $1+x^2 \geqslant 1+0>0$, па је $1+x^2 \neq 0$) и када је $-1 \leqslant h(x) \leqslant 1$. Ово је двострука неједначина која се своди на $-1 \leqslant h(x)$ и $h(x) \leqslant 1$ (укупно решење се добија као пресек одговарајућих решења). Прву од ових неједначина $-1 \leqslant h(x)$, тј. $-1 \leqslant \dfrac{2x}{1+x^2}$ решавамо тако што све пребацимо на десну страну: $0 \leqslant \dfrac{2x}{1+x^2}+1 = \dfrac{1+2x+x^2}{1+x^2} = \dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$. Како су квадрати увек позитивни добијамо да је решење ове неједначине $(-\infty,+\infty)$, тј. цео $\mathbb{R}$. Потпуно аналогно добијамо да је $\mathbb{R}$ решење и друге неједначине.

Тиме смо добили да је дата функција дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$, тј. $D=(-\infty,+\infty)$.

2° $f(0) = \arcsin \dfrac{2\cdot 0}{1+0^2} = 0$, па је пресек са y-осом тачка $Y(0,0)$.

За функцију $\arcsin g(x)$ (кад је дефинисана, што нам у овом задатку не представља проблем јер је увек дефинисана) важи да има исти знак као и функција $g(x)$. Стога нуле и знак одређујемо на основу таблице:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$2x$	$-$	0	$+$
$1+x^2$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x}{1+x^2}$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Добијамо да је функција $f(x)$ има нулу $x=0$, као и да је $f(x)<0$ за $x\in(-\infty,0)$, а $f(x)>0$ за $x\in(0,+\infty)$.

3° Како је $f(-x)=\arcsin\dfrac{2\cdot(-x)}{1+(-x)^2}=\arcsin\dfrac{-2x}{1+x^2}=-\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=-f(x)$ за $\forall x\in D$ $\Rightarrow$ $f(x)$ је непарна.

График ове функције је централно симетричан у односу на координатни почетак $O(0,0)$.

Функција $f(x)$ није ни периодична.

Доказ: претпоставимо супротно, тј. да је периодична са периодом T, тј. $f(x+T)=f(x)$ за $\forall x\in D$. Тада се и нуле периодично понављају , па ако би узели $x=-T$ добијамо контрадикцију $f(0)=f(-T)$ – што је немогуће јер $f(0)=0$, а $f(-T)<0$).

4° Како је домен $D=(-\infty,+\infty)$ потребно је одредити два лимеса: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Њих истовремено тражимо: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\cdot\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=\arcsin 0=0.$

Како домен нема прекида (тј. $f(x)$ је дефинисана на целом скупу $\mathbb{R}$) то $f(x)$ нема вертикалних асимптота.

Како је $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=0$) права $y=0$ је обострана хоризонтална асимптота.

Како функција има хоризонталну асимптоту (са обе стране) то она нема косих асимптота.

5° $f'(x)=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2\sqrt{\dfrac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2\cdot\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}}$, па добијамо да је $f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{1+x^2}, & x<-1\\ \frac{2}{1+x^2}, & -1<x<1\\ \frac{-2}{1+x^2}, & x>1\end{cases}$.

Одавде добијамо знак првог извода:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	x	$+$	x	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Функција је растућа на $(-1,1)$, а опадајућа на $(-\infty,-1)$, и на $(1,+\infty)$.

Минимум је тачка $M_1(-1,-\frac{\pi}{2})$, а максимум је $M_2(1,\frac{\pi}{2})$.

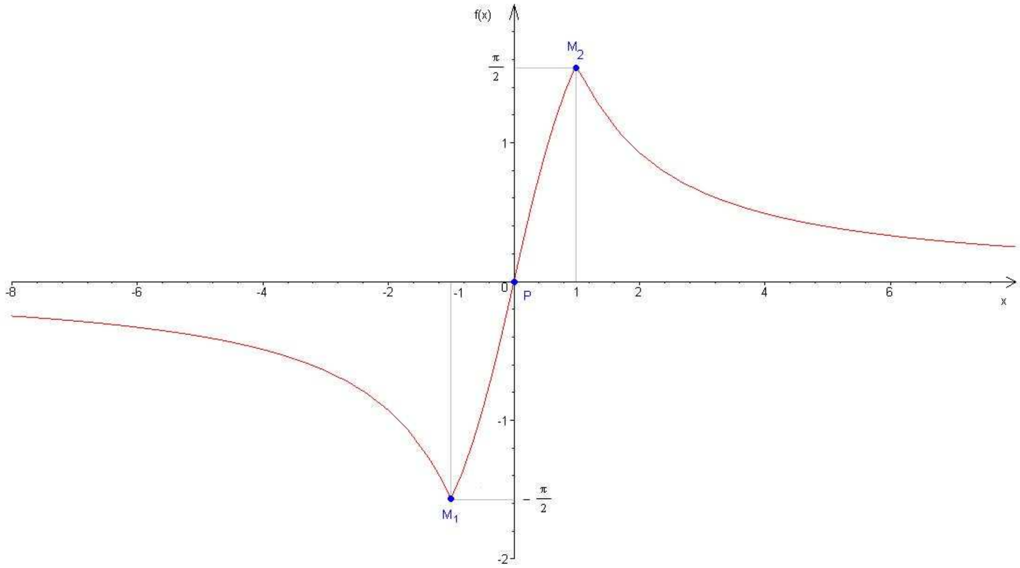
Напомена. Нагласимо да у тачкама M_1 и M_2 функција $f(x)$ има шпиц (у тим тачкама функција јесте непрекидна, али није диференцијабилна). Коефицијент правца тангенте на криву са леве стране тачке M_1 је $k_1=f'_-(-1)=-1$, а са десне стране је $k_2=f'_+(-1)=1$ (стога се ове 2 криве у тачки M_1 секу под углом од 90° — прва са x-осом заклапа угао од 45° јер је $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1=-1\Rightarrow\varphi_1=-45^\circ$ и слично за другу имамо да је $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2=1\Rightarrow\varphi_2=45^\circ$).

(Ова анализа шпицева се не очекује од студената на испиту!)

6° $f''(x)=\begin{cases}\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x<-1\\ \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & -1<x<1\\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x>1\end{cases}$ и одавде имамо таблицу:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	x	$+$	0	$-$	x	$+$
$f(x)$	$\cap$	P_1	$\cup$	P_2	$\cap$	P_3	$\cup$

Функција има превојне тачке: $P_1=M_1(-1,-\frac{\pi}{2})$, $P_2=Y(0,0)$ и $P_3=M_2(1,\frac{\pi}{2})$.



■

3. $f(x) = 1 - x - \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$.

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када је дефинисана функција $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$, тј. кад је $\dfrac{x^3}{x+3}$ дефинисано (за $x \neq -3$) и када је $\dfrac{x^3}{x+3} \geqslant 0$. Последњу неједначину решавамо помоћу таблице:

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,+\infty)$
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	x	0	$+$	$+$
$\frac{x^3}{x+3}$	$+$	x	$-$	0	$+$

Тиме смо добили да су корен, а самим тим и функција $f(x)$, дефинисани када је $x < -3$ или кад је $x \geqslant 0$, тј. $D = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$.

2° Пресек са y-осом је $Y(0,1)$.

Нађимо када је $f(x) = 0$. Тад решавамо ирационалну једначину $1 - x - \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}} = 0$. Када пребацимо корен на другу страну добијамо $1-x = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$. Да бисмо смели да квадрирамо потребно је да су обе стране истог знака, тј. како је корен увек ненегативан, треба и да је $1-x \geqslant 0$, тј. $x \leqslant 1$ (то је услов под којим смемо да квадрирамо; поред тог услова све време водимо и рачуна о D јер је тада функција дефинисана). Када квадрирамо добијамо једначину $1 - 2x + x^2 = \dfrac{x^3}{x+3}$, односно када помножимо са $x+3$ (што смемо јер $-3 \notin D$) добијамо квадратну једначину $x^2 - 5x + 3 = 0$. Њена решења су $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ (ово решење задовољава и услов $x \leqslant 1$ и припада D) и $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ (ово решење отпада јер не задовољава услов $x \leqslant 1$). Тиме смо добили да ова функцију има само једну нулу $N(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, 0)$.

Одредимо када је $f(x) > 0$. То је еквивалентно са ирационалном неједначином $1 - x > \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$. Да би смо смели да квадрирамо потребно је да обе стране буду ненегативне (корен је то увек, али за леву страну опет долазимо до услова $1 - x \geqslant 0$, тј. $x \leqslant 1$). Долазимо до неједначине $1 - 2x + x^2 > \dfrac{x^3}{x+3}$. Сада није згодно да множимо са $x+3$ (јер овај израз може бити и негативан), него ћемо да све пребацимо на леву страну и сведемо на заједнички именилац: $1 - 2x + x^2 - \dfrac{x^3}{x+3} > 0$, тј. $\dfrac{x^2-5x+3}{x+3} > 0$. За овај израз имамо таблицу:

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,\frac{5-\sqrt{13}}{2})$	$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$	$(\frac{5-\sqrt{13}}{2},\frac{5+\sqrt{13}}{2})$	$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$	$(\frac{5+\sqrt{13}}{2},+\infty)$
x^2-5x+3	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^3}{x+3}$	$-$	x	$+$	0	$-$	0	$+$

па је решење неједначине $\dfrac{x^2-5x+3}{x+3}>0$ једнако $x\in(-3,\frac{5-\sqrt{13}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{13}}{2},+\infty)$. Када још убацимо услов да мора бити $x\leqslant 1$ и $x\in D$ добијамо да је $f(x)>0$ за $x\in[0,\frac{5-\sqrt{13}}{2})$. $f(x)<0$ на свим осталим интервалима на којима је функција дефинисана (и није нула), тј. за $x\in(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$. Ово све можемо представити таблично као

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,\frac{5-\sqrt{13}}{2})$	$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$	$(\frac{5-\sqrt{13}}{2},+\infty)$
$f(x)$	$-$	x	x	$+$	$+$	0	$-$

3° Функција $f(x)$ није ни парна ни непарна ни периодична (то закључујемо на основу D).

4° Како је домен $D=(-\infty,-3)\cup[0,+\infty)$ потребно је одредити следећа три лимеса и једну вредност функције: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-}f(x)$, $f(0)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}1-x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)\cdot\frac{1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x+x^2-\frac{x^3}{x+3}}{1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+3}{(x+3)(1-x)-\sqrt{x^3(x+3)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+3}{-x^2-2x+3-\sqrt{x^4+3x}}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}=\sqrt{\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=-\frac{1}{2}$$

(овде смо користили да је $x+3=-|x+3|=-\sqrt{(x+3)^2}$ када смо га убацивали под корен; разлог је јер због $x\to-\infty$ важи $x+3<0$).

$$\lim_{x\to-3^-}f(x)=\lim_{x\to-3^-}1-x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=\left[1-(-3)-\sqrt{\frac{(-3)^3}{-3^-+3}}=4-\sqrt{\frac{-27}{0-}}=4-\sqrt{+\infty}\right]=-\infty.$$

$f(0)=1$ смо већ израчунали (овде не тражимо граничну вредност, него вредност функције јер $0\in D$).

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}1-x-\sqrt{\frac{x^2}{1+\frac{3}{x}}}=\left[1-(+\infty)-\sqrt{+\infty}\right]=-\infty.$$

Како је $\lim\limits_{x\to-3^-}f(x)=-\infty$ права $x=-3$ је вертикална асимптота (са леве стране).

Како је $f(0)=1$ коначан број, то овде иако је прекид немамо вертикалну асимптоту.

Како је $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\dfrac{1}{2}$ права $y=-\frac{1}{2}$ је лева хоризонтална асимптота.

Како је $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ то са десне стране функција нема хоризонталну асимптоту, али овде може имати косу асимптоту.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-1-\sqrt{\frac{x}{x+3}}}{1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{x}}}=-2.$$

Овај лимес је коначан и $-2\neq0$, па тражимо коефицијент n (овде $x\to+\infty$, па је $x+3>0$, тј. $x+3=\sqrt{(x+3)^2}$):

$$n=\lim_{x\to+\infty}f(x)-k\cdot x=\lim_{x\to+\infty}1-x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}-(-2)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x-\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)\cdot\frac{1+x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{1+x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x+x^2-\frac{x^3}{x+3}}{1+x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+7x+3}{(x+3)(1+x)+\sqrt{x^3(x+3)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+7x+3}{x^2+4x+3+\sqrt{x^4+3x}}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}=\sqrt{\frac{1}{x^4}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{5}{2}.$$

И овај лимес је коначан. Стога је права $y=-2x+\frac{5}{2}$ десна коса асимптота.

5° $f'(x)=-1-(x+\frac{9}{2})\cdot\sqrt{\dfrac{x}{(x+3)^3}}$, па опет решавамо ирационалне једначине и неједначине. Решаваћемо $f'(x)>0$ (потпуно аналогно би ишла и одговарајућа једначина) јер се увек трудимо код ирационалних неједначина да нам корен буде на мањој страни (тако имамо само 1 случај, док кад је корен на већој страни имамо 2 одвојена случаја): $-1-(x+\frac{9}{2})\cdot\sqrt{\frac{x}{(x+3)^3}}>0$, односно $-(x+\frac{9}{2})\cdot\sqrt{\frac{x}{(x+3)^3}}>1$. Да би смели да квадрирамо потребно је да су изрази и на левој и на десној страни позитивни, тј. треба да важи услов $x<-\frac{9}{2}$ (поред тог услова и корен треба да је дефинисан, тј. $x\in D$). Када квадрирамо и средимо овај израз добијамо $I=\frac{-\frac{27}{4}(x+4)}{(x+3)^3}>0$, а њега решавамо помоћу таблице

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-3)$	-3	$(-3,+\infty)$
$-\frac{27}{4}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+3)^3$	$-$	$-$	$-$	x	$+$
I	$-$	0	$+$	x	$-$

Дакле, решење неједначине $I>0$ је $x\in(-4,-3)$, али пресек тога решења са условом $x<-\frac{9}{2}$ је празан скуп, тј. никада није $f'(x)>0$. Значи, увек је $f'(x)>0$, тј. имамо таблицу:

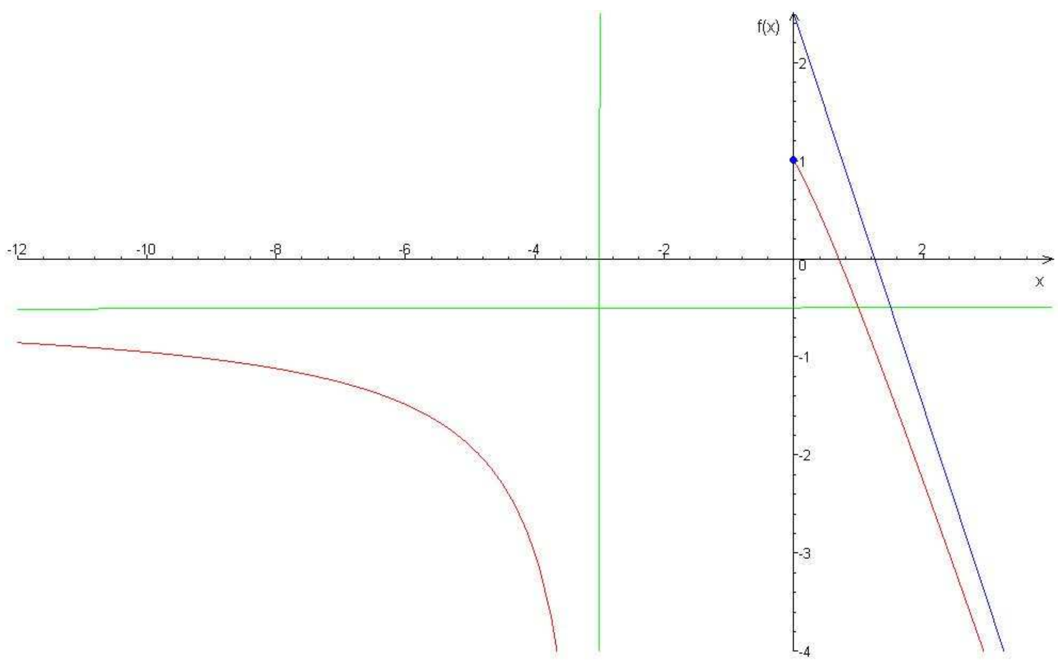
	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	x	x	x	$-$
$f(x)$	$\searrow$	x	x		$\searrow$

Функција је опадајућа на $(-\infty,-3)$ и на $(0,+\infty)$. Локалних максимум је тачка $M(0,1)$.

6° $\quad f''(x)=\frac{-27}{4\sqrt{x(x+3)^5}}$. Како је корен увек позитиван када је дефинисан имамо таблицу:

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	x	x	x	$-$
$f(x)$	$\cap$	x	x		$\cap$

Функција нема превојних тачака.



■

4. $f(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{2x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када су дефинисане функције $g(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{2x-1}$ и $h(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$.

Функција $g(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{2x-1}$ је дефинисана када су дефинисане функције $2(x-1)^2$ и $2x-1$ (то је за свако $x\in\mathbb{R}$) и кад је $2x-1\neq 0$, тј. за $x\neq\frac{1}{2}$.

Функција $h(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ је дефинисана када је дефинисана функција $\frac{1}{x-1}$, а то је за $x\neq 1$.

Стога је функција $f(x)$ дефинисана када је $x\neq\frac{1}{2}$ и $x\neq 1$, односно домен или област дефинисаности функције f је $D=(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$.

2° $f(0)=\dfrac{2(0-1)^2}{2\cdot 0-1}e^{\frac{1}{0-1}}=\dfrac{-2}{e}$, па је пресек са y-осом тачка $Y(0,\dfrac{-2}{e})\approx(0,-0.736)$.
Увек је $e^{\frac{1}{x-1}}>0$, а $2(x-1)^2=0$ за $x=1$, па би $x=1$ била једина нула да 1 припада домену D (овако функција f нема нула). Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}}>0$, $2(x-1)^2>0$ за свако $x\in D$ и $2x-1>0$ за $x>\frac{1}{2}$, а $2x-1<0$ за $x<\frac{1}{2}$ добијамо да је функција $f(x)<0$ за $x\in(-\infty,\dfrac{1}{2})$, а $f(x)>0$ за $x\in(\dfrac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$.

3° Како домен $D=(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$ није симетричан у односу на 0 функција $f(x)$ није ни парна ни непарна (II начин је: $f(-2)=-\frac{18}{5}e^{-\frac{1}{3}}\neq\pm\frac{2}{3}e=\pm f(2)$, па није ни парна ни непарна, јер смо нашли вредност $x=2\in D$ за коју није испуњено ни својство парности ни непарности – по дефиницији оба својства морају да важе $\forall x\in D$).
Функција $f(x)$ није ни периодична. (доказ: претпоставимо супротно, тј. да је периодична са периодом T. Тада је $f(x+T)=f(x)$ $\forall x\in D$, али ако би узели $x=\frac{1}{2}-T$ добијамо контрадикцију $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2}-T)$ – то је немогуће јер за $\frac{1}{2}$ функција није дефинисана, а за $\frac{1}{2}-T$ јесте).

4° Како је домен $D=(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$ потребно је одредити следећих шест лимеса:
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ јер кад $x\to-\infty$ онда $\frac{1}{x-1}\to 0$, па $e^{\frac{1}{x-1}}\to e^0=1$, а $\dfrac{2(x-1)^2}{2x-1}=\dfrac{2x^2-4x+2}{2x-1}=\dfrac{2x-4+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}\to-\infty$ кад $x\to-\infty$ јер $\frac{1}{x}\to 0$.
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=-\infty$ јер кад $x\to\frac{1}{2}^-$ онда имамо да $\frac{1}{x-1}\to-2$, па $e^{\frac{1}{x-1}}\to e^{-2}>0$, $2(x-1)^2\to 2(\frac{1}{2}-1)^2=\frac{1}{2}>0$ и $2x-1\to 2\cdot\frac{1}{2}^- -1=0^-$.
Потпуно аналогно се добија $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$ јер кад $x\to 1^-$ онда $\frac{1}{x-1}\to-\infty$, па $e^{\frac{1}{x-1}}\to 0$, а и $\dfrac{2(x-1)^2}{2x-1}\to\dfrac{2(1-1)^2}{2\cdot 1-1}=0$.
За израчунавање $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ потребно је коришћење Лопиталовог правила јер је то лимес облика $0\cdot\infty$ (прво ћемо свести на лимес облика $\frac{\infty}{\infty}$, па онда можемо да применимо Лопиталово правило; са $\frac{0}{0}$ би се добио тежи лимес!):

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)^2}{2x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\dfrac{2x-1}{2(x-1)^2}}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{-\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}}{-\dfrac{x}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\dfrac{x}{(x-1)}}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{-\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1}=+\infty.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (потпуно аналогно као кад $x\to-\infty$).

Како смо добили да је $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=-\infty$ (а и $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=+\infty$) права $x=\frac{1}{2}$ је вертикална асимптота.
Како је $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ и права $x=1$ је вертикална асимптота.
Како су $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ бесконачни функција нема хоризонталних асимптота, али може имати косих.
Како се сви лимеси потпуно аналогно рачунају и за $x\to-\infty$ и за $x\to+\infty$, свуда ћемо писати $x\to\pm\infty$.
$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2(x-1)^2}{(2x-1)x}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\frac{4}{x}+2}{2-\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{2}{2}\cdot e^0=1$. Коефицијент n добијамо након мало сређивања: $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-k\cdot x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}-(2x^2-x)}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2(1-\frac{1}{x})\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}-3+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}=$

$\dfrac{2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 + 0}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Стога је права $y = x - \frac{1}{2}$ обострана коса асимптота.

5° $f'(x) = 2\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}(2x^2 - 4x + 1)}{(2x-1)^2}$. Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ и $(2x-1)^2 > 0$ ($x = \frac{1}{2} \notin D$), знак првог извода зависи само од квадратног тринома $2x^2 - 4x + 1$, чије су нуле $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$:

	$(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
$e^{\frac{1}{x-1}}$	+	+	+	+	+	x	+	+	+
$2x^2 - 4x + 1$	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$(2x-1)^2$	+	+	+	x	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	+	x	+	x	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	x	$\searrow$	x	$\searrow$	min	$\nearrow$

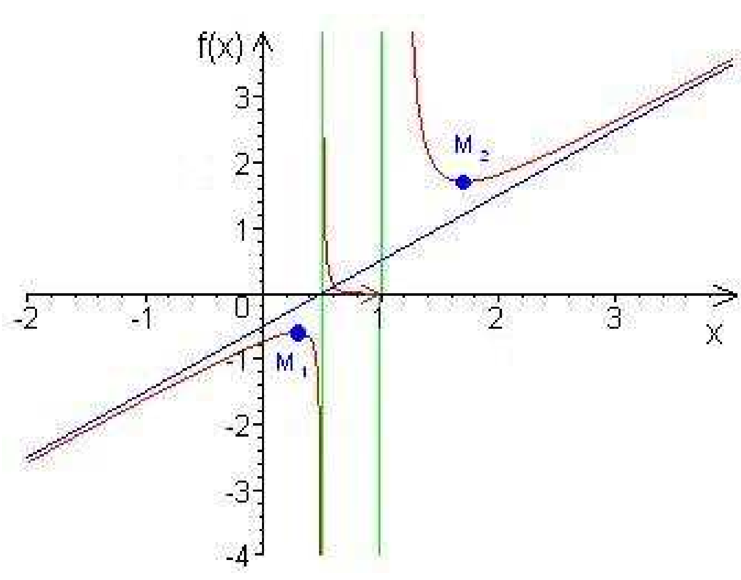
Потребно је још одредити вредности у локалном максимуму и локалном минимуму: $f_{\max} = f(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{e^{-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}$ и $f_{\min} = f(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{e^{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}$. Стога имамо да је локални максимум тачка $M_1(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{e^{-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}) \approx (0.293, -0.587)$, а локални минимум тачка $M_2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{e^{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}) \approx (1.707, 1.704)$.

Да не бисмо оптерећивали график са бројевима који заузимају доста места означићемо са $a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6° $f''(x) = 2\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}(2x^2 - 2x + 1)}{(2x-1)^3(x-1)^2}$. Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, $2x^2 - 2x + 1 > 0$ (јер је $a = 2 > 0$, а $D = -4 < 0$) и $(x-1)^2 > 0$ ($x = 1 \notin D$), знак првог извода зависи само од члана $(2x-1)^3$:

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$e^{\frac{1}{x-1}}$	+	+	+	x	+
$2x^2 - 2x + 1$	+	+	+	+	+
$(2x-1)^3$	−	x	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	x	+
$f''(x)$	−	x	+	x	+
$f(x)$	$\cap$	x	$\cup$	x	$\cup$

Функција нема превојних тачака.



■

5. $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$.

Решење. 1° Како је $1+\ln x \neq 0$ за $x \neq e^{-1} = \frac{1}{e}$ и логаритам $\ln x$ је дефинисан за $x > 0$ имамо да је домен функције: $D = (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$.

2° На скупу D на коме је дефинисана, ова функција нема нула. Знак функције у области D зависи само од знака имениоца, па имамо да је

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
x	x	x	$+$	x	$+$
$1+\ln x$	x	x	$-$	x	$+$
$f(x)$	x	x	$-$	x	$+$

Ово можемо записати и као: $f(x) < 0$ за $x \in (0, \frac{1}{e})$, $f(x) > 0$ за $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$.

3° Функција није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° Граничне вредности на крајевима домена су: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ (јер $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ и $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty$), $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ (јер $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-} 1+\ln x = 0^-$), $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (јер $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+} 1+\ln x = 0^+$), $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
Код последњег лимеса смо применили Лопиталово правило (можемо јер и именилац и бројилац теже ка $+\infty$): $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+\ln x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

На основу претходног имамо да је права $x = e^{-1}$ вертикална асимптота. Како при одређивању да ли има косу асимптоту добијамо $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\ln x} = 0$ следи да функција нема косу асимптоту (због $k = 0$ добили би $n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - k\cdot x = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

5° Први извод је $f'(x) = \dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	x	x	$-$	x	$-$	0	$+$
$f(x)$	x	x	$\searrow$	x	$\searrow$	min	$\nearrow$

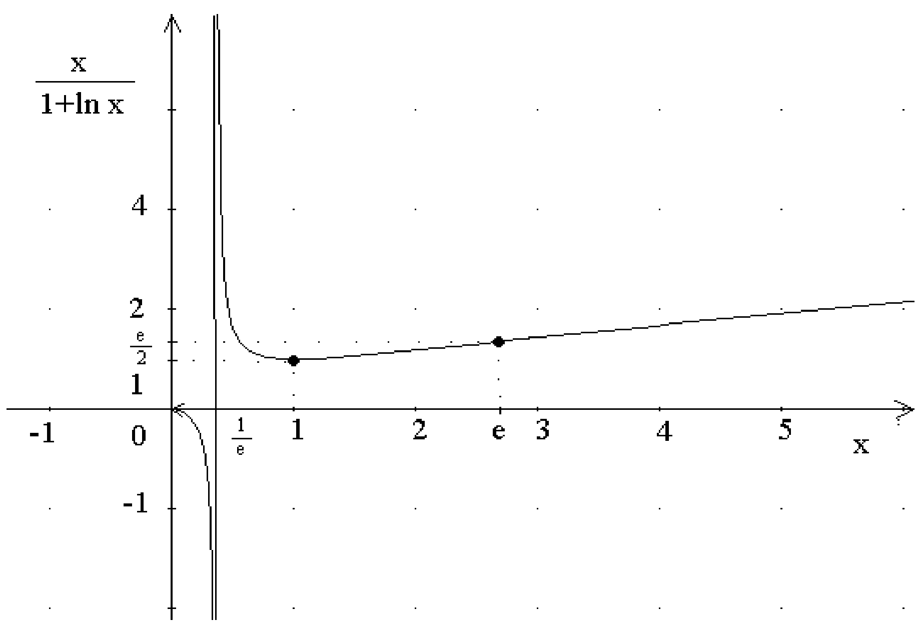
Минимум је $M(1,1)$.

6° $f''(x) = \dfrac{1-\ln x}{x(1+\ln x)^3}$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f''(x)$	x	x	$-$	x	$+$	0	$-$
$f(x)$	x	x	$\cap$	x	$\cup$	п.т.	$\cap$

Превојна тачка је $P(e, \frac{e}{2})$.

На основу свега овога цртамо график.



■

6. $f(x) = f(x) = \dfrac{1+\ln|x|}{x(1-\ln|x|)}$.

Решење. 1° Домен функције је $D = (-\infty, -e) \cup (-e, 0) \cup (0, e) \cup (e, +\infty)$.

2° Нуле функције су $x = \pm\dfrac{1}{e}$. Функција мења знак и у тачкама прекида, па имамо да је $f(x) < 0$ за $x \in (-e, -e^{-1}) \cup (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$, $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -e) \cup (-e^{-1}, 0) \cup (e^{-1}, e)$.

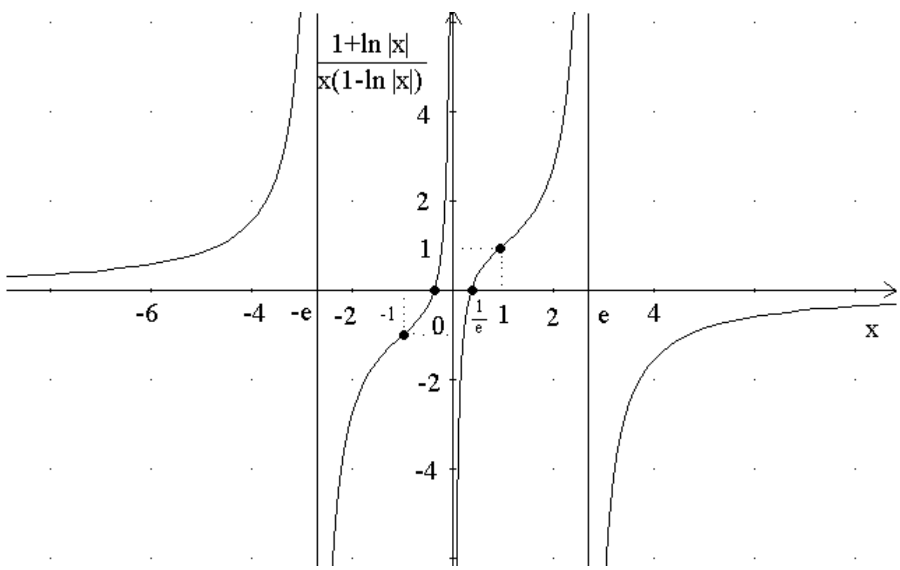
3° Функција је непарна (симетрична у односу на координатни почетак).

4° Граничне вредности на крајевима домена D су: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-e^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-e^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$.

Праве $x = -e$, $x = 0$ и $x = e$ су вертикалне асимптоте, а права $y = 0$ је обострана хоризонтална асимптота.

5° За $x < 0$ први извод је $f'(x) = \dfrac{1+\ln^2(-x)}{x^2(1-\ln(-x))^2}$, а за $x > 0$ први извод је $f'(x) = \dfrac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2}$, па је функција $f(x)$ растућа на сваком од интервала где је дефинисана.

6° За $x < 0$ други извод је $f''(x) = \dfrac{2\ln(-x)(\ln^2(-x) - \ln(-x) + 2)}{x^3(1-\ln(-x))^3}$, а за $x > 0$ други извод је $f''(x) = \dfrac{2\ln x(\ln^2 x - \ln x + 2)}{x^3(1-\ln x)^3}$. Једине превојне тачке су $x = -1, y = -1$ и $x = 1, y = 1$. Други фактор у бројиоцу је увек позитиван, јер је дискриминанта квадратног тринома $u^2 - u + 2$ (за $x > 0$ уводимо смену $u = \ln x$, а за $x < 0$ $u = \ln(-x)$) негативна. Функција је $\cup$ ($f''(x) > 0$) на интервалима $(-\infty, -e)$, $(-1, 0)$ и $(1, e)$, а $\cap$ на $(-e, -1)$, $(0, 1)$ и $(e, +\infty)$.

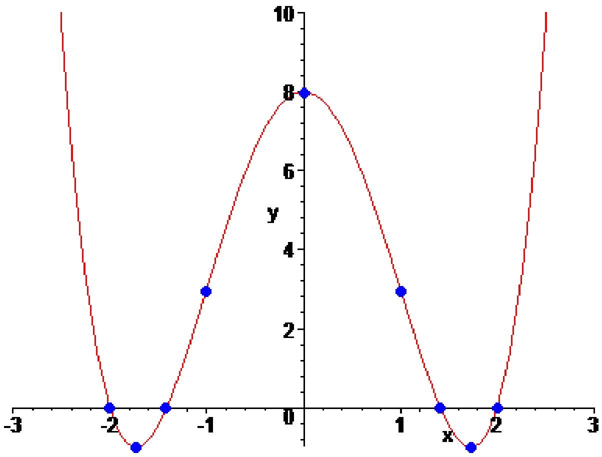


■

7. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8.$

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

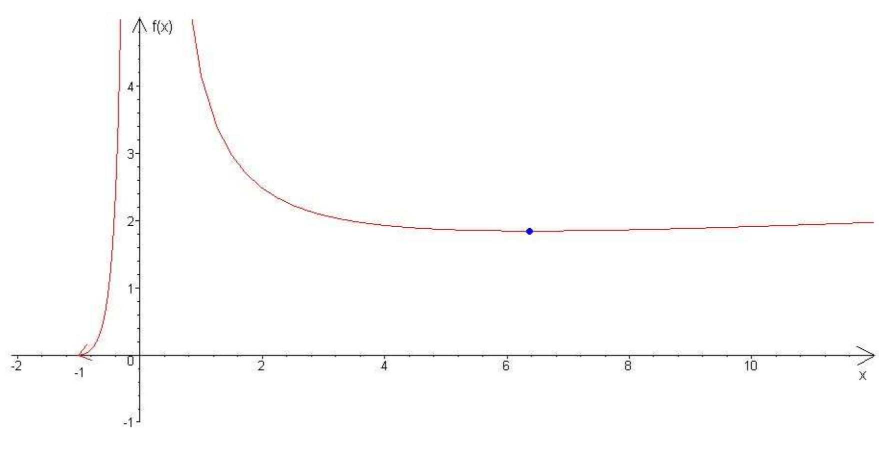
2° Нуле су $x_{1,2} = \pm 2$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Знак: $+ \boxed{-2} - \boxed{-\sqrt{2}} + \boxed{\sqrt{2}} - \boxed{2} +$. Пресек са y-осом је $Y(0,8)$.
3° Није периодична. Јесте парна.
4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Нема асимптота.
5° $f' = 4x(x^2-3)$. Монотоност: $\searrow \boxed{-\sqrt{3}} \nearrow \boxed{0} \searrow \boxed{\sqrt{3}} \nearrow$. Лок. мин су $M_1(-\sqrt{3},-1)$ и $M_3(\sqrt{3},-1)$, а лок. макс. је $M_2(0,8)$.
6° $f'' = 12(x^2-1)$. Конвексност: $\cup \boxed{-1} \cap \boxed{1} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-1,3)$ и $P_2(1,3)$.



■

8. $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln^2(x+1)}$.

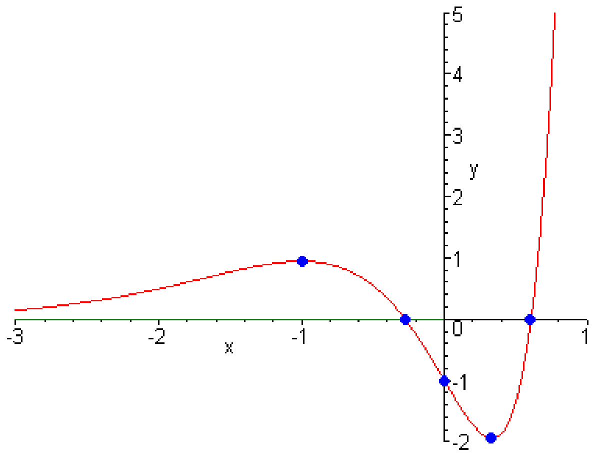
Резултати. 1° Функција $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln^2(x+1)}$ је дефинисана на $D = (-1,0)\cup(0,+\infty)$.
2° Функција нема нула и за све вредности из домена је $f(x) > 0$. Нема ни пресек са y-осом јер $0 \notin D$.
3° Функција није ни парна, ни непарна, ни периодична.
4° Граничне вредности на крајевима D су $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Функција има вертикалну асимптоту $x = 0$, а нема десну хоризонталну асимптоту (јер је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) и нема десну косу асимптоту (јер се добија $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$).
5° $f'(x) = \dfrac{\ln(x+1)-2}{\ln^3(x+1)}$. Функција опада на интервалу $(0, e^2-1)$, а расте на $(-1,0)$ и на $(e^2-1,+\infty)$. Стога има минимум за $x = e^2 - 1 \approx 6.389$ и $f_{\min} = f(e^2-1) = \frac{1}{4}e^2 \approx 1.847$, тј. има локални минимум $M(e^2-1, \frac{1}{4}e^2)$.
6° $f''(x) = -2\dfrac{\ln(x+1)-3}{(x+1)\ln^4(x+1)}$. $f''(x) > 0$ на интервалу $(-1,0)$ и на $(0, e^3-1)$ и $f(x)$ је тад $\cup$, а на $(e^3-1,+\infty)$ је $f''(x) < 0$ и $f(x)$ је тад $\cap$. Превојна тачка је за $x = e^3 - 1 \approx 19.086$ ($f(e^3-1) = \frac{1}{9}e^3 \approx 2.232$) и то је $P(e^3-1, \frac{1}{9}e^3)$.



■

9. $f(x) = (6x^2 - 2x - 1)e^{2x}$.

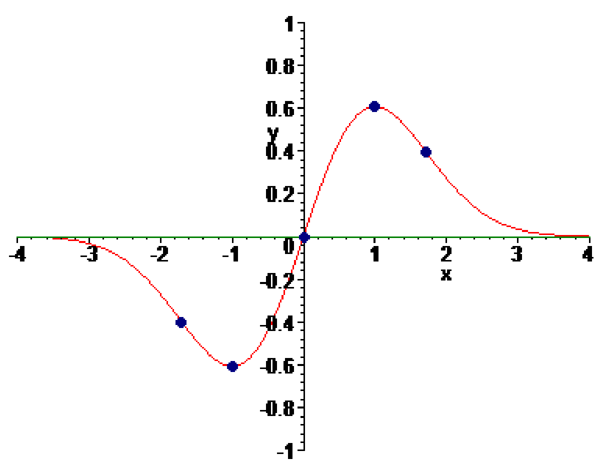
Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.
2° Нуле су $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$. Знак: $+ \boxed{\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}} - \boxed{\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}} +$. Пресек са y-осом је $Y(0, -1)$.
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.
4° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Нема вер.ас, нема косих ас, лева хор.ас. $y = 0$.
5° $f' = 4(3x^2 + 2x - 1)e^{2x}$. Монотоност: $\nearrow \boxed{-1} \searrow \boxed{1/3} \nearrow$. Лок. мин. је $M_1(\dfrac{1}{3}, -e^{2/3})$. Лок. макс. је $M_2(-1, 7e^{-2})$.
6° $f'' = 8x(3x+5)e^{2x}$. Конвексност: $\cup \boxed{-5/3} \cap \boxed{0} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-\dfrac{5}{3}, 19e^{-10/3})$ и $P_2(0, -1)$.



■

10. $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

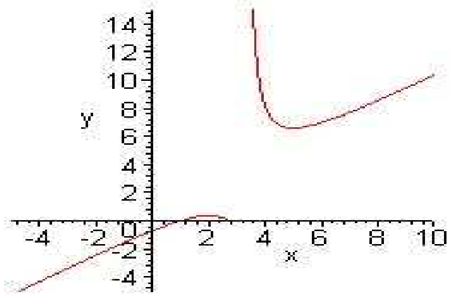
Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.
2° Нула је $x = 0$. Знак: $- \boxed{0} +$. Пресек са y-осом је нула $Y(0,0)$.
3° Није периодична. Јесте непарна.
4° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Нема вер.ас, обострана хор.ас. $y = 0$.
5° $f' = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Монотоност: $\searrow \boxed{-1} \nearrow \boxed{1} \searrow$. Лок. мин. је $M_1(-1, -e^{-1/2})$. Лок. макс. је $M_2(1, e^{-1/2})$.
6° $f'' = x(x^2 - 3)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Конвексност: $\cap \boxed{-\sqrt{3}} \cup \boxed{0} \cap \boxed{\sqrt{3}} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-3/2})$, $P_2(0,0)$ и $P_3(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2})$.



■

11. $f(x) = (x-1)e^{1/(x-3)}$.

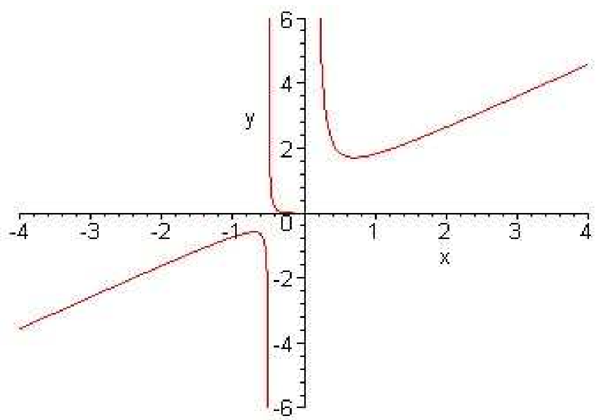
Резултати. 1° Област дефинисаности је $D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.
2° Нула је $x = 1$. За $x \in (-\infty, 1)$ је $f(x) < 0$, а за $x \in (1,3) \cup (3, +\infty)$ је $f(x) > 0$. Пресек са y-осом: $Y(0, \frac{-1}{\sqrt[3]{e}})$.
3° Ни парна, ни непарна, ни периодична.
4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Права $x = 3$ је вертикална асимптота (са десне стране). Функција нема хоризонталних асимптота, али је права $y = x$ ($k = 1$, $n = 0$) обострана коса асимптота.
5° Први извод је $f'(x) = \dfrac{(x-2)\cdot(x-5)}{(x-3)^2}e^{1/(x-3)}$. $f(x)$ опада на интервалу $(2,3)$ и на интервалу $(3,5)$, а расте на интервалу $(-\infty, 2)$ и на интервалу $(5, +\infty)$. Локални максимум је тачка $M_1(2, \frac{1}{e})$, а минимум је тачка $M_2(5, 4\sqrt{e})$.
6° Други извод је $f''(x) = \dfrac{5x-13}{(x-3)^3}e^{1/(x-3)}$. Функција је $\cap$ на интервалу $(-\infty, \frac{13}{5})$, а $\cup$ на интервалима $(\frac{13}{5}, 3)$ и $(3, +\infty)$. Превојна тачка је $P(\frac{13}{5}, \frac{8}{5}e^{-5/2})$.



■

12. $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x+1}\, e^{\frac{1}{x}}$.

Резултати. 1° Област дефинисаности је $D = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$.
2° Нула нема. За $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ је $f(x) < 0$, а за $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$ је $f(x) > 0$.
3° Ни парна, ни непарна, ни периодична.
4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Права $x = -\frac{1}{2}$ је обострана вертикална асимптота, а права $x = 0$ је десна вертикална асимптота. Функција има обострану косу асимптоту $y = x + \frac{1}{2}$.
5° Први извод је $f'(x) = \dfrac{2e^{1/x}\cdot(2x^2-1)}{(2x+1)^2}$. $f(x)$ опада на интервалима $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, а расте на интервалима $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ и $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Локални максимум је тачка $M_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e^{-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}) \approx (-0.707, -0.587)$, а локални минимум је тачка $M_2(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1}) \approx (0.707, 1.704)$.
6° Други извод је $f''(x) = \dfrac{2e^{1/x}\cdot(2x^2+2x+1)}{(2x+1)^3\cdot x^2}$. Функција је $\cap$ на интервалу $(-\infty, -\frac{1}{2})$, а $\cup$ на интервалима $(-\frac{1}{2}, 0)$ и $(-2, +\infty)$. Превојних тачака нема.



■

13. $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

Решење. 1° Домен је $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

2° Пресек са y-осом је $Y(0, \sqrt{2})$. Функција има једну нулу: $N(-2, 0)$. Знак:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$x+2$	$-$	0	$+$
$\sqrt{x^2+2}$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

3° Није ни парна ни непарна (јер нуле нису симетричне у односу на $x=0$) ни периодична (нуле се не понављају периодично).

4° За наредне лимесе се не може користити Лопиталово правило иако су облика $\dfrac{\infty}{\infty}$ (пробајте!).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} = -\sqrt{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1.$$

На основу претходно одређених лимеса имамо да је права $y=1$ је десна хоризонтална асимптота, а права $y=-1$ је лева хоризонтална асимптота и $f(x)$ нема вертикалних и косих асимптота.

5° $f' = \dfrac{2-2x}{(x^2+2)^{3/2}}$. Монотоност смо испитали помоћу следеће таблице:

	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$1+2x$	$+$	0	$-$
$(x^2+1)^{3/2}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

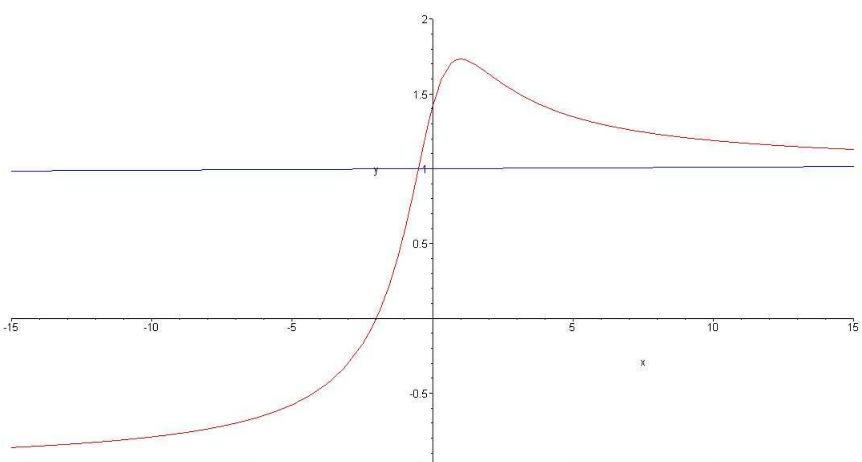
Локални минимум је $M(1, \sqrt{3})$.

6° $f'' = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+2)^{5/2}}$. Конвексност смо испитали помоћу следеће таблице:

	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},2)$	2	$(2,+\infty)$
$4x^2-6x-4$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x^2+1)^{5/2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	P_1	$\cap$	P_2	$\cup$

Превојне тачке су $P_1\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ и $P_2\left(2, \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

На основу свега овога скицирамо график функције:



■

14. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}\,.$

Резултати. 1° Домен је $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° Нула нема. Знак: $+$ (1) $-$. Пресек са y-осом је $Y(0,1)$.

3° Није ни парна ни непарна (јер домен D_f није симетричан у односу на 0), ни периодична.

4° $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ права $x = 1$ је вертикална асимптота са обе стране.

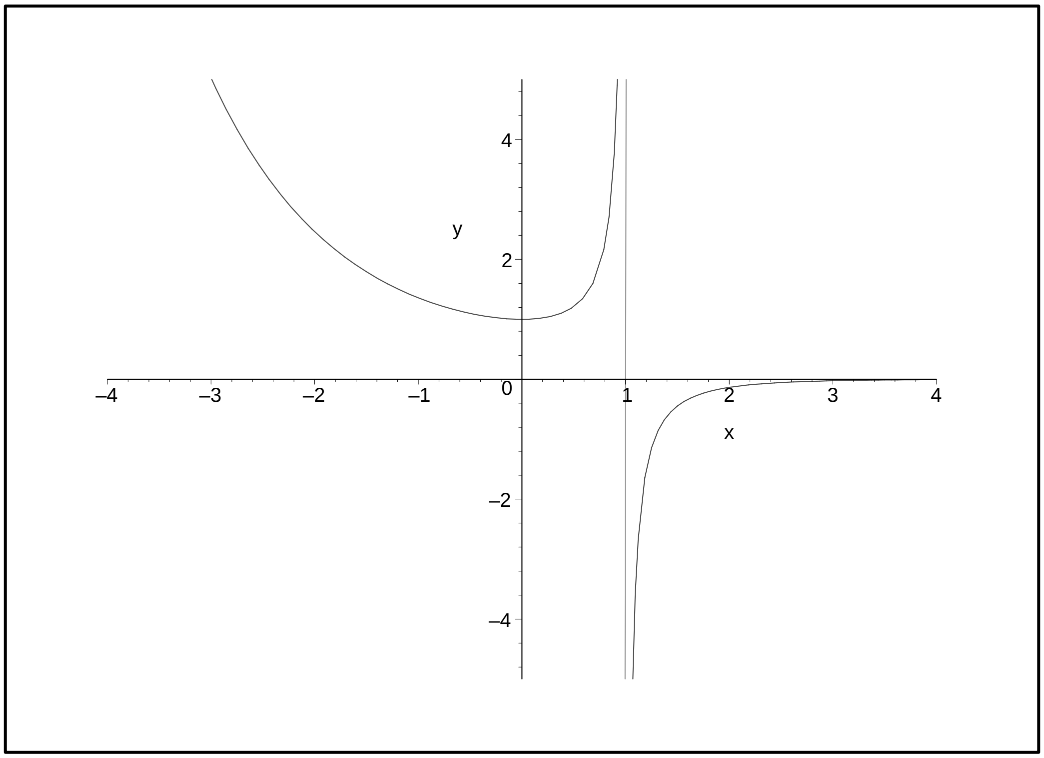
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \;\Rightarrow$ има десну хоризонталну асимптоту $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (треба 1 Л.П.) $\Rightarrow$ нема леву хоризонталну асимптоту.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ (треба 2 Л.П.) $\Rightarrow$ нема леву косу асимптоту.

5° $f' = \dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$. Монотоност: $\searrow 0 \nearrow$ (1) $\nearrow$. Локални минимум је $M(0,1)$.

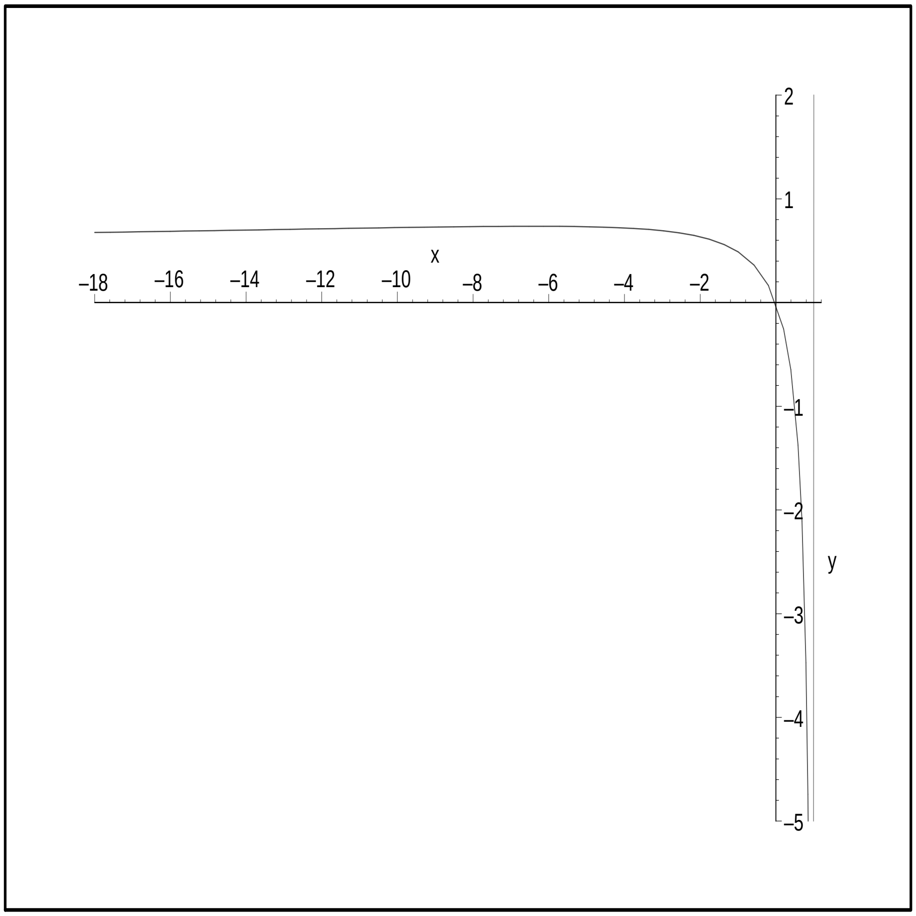
6° $f'' = \dfrac{(1+x^2)e^{-x}}{(1-x)^3}$. Конвексност: $\cap$ (1) $\cup$. Нема превојних тачака.



■

15. испит 4. октобар II 2009. $\quad f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}$.

Резултати. 1° Домен је $D=(-\infty,1)$.
2° Нула је $N(0,0)$ и то је и пресек са y-осом. Знак: за $x\in(-\infty,0)$ је $f(x)>0$, а за $x\in(0,1)$ је $f(x)<0$.
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.
4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.
Има вер.ас. праву $x=1$, нема косих ас, лева хор.ас. $y=0$.
5° $f'=\dfrac{-2+\ln(1-x)}{2(1-x)^{3/2}}$. Монотоност: $\nearrow \ \boxed{-e^2+1}\ \searrow\ 1\ \ x$. Локални максимум је тачка $M(-e^2+1,\frac{2}{e})$.
6° $f''=\dfrac{-8+3\ln(1-x)}{4(1-x)^{5/2}}$. Конвексност: $\cup\ \boxed{-e^{8/3}+1}\ \cap\ 1\ \ x$. Превојна тачка је $P\left(-e^{8/3}+1,\frac{8}{3e^{4/3}}\right)$.



■

16. 4. II колоквијум 2007. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$.

Решење. 1° Домен је $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, тј. $D = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$.

2° Пресек са y-осом је $Y(0,4)$. Функција има једну нулу: $N(-2,0)$. Знак:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
x^2+4x+4	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	x	$+$
$f(x)$	$-$	0	$-$	x	$+$

3° Није ни парна ни непарна (како домен D није симетричан у односу на $x=0$) ни периодична (како се прекиди у домену не понављају периодично).

4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+4+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$.

Аналогно се добија и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (а могли смо да користимо и Лопиталово правило).

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty$.

Аналогно се добија и $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

На основу претходно одређених лимеса имамо да је права $x=1$ је вертикална асимптота, а да $f(x)$ нема хоризонталних асимптота.

Остаје да испитамо косе асимптоте. Како је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - k\cdot x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} - 1\cdot x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4x+4-x^2-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+4}{x+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$.
Стога је права $y = x+3$ обострана коса асимптота.

5° $f' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Монотоност смо испитали помоћу следеће таблице:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
x^2+2x	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	x	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	x	$\searrow$	min	$\nearrow$

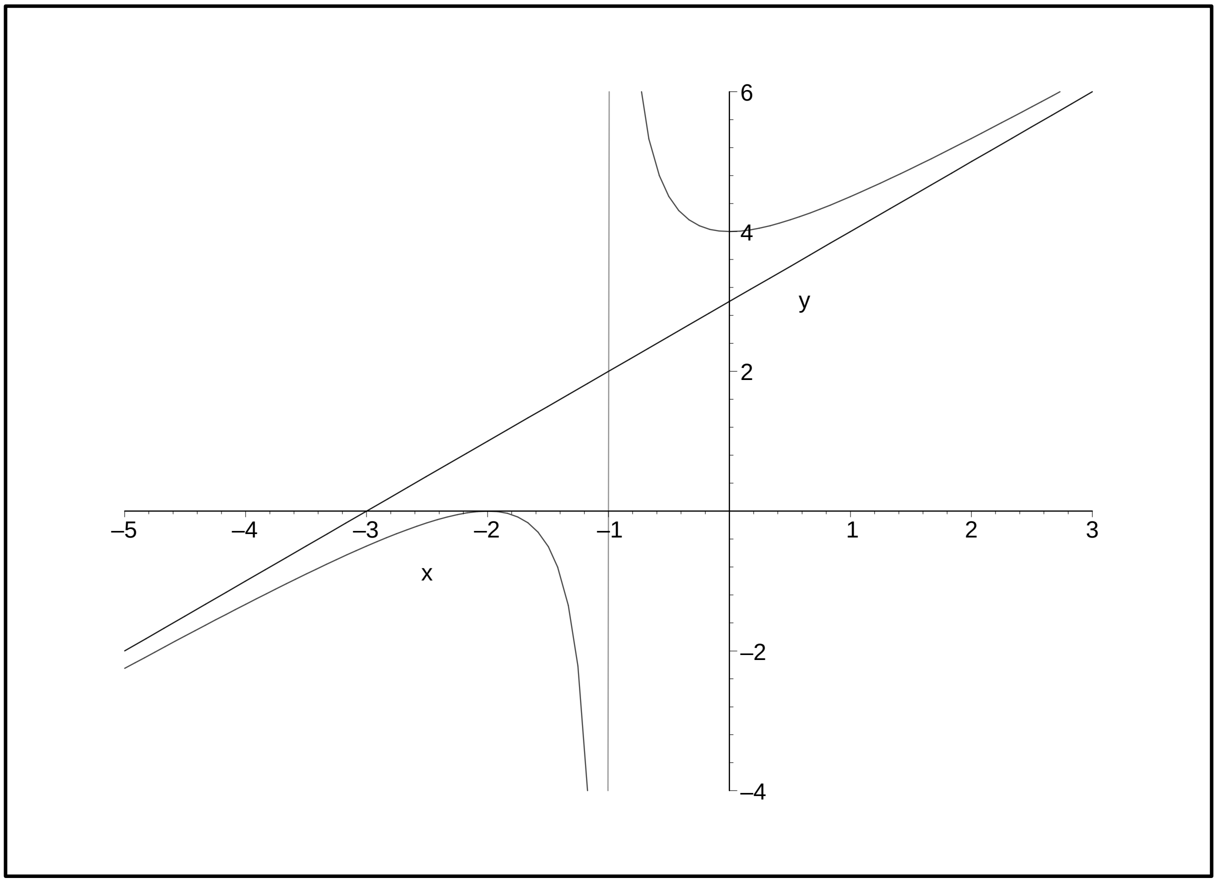
Локални максимум је $M_1(-2,0)$, а локални минимум је $M_2(0,4)$.

6° $f'' = \dfrac{2}{(x+1)^3}$. Конвексност: смо испитали помоћу следеће таблице:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
2	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	x	$+$
$f''(x)$	$-$	x	$+$
$f(x)$	$\cap$	x	$\cup$

Превојних тачака нема.

На основу свега овога скицирамо график функције:


6
4
y
2
–5
–4
–3
–2
–1
1
2
3
x
–2
–4

■

Сада ћемо навести још неки број функција које су се појављивале на испитима на разним факултетима Београдског универзитета. Задаци нису сортирани ни по тежини ни по тематици. Провежбајте што више од ових задатака.

Испитати ток и скицирати график функције:

17. $f(x) = x^3 - 3x + 2\,.$ **18.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,.$ **19.** $f(x) = (x-1)^2 \ln(x-1)\,.$ **20.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}\,.$ **21.** $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2}\,.$

22. $f(x) = (x+3)e^{1/(x-3)}\,.$ **23.** $f(x) = xe^{1/x}\,.$ **24.** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}\,.$ **25.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}\,.$ **26.** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}\,.$

27. $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}\,.$ **28.** $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}\,.$ **29.** $f(x) = \ln(x^2-2x+2)\,.$ **30.** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}\,.$ **31.** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}\,.$

32. $f(x) = (x^2-3)e^x\,.$ **33.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3}\,.$ **34.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}\,.$ **35.** $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}\,.$ **36.** $f(x) = x^2 \ln x\,.$

37. $f(x) = (x^2-8)e^x\,.$ **38.** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-3}\,.$ **39.** $f(x) = x\ln^2 x\,.$ **40.** $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}\,.$ **41.** $f(x) = (x-1)\sqrt{10-x}\,.$

42. $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{\ln(x-2)}\,.$ **43.** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}\,.$ **44.** $f(x) = \sqrt{x}\ln x\,.$ **45.** $f(x) = \ln(x^2-2x+2)\,.$ **46.** $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}\,.$

47. $f(x) = x^2\sqrt{x+5}\,.$ **48.** $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$ **49.** $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^3}\,.$ **50.** $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\,.$ **51.** $f(x) = \dfrac{6x-x^2-9}{x-2}\,.$

52. $f(x) = (x-1)^2(x-2)^3\,.$ **53.** $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$ **54.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,.$ **55.** $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}\,.$ **56.** $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}\,.$

57. $f(x) = e^{1/(1-x^2)}\,.$ **58.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,.$ **59.** $f(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{x+1}\,.$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2+12x+20}{x+1}\,.$ **61.** $f(x) = \dfrac{4x}{4+x^2}\,.$

62. $f(x) = \ln(x^2-6x+10)\,.$ **63.** $f(x) = \dfrac{x^2+7x+10}{x+1}\,.$ **64.** $f(x) = \dfrac{x^2+19x+34}{x+1}\,.$ **65.** $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2+1}\,.$

66. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}\,.$ **67.** $f(x) = (x-2)^2(x+3)^3\,.$ **68.** $f(x) = x+2-\sqrt{x^2+x-2}\,.$ **69.** $f(x) = \ln(x^2-8x+17)\,.$

70. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}\,.$ **71.** $f(x) = 3(\ln^2 x - \ln x^2)\,.$ **72.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{3\ln x - 1}\,.$ **73.** $f(x) = \dfrac{x^2+8x+7}{x-1}\,.$

74. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x-1}\,.$ **75.** $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x+1}\,.$ **76.** $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}\,.$ **77.** $f(x) = x+1-\sqrt{x^2+x}\,.$

78. $f(x) = x(\ln^2 x - \ln x^2)\,.$ **79.** $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{\ln(x+3)}\,.$ **80.** $f(x) = (x-1)e^{1/(x-3)}\,.$ **81.** $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln^2(x+1)}\,.$

82. $f(x) = \dfrac{x-2}{\ln^2(x-2)}\,.$ **83.** $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x+1}\, e^{1/x}\,.$ **84.** $f(x) = \dfrac{1}{e^x-1}\,.$ **85.** $f(x) = \ln^2 x - 4\ln x + 4\,.$

86. $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}\,.$ **87.** $f(x) = \dfrac{x^2+2}{e^{x^2}}\,.$ **88.** $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,.$ **89.** $f(x) = xe^{-x^2}\,.$ **90.** $f(x) = \sqrt[3]{3x-x^3}\,.$

91. $f(x) = (x-3)\ln^2(x-3)\,.$ **92.** $f(x) = e^{x-e^x}\,.$ **93.** $f(x) = \sqrt{e^{-x}-e}\,.$ **94.** $f(x) = \ln(x^2-2x-2)\,.$

95. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x+2}\,.$ **96.** $f(x) = \ln^2(x+2) - 6\ln(x+2) + 5.$ **97.** $f(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,.$

98. $f(x) = x-2-\sqrt{x^2-3x-3}\,.$ **99.** $f(x) = \dfrac{x}{1-\ln x}\,.$ **100.** $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^2-1}\,.$