Celokupna Njutnova dinamika mat. sistema, bez obzira da li se radi o materijalnom sistemu N materijalnih tačaka, krutom telu ili sistemu krutih tela, zasniva se na 2 zakona koja su vektorske prirode.

I zakon – zakon promene količine kretanja mat. sistema

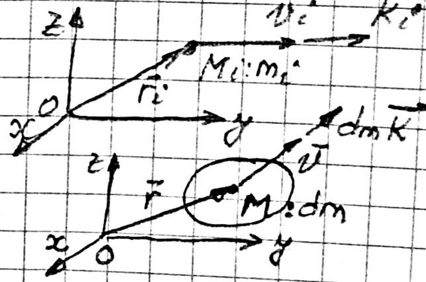
$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{F}_R^{S}}\ ;\quad \vec{K}=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{m_i\vec{v}_i}_{\vec{K}_i=\vec{K}(M_i)}=m\vec{v}_C\ ;\quad \vec{K}=\int_m \underbrace{dm\,\vec{v}}_{\vec{K}(M)=d_m\vec{K}}=m\vec{v}_C \quad (1)$$

Zakon promene količine kretanja mat. sistema, s obzirom da je $\vec{K}=m\vec{v}_C$ i $\dot{\vec{K}}=m\vec{a}_C$, ekvivalentan je diferencijalnoj jednačini kretanja centra mase mat. sistema:

$$\boxed{m\vec{a}_C=\vec{F}_R^{S}}\quad (\vec{F}_R^{S}=\vec{F}_R^{akt.}+\vec{F}_R^{S.R.V})\quad (1')$$

Vektorske jednačine (1) i (1') ekvivalentne su sistemu od 3 skalarne dif. jednačine koje se dobijaju projektovanjem levih i desnih strana ovih jednačina na ose odgovarajućeg troosnog referentnog koordinatnog sistema u 3-D euklidskom prostoru koji može biti ili pokretan ili nepokretan.

Ako je ref. objekat nepokretan Dekartov koordinatni sistem Oxyz, tada iz (1) i (1') slede jednačine:



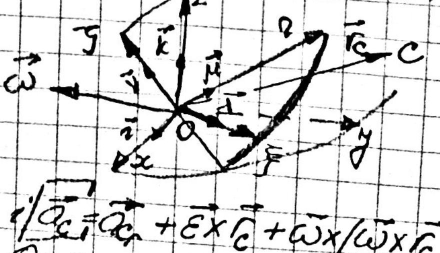
$$x:\ \frac{dK_x}{dt}=X_R^S \quad (1_1) \qquad\qquad m a_{Cx}=X_R^S \quad (1_1')$$

$$y:\ \frac{dK_y}{dt}=Y_R^S \quad (1_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad m a_{Cy}=Y_R^S \quad (1_2')$$

$$z:\ \frac{dK_z}{dt}=Z_R^S \quad (1_3) \qquad\qquad m a_{Cz}=Z_R^S \quad (1_3')$$

Sistem jednačina (1_1), (1_2) i (1_3) predstavlja zakone promena količine kretanja materijalnog sistema u pravcima osa Ox, Oy i Oz, $K_x=m\dot{x}_C$, $K_y=m\dot{y}_C$ i $K_z=m\dot{z}_C$.
Jednačine $(1_1')$, $(1_2')$ i $(1_3')$ predstavljaju dif. jednačine kretanja centra mase C mat. sistema u pravcima osa Ox, Oy, Oz. U ovim jednačinama je:
$a_{Cx}=\ddot{x}_C$, $a_{Cy}=\ddot{y}_C$ i $a_{Cz}=\ddot{z}_C$.

Ako je ref. KS pokretan KS, npr Oξηζ, čija je trenutna ugaona brzina oko nepokretne tačke O, $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$ a trenutno ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}$, iz, npr. jednačine (1') sledi sistem dif. jednačina kretanja centra mase C mat. sistema u pravcima osa Oξ, Oη i Oζ:



$$\xi:\ m a_{C\xi}=F_{R\xi}^S \quad (1_1'')$$

$$\eta:\ m a_{C\eta}=F_{R\eta}^S \quad (1_2'')$$

$$\zeta:\ m a_{C\zeta}=F_{R\zeta}^S \quad (1_3''),$$

gde su: $\vec{r}_C=\xi_C\vec{\lambda}+\eta_C\vec{\mu}+\zeta_C\vec{\nu} \Rightarrow \vec{v}_C=\dot{\vec{r}}_C=\vec{v}_{Cr}+\vec{\omega}\times\vec{r}_C$ i $\vec{a}_C=\vec{a}_{Cr}+\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_C+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_C)+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Cr}$

$\vec{v}_{Cr}$ i $\vec{a}_{Cr}$ – relativna brzina tačke C u odnosu KS Oξηζ.
$\vec{v}_{Cr}=0$, $\vec{a}_{Cr}=0$ – ako je C centar mase krutog tela, za koje je vezan KS Oξηζ (telo rotira oko tačke O)

(II) Zakon promene momenta kol. kretanja mat. sistema bilo za nepokretan pol (O), bilo za pokretan pol (A ili C).

Zakon promene momenta kol. kretanja za nepokretan pol O ima oblik:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{M}_O^S,\quad \vec{L}_O=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i}_{\vec{L}_{Oi}=\vec{L}_O(M_i)}\quad;\quad \vec{L}_O=\int_{m}\underbrace{\vec{r}\times dm\vec{v}}_{\vec{L}_O(M)=d_m\vec{L}_O}\qquad (2)$$

$\vec{r}_i=\vec{OM}_i,\ \vec{v}_i=\vec{v}(M_i)$; $\vec{r}=\vec{OM},\ \vec{v}=\vec{v}(M)$

Projektovanjem leve i desne strane jednačine (2) na ose nepokretnog KS u tački O, Oxyz, dobija se sistem 3 skalarne jednačine koji je ekvivalentan jednačini (2). U tom slučaju veličina $\vec{L}_O$ u KS Oxyz glasi:

$\vec{L}_O=L_{Ox}\vec{i}+L_{Oy}\vec{j}+L_{Oz}\vec{k}$

gde su:

L_{Ox}, L_{Oy}, L_{Oz} – momenti količine kretanja mat. sistema za ose Ox, Oy, Oz = = projekcijama $\vec{L}_O$ na ose Ox, Oy, Oz.

(2) $\Rightarrow$

$$\frac{dL_{Ox}}{dt}=M_{Ox}^S \quad (2_1)$$
$$\frac{dL_{Oy}}{dt}=M_{Oy}^S \quad (2_2)$$
$$\frac{dL_{Oz}}{dt}=M_{Oz}^S \quad (2_3)$$

zakoni promene momenata količine kretanja za nepokretne ose Ox, Oy, Oz

Ako je veličina $\vec{L}_O$ poznata u odnosu KS $O\xi\eta\zeta$ koji rotira oko nepokretne tačke O trenutnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, tj. ako je:

$\vec{L}_O=L_{O\xi}\vec{\lambda}+L_{O\eta}\vec{\mu}+L_{O\zeta}\vec{\nu}$

gde su:

$L_{O\xi}, L_{O\eta}, L_{O\zeta}$ momenti količine kretanja mat. sistema za ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$ = projekcijama $\vec{L}_O$ na ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$, tada je:

$$\dot{\vec{L}}_O=\frac{d_r\vec{L}_O}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}_O,$$

gde je:

$$\frac{d_r\vec{L}_O}{dt}=\dot{L}_{O\xi}\vec{\lambda}+\dot{L}_{O\eta}\vec{\mu}+\dot{L}_{O\zeta}\vec{\nu}$$

i $\vec{\omega}\times\vec{L}_O$ – posledica činjenice $\vec{\lambda}=\vec{\lambda}(t)$, $\vec{\mu}=\vec{\mu}(t)$, $\vec{\nu}=\vec{\nu}(t)$, tj. da je:

$\dot{\vec{\lambda}}=\vec{\omega}\times\vec{\lambda}$, $\dot{\vec{\mu}}=\vec{\omega}\times\vec{\mu}$, $\dot{\vec{\nu}}=\vec{\omega}\times\vec{\nu}$

Jednačina (2) se sada može dati u obliku:

$$\boxed{\frac{d_r\vec{L}_O}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}_O=\vec{M}_O^S}\qquad (2')$$

pa se nakon skalarnog množenja njene leve i desne strane jediničnim vektorima $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ dobijaju 3 skalarne jednačine koje predstavljaju zakone promene momenata kol. kretanja za pokretne ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$:

$$\dot{L}_{O\xi}+(\omega_\eta L_{O\zeta}-\omega_\zeta L_{O\eta})=M_{O\xi}^S \quad (2'_1)$$
$$\dot{L}_{O\eta}+(\omega_\zeta L_{O\xi}-\omega_\xi L_{O\zeta})=M_{O\eta}^S \quad (2'_2)$$
$$\dot{L}_{O\zeta}+(\omega_\xi L_{O\eta}-\omega_\eta L_{O\xi})=M_{O\zeta}^S \quad (2'_3)$$

Zakoni promene momenta količine kretanja mat. sistema za pokretne ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$

gde su: $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ projekcije $\vec{\omega}$ na ose KS $O\xi\eta\zeta$ $(\vec{\omega}=\omega_\xi\vec{\lambda}+\omega_\eta\vec{\mu}+\omega_\zeta\vec{\nu})$

Jednačine $(2_1')$, $(2_2')$, $(2_3')$ se koriste za opisivanje sfernog kretanja krutog tela oko nepokretne tačke O. i gde KS $O\xi\eta\zeta$ predstavlja KS vezan za telo. Tada je:

$\vec{\omega}=\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\theta}\vec{n}+\dot{\varphi}\vec{\nu}$,

gde su $\dot{\psi}\vec{k}$, $\dot{\theta}\vec{n}$ i $\dot{\varphi}\vec{\nu}$ trenutne ugaone brzine precesije, nutacije i sopstvene rotacije tela oko tačke O. Veličine:

$\omega_\xi=\omega_\xi(\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\theta,\psi,\varphi)$, $\omega_\eta=\omega_\eta(\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$, $\omega_\zeta=\omega_\zeta(\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$ dok su Ojlerovim kinematskim veličinama. Moment kol. kretanja $\vec{L}_O$ tela, u tom slučaju je:

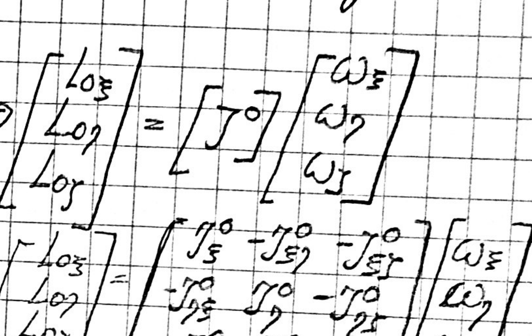
$$\left.\begin{aligned}&\vec{L}_O=\int_M \vec{r}\times dm\,\vec{v}=\int_M dm[\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\\&\vec{L}_O=L_{O\xi}\vec{\lambda}+L_{O\eta}\vec{\mu}+L_{O\zeta}\vec{\nu}\longrightarrow\begin{bmatrix}L_{O\xi}\\L_{O\eta}\\L_{O\zeta}\end{bmatrix}\\&\vec{\omega}=\omega_\xi\vec{\lambda}+\omega_\eta\vec{\mu}+\omega_\zeta\vec{\nu}\longrightarrow\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}L_{O\xi}\\L_{O\eta}\\L_{O\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J^O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix}\\&\begin{bmatrix}L_{O\xi}\\L_{O\eta}\\L_{O\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J^O_\xi&-J^O_{\xi\eta}&-J^O_{\xi\zeta}\\-J^O_{\eta\xi}&J^O_\eta&-J^O_{\eta\zeta}\\-J^O_{\zeta\xi}&-J^O_{\eta\zeta}&J^O_\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}L_{O\xi}&=J^O_\xi\omega_\xi-J^O_{\xi\eta}\omega_\eta-J^O_{\xi\zeta}\omega_\zeta\\L_{O\eta}&=-J^O_{\eta\xi}\omega_\xi+J^O_\eta\omega_\eta-J^O_{\eta\zeta}\omega_\zeta\\L_{O\zeta}&=-J^O_{\zeta\xi}\omega_\xi-J^O_{\zeta\eta}\omega_\eta+J^O_\zeta\omega_\zeta\end{aligned}}\quad\begin{aligned}&J^O_{\xi\eta}=J^O_{\eta\zeta}=J^O_{\xi\zeta}=0\\&J^O_\xi=J_{O\xi},\ J^O_\eta=J_{O\eta},\ J^O_\zeta=J_{O\zeta}\end{aligned}\longrightarrow\boxed{\begin{aligned}L_{O\xi}&=J_{O\xi}\omega_\xi\\L_{O\eta}&=J_{O\eta}\omega_\eta\\L_{O\zeta}&=J_{O\zeta}\omega_\zeta\end{aligned}}$$

(Momenti inercije tela u odnosu na ose KS vezanog za telo se ne menjaju u vremenu)

Za slučaj da su ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$ glavne ose inercije, jednačine $(2_1')$, $(2_2')$ i $(2_3')$ glase:

$$\boxed{\begin{aligned}J_{O\xi}\dot{\omega}_\xi-(J_{O\eta}-J_{O\zeta})\omega_\eta\omega_\zeta&=M^S_{O\xi}\\J_{O\eta}\dot{\omega}_\eta-(J_{O\zeta}-J_{O\xi})\omega_\zeta\omega_\xi&=M^S_{O\eta}\\J_{O\zeta}\dot{\omega}_\zeta-(J_{O\xi}-J_{O\eta})\omega_\xi\omega_\eta&=M^S_{O\zeta}\end{aligned}}\qquad\begin{aligned}&(2_1'')\\&(2_2'')\\&(2_3'')\end{aligned}$$



i nazivaju se Ojlerove dinamičke jednačine.

Kako se sistem sila koji deluje na telo koje vrši sferno kretanje sastoji od sistema aktivnih sila i reakcije sfernog zgloba $\vec{R}_O=R_{O\xi}\vec{\lambda}+R_{O\eta}\vec{\mu}+R_{O\zeta}\vec{\nu}$, to je:

$\vec{M}^S_O=\vec{M}^{akt}_O+\vec{M}^{R_O}_O \Rightarrow \vec{M}^S_O=\vec{M}^{akt}_O$.

Zakon promene momenta količine kretanja za tačku O, $(2')$, tj. sistem jednačina $(2_1')$, $(2_2')$, $(2_3')$, odnosno, $(2_1'')$, $(2_2'')$, $(2_3'')$, služi za određivanje konačnih jednačina sfernog kretanja krutog tela, a za poznate početne uslove: $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$ i $\varphi=\varphi(t)$

Reakcija $\vec{R}_O$ određuje se iz (1'), tj. iz sistema jednačina $(1_1'')$, $(1_2'')$ i $(1_3'')$:

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^{akt} + \vec{R}_O \Rightarrow \begin{aligned} m a_{C\xi} &= F_{R\xi}^{akt} + R_{O\xi} \\ m a_{C\eta} &= F_{R\eta}^{akt} + R_{O\eta} \\ m a_{C\zeta} &= F_{R\zeta}^{akt} + R_{O\zeta} \end{aligned}$$

gde je: $\vec{a}_C = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_C + \vec{\omega} \times \vec{v}_C$ i $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C$

$$\vec{a}_C = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta & \varepsilon_\zeta \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ v_{C\xi} & v_{C\eta} & v_{C\zeta} \end{vmatrix}; \quad \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}; \ \varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi, \ \varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta, \ \varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta$$

$$\vec{r}_C = \xi_C \vec{\lambda} + \eta_C \vec{\mu} + \zeta_C \vec{\nu}$$

Zakonima (1) odnosno (1') i (2) odnosno (2') može se opisati i rotacija tela oko nepokretne ose: $Oz = O\zeta$ $(\vec{\nu} = \vec{k})$. Ugaona brzina tela, tj. koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ vezanog za telo je tada:

$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{\nu} = \dot{\varphi}\vec{k}$,

gde je $\dot{\varphi}$ prvi izvod zakona rotacije tela oko ose $Oz = O\zeta$: $\varphi = \varphi(t)$.

(Telo u ovom slučaju ima 1 stepen slobode);

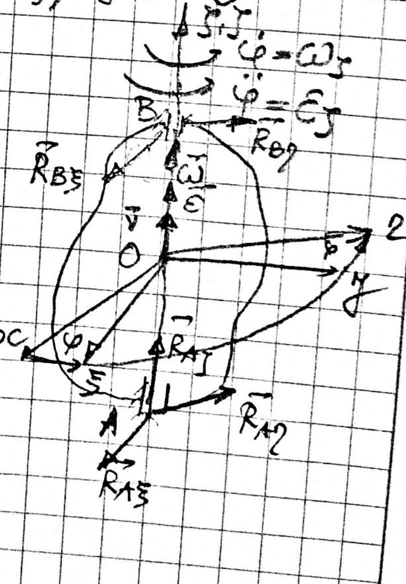
Moment količine kretanja tela, za tačku O, $\vec{L}_O$, u KS $O\xi\eta\zeta$ je:

$$\vec{L}_O = \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times dm\vec{v} = \int_{\mathcal{M}} dm\left[\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right]$$

$$\vec{L}_O = L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu} \rightarrow \begin{bmatrix} L_{O\xi} \\ L_{O\eta} \\ L_{O\zeta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} L_{O\xi} \\ L_{O\eta} \\ L_{O\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\xi^O & -J_{\xi\eta}^O & -J_{\xi\zeta}^O \\ -J_{\eta\xi}^O & J_\eta^O & -J_{\eta\zeta}^O \\ -J_{\zeta\xi}^O & -J_{\zeta\eta}^O & J_\zeta^O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{\omega} = 0 \cdot \vec{\lambda} + 0 \cdot \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{\nu} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_{O\xi} = -J_{\xi\zeta}^O \omega_\zeta, \quad L_{O\eta} = -J_{\eta\zeta}^O \omega_\zeta, \quad L_{O\zeta} = J_\zeta^O \omega_\zeta$$



Vodeći, takođe, računa na telo u ovom slučaju pored sistema aktivnih sila, deluju i reakcije sfernog zgloba A: $\vec{R}_A = R_{A\xi}\vec{\lambda} + R_{A\eta}\vec{\mu} + R_{A\zeta}\vec{\nu}$, i cilindričnog zgloba B: $\vec{R}_B = R_{B\xi}\vec{\lambda} + R_{B\eta}\vec{\mu}$, to je:

$\vec{M}_O^S = \vec{M}_O^{akt} + \vec{M}_O^{\vec{R}_A} + \vec{M}_O^{\vec{R}_B}$, pri čemu je:

$M_{O\zeta}^S = M_{O\zeta}^{akt}$.

Jednačine $(2_1')$, $(2_2')$ i $(2_3')$ imaju oblik:

$$-J_{\xi\zeta}^O \dot{\omega}_\zeta - J_{\eta\zeta}^O \omega_\zeta^2 = M_{O\xi}^{akt} + M_{O\xi}^{\vec{R}_A} + M_{O\xi}^{\vec{R}_B} \qquad (2_1''')$$

$$-J_{\eta\zeta}^O \dot{\omega}_\zeta + J_{\xi\zeta}^O \omega_\zeta^2 = M_{O\eta}^{akt} + M_{O\eta}^{\vec{R}_A} + M_{O\eta}^{\vec{R}_B} \qquad (2_2''')$$

$$J_{O\zeta} \dot{\omega}_\zeta = M_{O\zeta}^{akt} \Leftrightarrow \boxed{J_\zeta^O \ddot{\varphi} = M_{O\zeta}^{akt}} \qquad (2_3''')$$

Jednačina $(2_3''')$, pošto ne sadrži nepoznate reakcije zglobova služi za određivanje konačne jednačine rotacije tela, a za poznate početne uslove: $\varphi = \varphi(t)$.

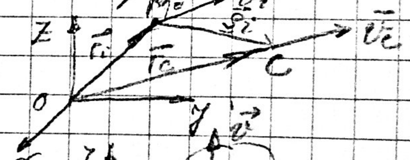
Jednačine $(2_1''')$, i $(2_2''')$ zajedno sa diferencijalnom jednačinom kretanja centra mase tela (1), tj. jednačinama $(1_1')$, $(1_2')$ i $(1_3)'$, služe za određivanje reakcija $R_A = \{R_{A\xi}, R_{A\eta}, R_{A\zeta}\}$ i $R_B = \{R_{B\xi}, R_{B\eta}, 0\}$:

$\boxed{ma_{C\xi}} = F_{R\xi}^{akt} + R_{A\xi} + R_{B\xi}$, $\boxed{ma_{C\eta}} = F_{R\eta}^{akt} + R_{A\eta} + R_{B\eta}$, $\boxed{ma_{C\zeta}} = F_{R\zeta} + R_{A\zeta}$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \omega_\zeta \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-\omega_\zeta \eta_C) + \vec{\mu}(\omega_\zeta \xi_C)$$

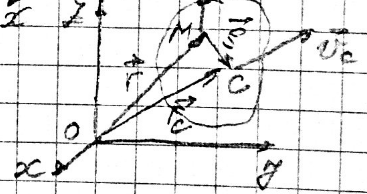
$$\vec{a}_C = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_C + \vec{\omega} \times \vec{v}_C = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \varepsilon_\zeta \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \omega_\zeta \\ -\omega_\zeta \eta_C & \omega_\zeta \xi_C & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C} = \vec{\lambda}\underbrace{(-\varepsilon_\zeta \eta_C - \omega_\zeta^2 \xi_C)}_{a_{C\xi}} + \vec{\mu}\underbrace{(\varepsilon_\zeta \xi_C - \omega_\zeta^2 \eta_C)}_{a_{C\eta}}$$

Umesto zakona promene momenta količine kretanja za nepokretan pol vrlo često se koristi i moment količine kretanja mat. sistema za pokretan pol. Od svih mogućih pokretnih polova u odnosu na koje se određuje moment količine kretanja mat. sistema posebno istaknuto mesto ima centar mase sistema, C.



$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad \text{ili} \qquad \vec{L}_C = \int_m \vec{\rho} \times dm \vec{v}$$

$\vec{L}_C(M_i) = \vec{L}_{C_i}$, $\vec{\rho}_i = \vec{CM_i}$, $\vec{v}_i = \vec{v}(M_i)$ $\qquad$ $\vec{L}_C(M) = dm\vec{L}_C$, $\vec{\rho} = \vec{CM}$, $\vec{v} = \vec{v}(M)$



Veza između $\vec{L}_O$ i $\vec{L}_C$ je:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{K}, \quad \vec{r}_C = \vec{OC}, \quad \vec{K} = m\vec{v}_C. \qquad (\vec{M}_O^S = \vec{M}_C^S + \vec{r}_C \times \vec{F}_R^S)$$

Koristeći ovu relaciju i zakon promene momenta količina kretanja na nepokretan pol O, dobija se zakon promene momenta količine kretanja mat. sistema za centar mase tog mat. sistema:

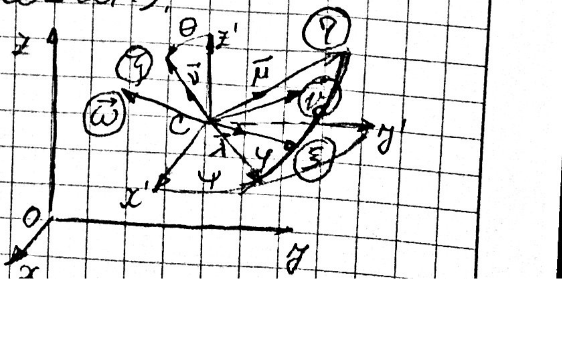
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^S} \qquad (3)$$

(Za bilo koji drugu pokretnu tačku $A \neq C$ važi: $\vec{L}_O = \vec{L}_A + \vec{r}_A \times \vec{K} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A \times \vec{K} = \vec{M}_A^S$)

Pošto je tačka C pokretna, vektor $\vec{L}_C$ se najčešće analitički zadaje u odnosu na pokretni KS $C\xi\eta\zeta$ koji vrši opšte kretanje, tj. rotira oko pokretnog koordinatnog početka C trenutnom ugaonom brzinom $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

Za: $\vec{L}_C = L_{C\xi}\vec{\lambda} + L_{C\eta}\vec{\mu} + L_{C\zeta}\vec{\nu}$, izraz za $\dot{\vec{L}}_C$ glasi:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{d_r\vec{L}_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_C,$$



pa jednačina (3) ima oblik

$$\boxed{\frac{d_r\vec{L}_C}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}_C=\vec{M}_C^S}$$ (analogno (2')) (3')

gde je:

$$\frac{d_r\vec{L}_C}{dt}=\dot{L}_{C\xi}\vec{\lambda}+\dot{L}_{C\eta}\vec{\mu}+\dot{L}_{C\zeta}\vec{\nu} \text{ i}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{L}_C=\begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu}\\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta\\ L_{C\xi} & L_{C\eta} & L_{C\zeta}\end{vmatrix}$$ – član koji je posledica činjenice da su: $\vec{\lambda}=\vec{\lambda}(t)$, $\vec{\mu}=\vec{\mu}(t)$, $\vec{\nu}=\vec{\nu}(t)$ i relacija: $\dot{\vec{\lambda}}=\vec{\omega}\times\vec{\lambda}$, $\dot{\vec{\mu}}=\vec{\omega}\times\vec{\mu}$ i $\dot{\vec{\nu}}=\vec{\omega}\times\vec{\nu}$.

Jednačina (3') je analogna sistemu od 3 diferencijalne skalarne jednačine koje predstavljaju zakone promena momenata količine kretanja materijalnog sistema za ose $C\xi$, $C\eta$ i $C\zeta$ i koje su po formi istog oblika kao i jednačine $(2_1')$, $(2_2')$ i $(2_3')$:

$$\dot{L}_{C\xi}+(L_{C\eta}\omega_\zeta-L_{C\zeta}\omega_\eta)=M_{C\xi}^S \qquad (3_1')$$

$$\dot{L}_{C\eta}+(L_{C\zeta}\omega_\xi-L_{C\xi}\omega_\zeta)=M_{C\eta}^S \qquad (3_2')$$

$$\dot{L}_{C\zeta}+(L_{C\xi}\omega_\eta-L_{C\eta}\omega_\xi)=M_{C\zeta}^S \qquad (3_3')$$

Zakon promene momenta količine kretanja za centar mase (3), odnosno jednačine $(3_1')$, $(3_2')$ i $(3_3')$ koriste se za opisivanje ravnog i opšteg kretanja krutog tela, dakle, onih kretanja krutih tela koja nemaju bar jednu nepokretnu tačku.

Broj stepeni slobode slobodnog krutog tela koje vrši ravno kretanje je 3, pa je takvo kretanje opisano sistemom od 3 dif. jednačine. Ako se takvo kretanje predstavi kretanjem ravnog preseka S (ravnom figurom) kome pripada centar mase tela C u nepokretnoj ravni Oxy, a za pol translacije izabere upravo tačka C konačne jednačine ravnog kretanja posmatranog tela biće 3 funkcije: $x_C=x_C(t)$, $y_C=y_C(t)$ i $\varphi=\varphi(t)$, gde je φ ugao rotacije oko translatorno pokretne ose $Cz=C\zeta$ $(\vec{k}=\vec{\nu})$ upravne na ravan kretanja preseka S u tački C.

Moment količine kretanja $\vec{L}_C$ koje vrši opisano kretanje je:

$$\vec{L}_C=L_{C\xi}\vec{\lambda}+L_{C\eta}\vec{\mu}+L_{C\zeta}\vec{\nu}\longrightarrow\begin{bmatrix}L_{C\xi}\\ L_{C\eta}\\ L_{C\zeta}\end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}=0\cdot\vec{\lambda}+0\vec{\mu}+\omega_\zeta\vec{\nu}\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega_\zeta\end{bmatrix},\ \boxed{\omega_\zeta=\omega_z=\dot{\varphi}}$$

$$\begin{bmatrix}L_{C\xi}\\ L_{C\eta}\\ L_{C\zeta}\end{bmatrix}=\left[J^C\right]\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_\xi^C & -J_{\xi\eta}^C & -J_{\xi\zeta}^C\\ -J_{\eta\xi}^C & J_\eta^C & -J_{\eta\zeta}^C\\ -J_{\zeta\xi}^C & -J_{\zeta\eta}^C & J_\zeta^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}\Longrightarrow\boxed{\begin{aligned}L_{C\xi}&=-J_{\xi\zeta}^C\omega_\zeta\\ L_{C\eta}&=-J_{\eta\zeta}^C\omega_\zeta\\ L_{C\zeta}&=J_\zeta^C\omega_\zeta\end{aligned}}$$

izrazi imaju analognu formu sa izrazima za $L_{O\xi}$, $L_{O\eta}$, $L_{O\zeta}$ tela koje rotira oko nepokretne ose $O\zeta=Oz$

Kao što izrazi pokazuju, momenti količine ravnog kretanja krutog tela, za ose C_ξ, C_η i C_ζ ne zavise od brzine $\vec{v}_C$ pola translacije C tela, već samo od ugaone brzine tela $\vec{\omega} = \omega_\zeta \vec{\nu} = \omega_z \vec{k}$ i $\omega_\zeta = \omega_z = \dot{\varphi}$.

Prema $(3_1')$, $(3_2')$ i $(3_3')$ zakoni promena veličina $L_{C\xi}$, $L_{C\eta}$ i $L_{C\zeta}$ glase:

$$-J_{\xi\zeta}^{C}\dot{\omega}_\zeta - J_{\eta\zeta}^{C}\omega_\zeta^2 = M_{C\xi}^{S} \qquad (3_1'')$$

$$-J_{\eta\zeta}\dot{\omega}_\zeta + J_{\xi\zeta}^{C}\omega_\zeta = M_{C\eta}^{S} \qquad (3_2'')$$

(momenti inercije tela u odnosu na ose koordinatnog sistema vezanog za telo ne menjaju se u vremenu)

$$\boxed{J_\zeta^C \dot{\omega}_\zeta = M_{C\zeta}^{S}} \Leftrightarrow \boxed{J_z^C \dot{\omega}_z = M_{Cz}^{S} \Leftrightarrow J_z^C \ddot{\varphi} = M_{Cz}^{S}} \qquad (3_3'')$$

Jednačine $(3_1'')$, $(3_2'')$ i $(3_3'')$ analogne su dif. jednačinama rotacije tela oko nepokretne ose $(2_1'')$, $(2_2'')$ i $(2_3'')$. $(O \to C)$.

Ako je osa $C_\zeta = C_z$ glavna centralna osa inercije: $J_{\xi\zeta}^C = J_{\eta\zeta}^C = 0$ i $J_\zeta^C = J_{C\zeta} = J_{Cz}$, jednačine $(3_1'')$, $(3_2'')$ i $(3_3'')$ glase:

$$0 = M_{C\xi}^{S} \qquad (3_1''')$$

$$0 = M_{C\eta}^{S} \qquad (3_2''')$$

$$\boxed{J_{Cz}\dot{\omega}_z = M_{Cz}^{S} \; ; \; J_{Cz}\ddot{\varphi} = M_{C\zeta}^{S}} \qquad (3_3''') \qquad (\varepsilon_\zeta = \varepsilon_z = \dot{\omega}_z, \; \varepsilon_z = \ddot{\varphi})$$

Jednačina $(3_3''')$, odnosno $(3_3'')$, predstavlja diferencijalnu jednačinu rotacije tela oko ose $C_\zeta = C_z$ pri ravnom kretanju krutog tela.

Jednačine $(3_1''')$ i $(3_2''')$, odnosno, $(3_1'')$ i $(3_2'')$, predstavljaju uslove kompatibilnosti tj. uslove koje moraju da zadovolje sile koje deluju na telo da bi razmatrano kretanje moglo realizovati. Prema $(3_1''')$ i $(3_2''')$, ravno kretanje slobodnog krutog tela čija je osa rotacije $C_z = C_\zeta$ istovremeno i glavna centralna osa inercije tog tela, može se realizovati samo ako glavni moment spoljašnjih sila, tj. aktivnih sila za centar mase tela ima pravac ose rotacije $C_z = C_\zeta$, tj. ako je: $\boxed{\vec{M}_C^S = M_{Cz}^S \vec{k} = M_{C\zeta}^S \vec{k}}$

Da bi se dobile dif. jednačine kretanja centra mase u koordinatnom sistemu Oxyz moramo se pozvati na zakon kretanja centra mase tela, tj. na jednačinu $(1')$, odnosno na sistem jednačina $(1_1')$, $(1_2')$, $(1_3')$:

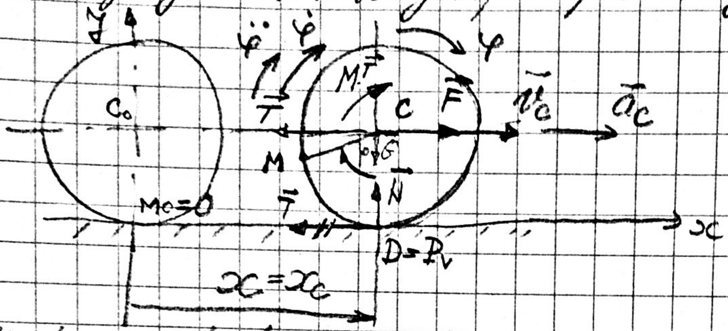
$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^S \Rightarrow \begin{matrix} m a_{Cx} = X_R^S \\ m a_{Cy} = Y_R^S \\ 0 = Z_R^S \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} m\ddot{x}_C = X_R^S \\ m\ddot{y}_C = Y_R^S \end{matrix}} & \begin{matrix} (1_1'') \\ (1_2'') \end{matrix} \\ 0 = Z_R^S & (1_3'') \end{matrix}$$

Dok jednačine $(1_1'')$ i $(1_2'')$ opisuju kretanje centra mase tela, a zajedno sa $(3_3''')$, odnosno $(3_3'')$, predstavljaju diferencijalne jednačine ravnog kretanja krutog tela, jednačina $(1_3''')$ predstavlja uslov za sistem sila koji deluje na telo i prema njemu glavni vektor spoljašnjih sila, tj. aktivnih sila, mora biti u ravni kretanja preseka S:

$$\boxed{\vec{F}_R^S = X_R^S \vec{i} + Y_R^S \vec{j}} \cdot \vec{F}_R^S \perp \vec{M}_C^S \Rightarrow \text{sistem sila se svodi na sistem sila u ravni Oxy}$$

Ako vezano telo izvodi ravno kretanje koje se može predstaviti kretanjem njegovog ravnog preseka S u kome je centar mase tela, a u ravni Oxyz, tada je broj stepeni slobode takvog kretanja $n<3$, pa dif. jednačine ravnog kretanja $(3_3''')$, odnosno $(3_3'')$, $(1_1'')$, i $(1_2'')$ služe da se iz njih odrede konačne jednačine kretanja tog kretanja, ali i nepoznate reakcije veza.

KOTRljanje bez klizanja diska po nepokretnoj ravnoj podlozi



Ravno kretanje sa jednim stepenom slobode : $n=1$

$y_C(t)=R$

$\widehat{DM}=\overline{M_0D} \Rightarrow x_C=R\varphi$ } broj veza $l=2$

$n=3-l \Rightarrow n=3-2=1$

Kretanje diska poznato ako je poznato ili kretanje centra C diska u pravcu ose Ox: $x_C=x_C(t)$ ~~ili ugao rotacije diska oko C_z : $\varphi=\varphi(t)$~~

Tačka dodira diska i podloge, tačko D, je trenutni pol brzina : ($\vec v_D=\vec v_{P_v}=0$) ovo zato jer nema proklizavanja između diska podloge. Kotrljanje, po makar ono bilo i ~~bez klizanja~~, ne može da se obavi ako su i podloga i površ diska potpuno glatke. To znači da u ovom slučaju reakcija podloge, pored normalne komponente $\vec N$, ima i komponentu $\vec T$ koja je upravna $\vec N$ i koja predstavlja silu trenja pri kotrljanju bez klizanja. Intezitet ove sile je nepoznat, ali je manji od inteziteta granične vrednosti sile trenja klizanja $F_\mu^{gr}=\mu N$ ($\mu=\mu_{klin}$), tj.: $\boxed{T<\mu N}$. Takođe, generalno, i smer sile $\vec T$ je nepoznat i pretpostavlja se.

Međutim, preporuka je da se u slučajevima kao u ovom ovde, smer sile $\vec T$ usvoji tako da nakon redukcije sile $\vec T$ iz tačke $D=P_v$ u centar mase diska, tačku C, na disk pored sile $\vec T$ u tački C deluje sada i spreg čiji se smer poklapa sa pretpostavljenim smerovima promene ugla φ, ugaone brzine $\dot\varphi$ i ugaonog ubrzanja $\ddot\varphi$ diska.

Moment ovog sprega je: $M^T=M_C^T \Rightarrow M^T=TR$ $(\vec T\sim(\vec T,[\vec M^T]))$

Dakle, u ovom i sličnim primera, sila trenja kotrljanja bez klizanja, $\vec T$, obezbeđuje kotrljanje diska po podlozi:

Diferencijalne jednačine kretanja diska biće:

$m\vec a_C=\vec N+\vec G+\vec F+\vec T \Rightarrow m\ddot x_C=F-T$ (a)

$m\ddot y_C=N-G \Rightarrow 0=N-G$ (b)

$\frac{d\vec L_C}{dt}=\vec M_C^F+\vec M_C^G+\vec M_C^N+\vec M_C^T \Rightarrow J_{Cz}\ddot\varphi=TR$ (c)

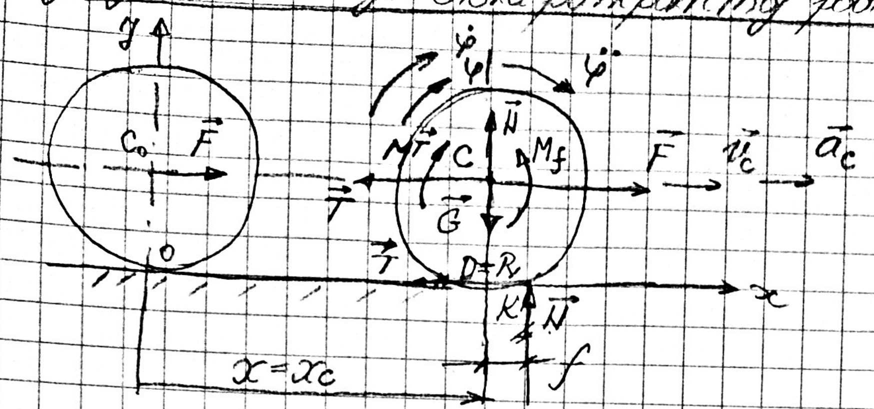
gde je: $\dot x_C=\dot\varphi\,\overline{CP_v}=\dot\varphi R$; $\ddot x_C=R\ddot\varphi$ (d)

odnosno: $\left.\begin{aligned} m\ddot x_C&=F-T\\ 0&=N-G\\ J_C\frac{\ddot x_C}{R}&=TR\end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot x_C \Rightarrow x_C=x_C(t)$; T, i N // 3 jednačine sa 3 nepoznate

Proklizavanje diska po podlozi započinje u trenutku t_1:

$T(t_1)=F_\mu=\mu N(t_1)=\mu mg$

Kotrljanje bez klizanja diska po nepokretnoj podlozi sa otporom kotrljanju



Pretpostavka – podloga je deformabilna, tako da se napadna tačka reakcije podloge pomera iz tačke D koja predstavlja podnožje normale iz tačke C na trag ravni, osu Ox, u tačku K. Normalno rastojanje tačke K od prave (ose diska) CD iznosi f i ova veličina predstavlja koeficijent trenja kotrljanja. Napadna tačka reakcije podloge, tačka K, u odnosu na pravu CD (u ovom slučaju vertikalne ose diska) pomerena je u smeru kretanja centra mase diska, tačke C. Redukcijom, paralelnim prenošenjem, normalne komponente reakcije podloge, sile $\vec{N}$, iz tačke K u tačku C, na disk će, pored sile $\vec{N}$ (sada u tački C), delovati i spreg čiji je moment intenziteta $M_f = Nf$ i koji se naziva moment otpora kotrljanju. Ovo zato što je dejstvo ovog sprega smera suprotnog od smera promene ugla rotacije diska φ, tj. suprotnog smera od pretpostavljenih smerova ugaone brzine $\dot{\varphi}$ i ugaonog ubrzanja $\ddot{\varphi}$ diska. Veličina f, tj. koeficijent trenja kotrljanja, dakle, predstavlja krak momenta otpora kotrljanju.

Što se tiče komponente $\vec{T}$ reakcije podloge, tj. sile trenja pri kotrljanju bez klizanja, biće pretpostavljeno da njena napadna linija prolazi kroz tačku $D=P_v$. Redukcijom sile $\vec{T}$ iz tačke $D=P_v$ u tačku C, na disk deluje sila $\vec{T}$, ali sada u tački C i spreg čiji je smer dejstva isti kao i smer promene ugla rotacije diska φ, tj. isti kao i pretpostavljeni smerovi ugaone brzine $\dot{\varphi}$ i ugaonog ubrzanja $\ddot{\varphi}$ diska. Algebarska vrednost momenta sprega $\vec{M}^T$ je: $M^T = TR$.

Dakle, važi: $\vec{T} \sim (\vec{T}, [\vec{M}^T])$ i $\vec{N} \sim (\vec{N}, [\vec{M}_f])$; $\boxed{\vec{M}^T = \vec{M}_C^{\vec{T}} \text{ i } \vec{M}_f = \vec{M}_C^{\vec{N}}}$

Dif. jednačine kretanja diska su:

$$m\vec{a}_C = \vec{G} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{T} \Rightarrow m\ddot{x}_C = F - T \qquad (a)$$

$$m\ddot{y}_C = N - G \;;\; 0 = N - G \qquad (b)$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\vec{G}} + \vec{M}_C^{\vec{F}} + \vec{M}_f + \vec{M}^{\vec{T}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\vec{G}} + \vec{M}_C^{\vec{F}} + \vec{M}_C^{\vec{T}} + \vec{M}_C^{\vec{N}} \Rightarrow J_{C_z}\ddot{\varphi} = TR - Nf \qquad (c)$$

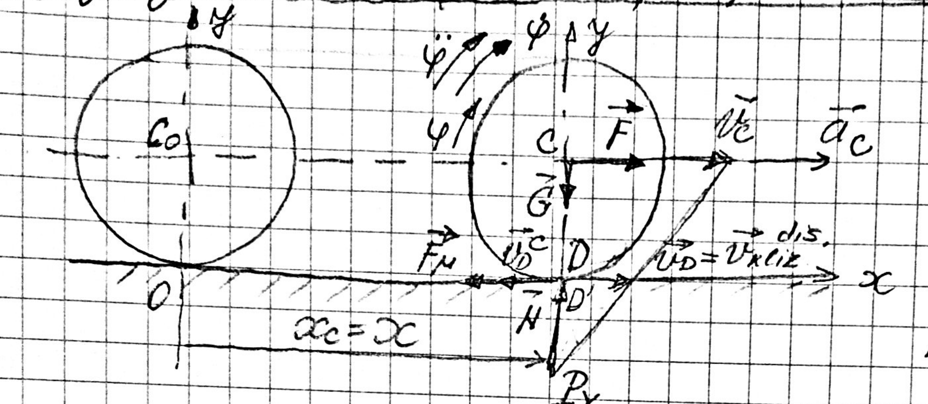
$$\text{i} \quad v_C = \omega_z \overline{CP_v} \Rightarrow \dot{x}_C = \dot{\varphi} R \Rightarrow \ddot{x}_C = R\ddot{\varphi} \qquad (d)$$

odnosno:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= F - T \\ 0 &= N - G \\ J_z(\ddot{x}_C/R) &= TR - Nf \end{aligned}\right\} \text{ 3 jednačine sa 3 nepoznate: } \vec{T}, \vec{N}, x_C = x_C(t)$$

Iz jednačine (c) sledi da za $\ddot{\varphi} \geq 0$ mora biti: $TR - Nf \geq 0$, tj.:
$T \geq \frac{f}{R} N \overset{(б)}{\Rightarrow} T \geq \frac{f}{R} G$. Pošto je pri kotrljanju bez klizanja: $T < \mu N$,
to sledi da sila trenja kotrljanja bez klizanja mora da zadovolji
uslov $\boxed{G\frac{f}{R} \leq T < \mu G}$, što znači da mora biti $\mu \gg f$.

Kotrljanje diska sa klizanjem po nepokretnoj ravnoj podlozi



Pri kotrljanju sa klizanjem po nepokretnoj ravnoj podlozi tačka D diska koja je u kontaktu sa podlogom nema brzinu jednaku nuli: $\vec{v}_D = v_{Dx}\vec{i} \neq 0$.
($v_{Dx} = v_D = \pm|\vec{v}_D|$)

Pošto tačka D nije trenutni pol brzina ($D \neq P_v$) to je $v_C = \dot{x}_C \neq R\dot{\varphi}$, pa disk ima 2 stepena slobode.
Kretanje diska će biti poznato ukoliko su poznati zakon kretanja centra mase diska $x_C = x_C(t)$ i zakon rotacije diska oko translatorno pokretne ose C_z: $\varphi = \varphi(t)$
Neka je D' tačka podloge koja se u posmatranom, proizvoljnom trenutku t poklapa sa tačkom diska D. Brzina proklizavanja diska po podlozi određena je razlikom brzina tačaka D i D', $\vec{v}_D$ i $\vec{v}_{D'}$, tj. važi:
$\vec{v}_{xliz.}^{dis} = \vec{v}_D^{D'} = \vec{v}_D - \vec{v}_{D'}$
Ova brzina ima pravac zajedničke tangente na konturu diska i traga ravni u tački dodira D=D' te dve linije, dakle, pravac ose Ox. Ovo zato što komponente brzina $\vec{v}_D$ i $\vec{v}_{D'}$ u pravcu zajedničke normale (osa Dy) na konturu diska i trag ravni (osa Ox) u tački D=D' moraju biti jednake. Kako je $\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_D^C$ ($\vec{v}_D^C \perp CD$ i $v_D^C = \dot{\varphi}R$), a $\vec{v}_{D'} = 0$, to je: $\vec{v}_{xliz}^{dis} = \vec{v}_C + \vec{v}_D^C \Rightarrow \vec{v}_{xliz}^{dis.} = (\dot{x}_C - R\dot{\varphi})\vec{i}$. Za $\dot{x}_C > R\dot{\varphi}$ i pretpostavljene smerove ugaone brzine diska $\dot{\varphi}$ i brzine centra diska $\vec{v}_C$, ova brzina će biti u smeru ose Ox (vidi sliku)
Sila trenja pri kotrljanju sa klizanjem diska, F_μ, kao komponenta ukupne reakcije podloge upravna je na normalnu komponentu $\vec{N}$ te reakcije, smer joj je suprotan od brzine proklizavanja diska po podlozi $\vec{v}_{xliz}^{dis}$, a intenzitet joj je jednak graničnoj vrednosti, tj. iznosi: $\boxed{F_\mu = \mu N}$ ($\mu = \mu_{din.}$). Diferencijalne jednačine kotrljanja sa klizanjem su:

$$\left.\begin{array}{lll} m\vec{a}_C = \vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_\mu \Rightarrow & m\ddot{x}_C = F - F_\mu & (a) \\ & 0 = N - G & (б) \\ \frac{dL_C}{dt} = \vec{M}_C^F + \vec{M}_C^G + \vec{M}_C^N + \vec{M}_C^{F_\mu} \Rightarrow & J_{Cz}\ddot{\varphi} = F_\mu R & (c) \\ & F_\mu = \mu N & (d) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m\ddot{x}_C = F - \mu G \Rightarrow x_C = x_C(t) \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \mu G R \Rightarrow \varphi = \varphi(t) \end{array}$$

Disk će započeti kotrljanje bez klizanja za $x_C(t_1) = R\varphi(t_1)$

Broj stepeni slobode slobodnog krutog tela koje vrši translatorno kretanje u 3D-euklidskom prostoru je $n=3$, a konačne jednačine ovakvog kretanja u odnosu na nepokretni Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ su funkcije:
$x_C = x_C(t)$, $y_C = y_C(t)$ i $z_C = z_C(t)$,
ukoliko je za pol translacije izabran centar mase tela.
Konačne jednačine translatornog kretanja posmatranog tela, za zadate početne uslove i za poznat sistem aktivnih sila mogu se odrediti iz zakona promene količine kretanja (1), odnosno, iz dif. jednačine kretanja centra mase tela C, (1'), tj. njoj pripadajućeg sistema jednačina $(1_1')$, $(1_2')$ i $(1_3')$:

$$\boxed{m\vec{a}_C = \vec{F}_R^S \Rightarrow m\ddot{x}_C = X_R^S,\ m\ddot{y}_C = Y_R^S,\ m\ddot{z}_C = Z_R^S}$$

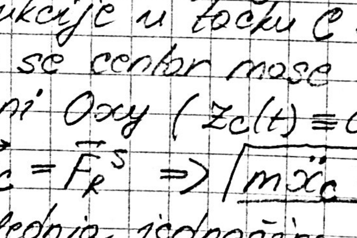
Za translatorno kretanje zakon promene momenta količine kretanja krutog tela za nepokretan pol O, (2) je posledica jednačine (1), odnosno (1'), pa se ne uzima u razmatranje.
Što se tiče momenta količine tela koje vrši translatorno kretanje za njegov centar mase C može se pokazati da je: $\vec{L}_C = 0$, pa zakon promene ove veličine (3) u ovom slučaju glasi:

$$0 = \vec{M}_C^S \Rightarrow M_{C\xi}^S = 0,\ M_{C\eta}^S = 0,\ M_{C\zeta}^S = 0,$$

Gornja jednačina ($\vec{M}_C^S = 0$) predstavlja uslov koji mora da zadovolje sile koje deluju na telo da bi se ono kretalo translatorno. Pošto je $\vec{M}_C^S = 0$, to znači da se sistem sila (u slučaju slobodnog tela samo aktivnih sila, a u slučaju vezanog tela i aktivnih sila i reakcija veza) nakon redukcije u tačku C svodi na rezultantu $(\vec{F}_{R(C)} = \vec{F}_R^S)$.
Ako se centar mase tela pri svom translatornom kretanju kreće u ravni Oxy ($z_C(t) \equiv 0$), diferencijalne jednačine kretanja biće:

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^S \Rightarrow \boxed{m\ddot{x}_C = X_R^S,\ m\ddot{y}_C = Y_R^S},\ 0 = Z_R^S$$

Poslednja jednačina ($Z_R^S = 0$) predstavlja još jedan uslov kompatibilnosti, što znači da se posmatrano kretanje može realizovati pod dejstvom sistema sila za koje važi: $\vec{M}_C^S = 0$ i $\vec{F}_{R(C)} = \vec{F}_R = X_R^S\vec{i} + Y_R^S\vec{j}$, a samo kretanje tela se može predstaviti translatornim kretanjem preseka tog tela i ravni Oxy, S, u kome se nalazi tačka C.
Ako vezano telo vrši translatorno kretanje broj stepeni slobode u oba navedena slučaja se smanjuje, pa navedene diferencijalne jednačine translatornog kretanja slobodnog krutog tela služe da se iz njih odrede konačne jednačine tog kretanja, ali i nepoznate reakcije veza.



Broj stepeni slobode krutog tela (slobodnog) koje vrši opšte kretanje u 3D-euklidskom prostoru je $n=6$, a konačne jednačine ovakvog kretanja biće poznate ako su poznate konačne jednačine kretanja centra mase tog tela, kao pola translacije, u odnosu na nepokretni Dekartov koordinatni sistem: $x_C=x_C(t)$, $y_C=y_C(t)$ i $z_C=z_C(t)$ i konačne jednačine rotacije tela oko pola translacije, tačke C: $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$ i $\varphi=\varphi(t)$. Konačne jednačine opšteg kretanja posmatranog tela za zadate početne uslove i za poznat sistem aktivnih sila mogli se odrediti iz:

- diferencijalne jednačine kretanja centra mase tela (1'), tj. iz sistema jednačina $(1_1')$, $(1_2')$ i $(1_3')$:

$$\boxed{m\vec{a}_C=\vec{F}_R^S \Rightarrow m\ddot{x}_C=X_R^S,\ m\ddot{y}_C=Y_R^S,\ m\ddot{z}_C=Z_R^S}$$

i

- zakona promene momenta količine kretanja tela za centar mase (3), odnosno (3'), tj. iz njima pripadajućeg sistema jednačina $(3_1')$, $(3_2')$ i $(3_3')$. Kako je moment količine opšteg kretanja krutog tela za tačku C, $\vec{L}_C$, dat u odnosu na koordinatni sistem vezan telo u tački C, $C\xi\eta\zeta$, to važi:

$$\vec{L}_C=L_{C\xi}\vec{\lambda}+L_{C\eta}\vec{\mu}+L_{C\zeta}\vec{\nu}\rightarrow\begin{bmatrix}L_{C\xi}\\L_{C\eta}\\L_{C\zeta}\end{bmatrix},\quad \vec{\omega}=\omega_\xi\vec{\lambda}+\omega_\eta\vec{\mu}+\omega_\zeta\vec{\nu}\rightarrow\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}L_{C\xi}\\L_{C\eta}\\L_{C\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_\xi^C & -J_{\xi\eta}^C & -J_{\xi\zeta}^C\\-J_{\eta\xi}^C & J_\eta^C & -J_{\eta\zeta}^C\\-J_{\zeta\xi}^C & -J_{\zeta\eta}^C & J_\zeta^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{C\xi}=J_\xi^C\omega_\xi-J_{\xi\eta}^C\omega_\eta-J_{\xi\zeta}^C\omega_\zeta$$
$$L_{C\eta}=-J_{\eta\xi}^C\omega_\xi+J_\eta^C\omega_\eta-J_{\eta\zeta}^C\omega_\zeta$$
$$L_{C\zeta}=-J_{\zeta\xi}^C\omega_\xi-J_{\zeta\eta}^C\omega_\eta+J_\zeta^C\omega_\zeta$$

$$\xrightarrow[J_\xi^C=J_{C\xi},\ J_\eta^C=J_{C\eta},\ J_\zeta^C=J_{C\zeta}]{J_{\xi\eta}^C=J_{\eta\zeta}^C=J_{\zeta\xi}^C}\ \boxed{\begin{aligned}L_{C\xi}&=J_{C\xi}\omega_\xi\\L_{C\eta}&=J_{C\eta}\omega_\eta\\L_{C\zeta}&=J_{C\zeta}\omega_\zeta\end{aligned}}$$

Za slučaj da su ose $C\xi$, $C\eta$ i $C\zeta$ glavne centralne ose inercije, jednačine $(3_1')$, $(3_2')$ i $(3_3')$ glase:

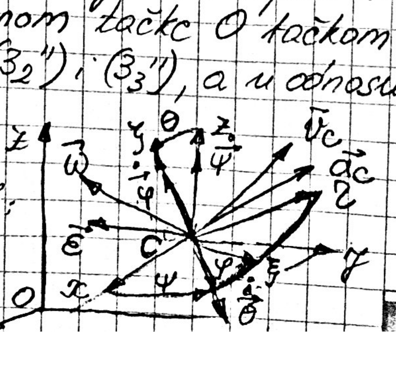
$$\boxed{\begin{aligned}J_{C\xi}\dot{\omega}_\xi-(J_{C\eta}-J_{C\zeta})\omega_\eta\omega_\zeta&=M_{C\xi}^S\\J_{C\eta}\dot{\omega}_\eta-(J_{C\zeta}-J_{C\xi})\omega_\zeta\omega_\xi&=M_{C\eta}^S\\J_{C\zeta}\dot{\omega}_\zeta-(J_{C\xi}-J_{C\eta})\omega_\xi\omega_\eta&=M_{C\zeta}^S\end{aligned}}\quad\begin{aligned}&(3_1'')\\&(3_2'')\\&(3_3'')\end{aligned}$$

(momenti inercije tela u odnosu na ose $C\xi$, $C\eta$ i $C\zeta$ vezane za telo ne menjaju svoje vrednosti tokom kretanja tela.

u kojima je: $\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}$, $\varepsilon_\xi=\dot{\omega}_\xi$, $\varepsilon_\eta=\dot{\omega}_\eta$, $\varepsilon_\zeta=\dot{\omega}_\zeta$ – trenutno ugaono ubrzanje tela.
i $\omega_\xi=\omega_\xi(\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$, $\omega_\eta=\omega_\eta(\dot{\psi},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$, $\omega_\zeta=\omega_\zeta(\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi)$ – Ojlerove kinematske formule.

Može se primetiti da su izrazi za $L_{C\xi}$, $L_{C\eta}$ i $L_{C\zeta}$ potpuno analogni izrazima za $L_{O\xi}$, $L_{O\eta}$ i $L_{O\zeta}$ tela koje vrši rotaciju oko nepokretne tačke O i mogu se dobiti iz njih formalno zamenom tačke O tačkom C ($O\rightarrow C$). Isto važi i za sistem jednačina $(3_1'')$, $(3_2'')$ i $(3_3'')$, a u odnosu na Ojlerove dinamičke jednačine $(2_1'')$, $(2_2'')$ i $(2_3'')$.

Opšte kretanje krutog tela opisano je, dakle, sa 6 skalarnih dif. jednačina: $(1_1')$, $(1_2')$, $(1_3')$, $(3_1'')$, $(3_2'')$ i $(3_3'')$.



$$\vec{\omega}=\dot{\vec{\psi}}+\dot{\vec{\theta}}+\dot{\vec{\varphi}}$$