Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Основне кинематичке величине роботског система

Проф. Михаило Лазаревић,

Машински факултет,Универзитет у Београду

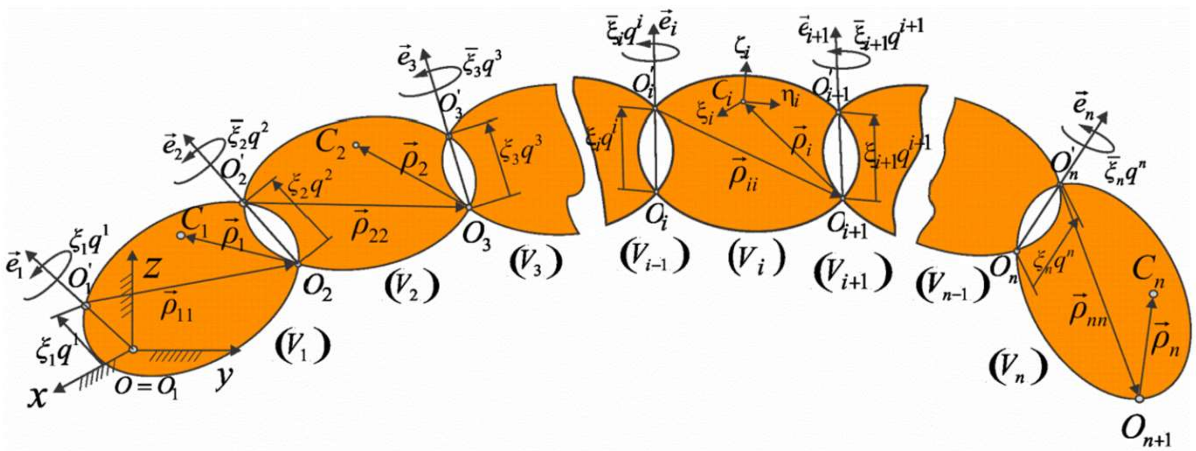
Основне геометријске карактеристике, карактеристични вектори РС

Карактеристични вектори, двоиндексни је између оса, а једноиндексни вектор указује где је средиште маса датог сегмента од дате тачке на оси ротације/транслације

$$\vec{\rho}_{ii} = \overrightarrow{O_i O_{i+1}}$$

$$\vec{\rho}_i = \overrightarrow{O_{i+1} C_i}$$

Овде тачка представља $O_{n+1} \equiv H$ врх робота (хватаљку)



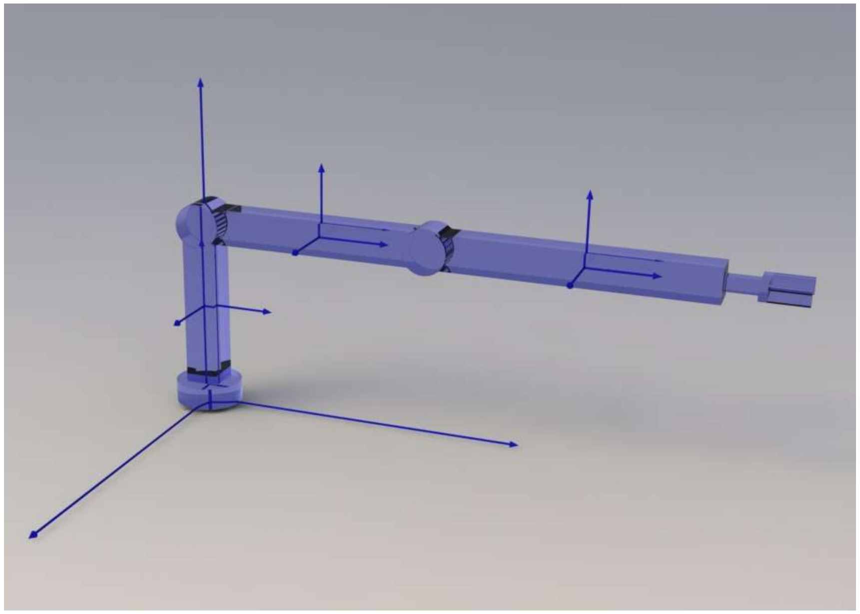
Слика 2.1. Систем крутих тела са структуром отвореног кинематичког ланца.

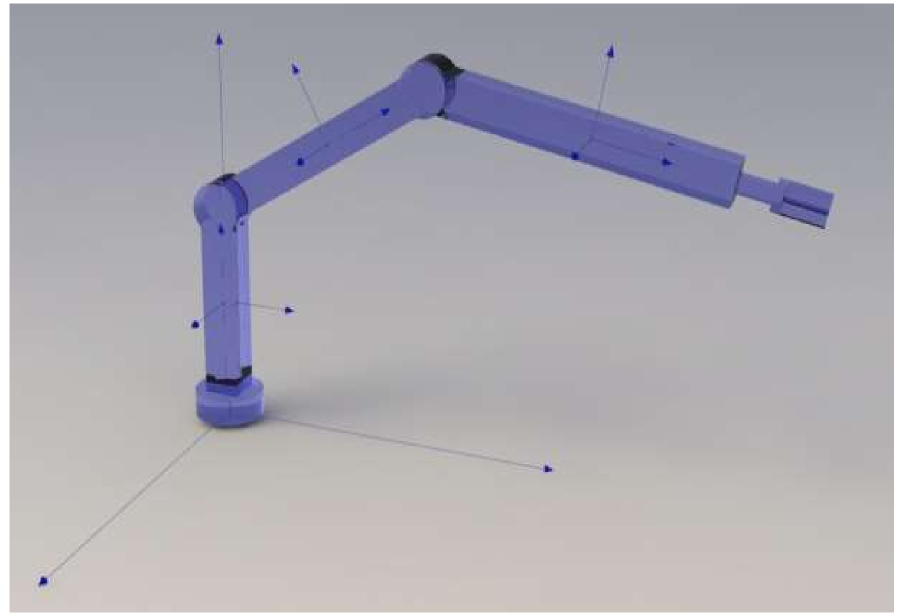
Положај врха хватаљке H

$$\vec{r}_H = \overrightarrow{O\,H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha q_\alpha \vec{e}_\alpha \right) =$$

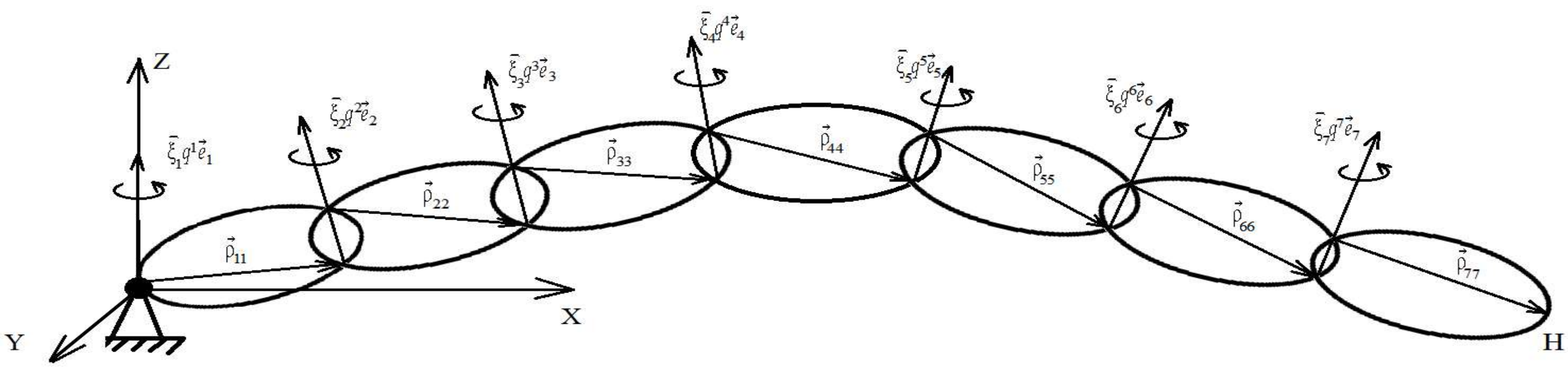
$$= \vec{\rho}_{11} + \xi_1 q_1 \vec{e}_1 + \vec{\rho}_{22} + \xi_2 q_2 \vec{e}_2 + \ldots + \vec{\rho}_{nn} + \xi_n q_n \vec{e}_n$$

Модел робота са три степена слободе референтна (почетна) конфигурација и произвољна конф.



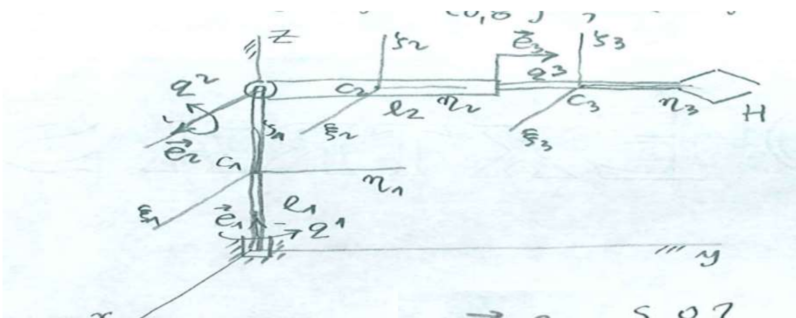


Модел робота са седам степена слободе



За дати роботски систем са три степена слободе који се налази у референтном положају, решити директни кинематички задатак, тј. одредити спољашње координате врха хватаљке $\bar{q}^i$ ($i=1,2,3$ – базни случај позиционирања) ако су вредности унутрашњих координата познате: $q^1=0{,}2\,\text{rad}$, $q^2=0{,}4\,\text{rad}$, $q^3=0{,}6\,\text{m}$. Такође је познато:

$$\{\vec{\rho}_{11}\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0{,}8\end{Bmatrix},\quad \{\vec{\rho}_{22}\}=\begin{Bmatrix}0\\0{,}6\\0\end{Bmatrix},\quad \{\vec{\rho}_{33}\}=\begin{Bmatrix}0\\0{,}4\\0\end{Bmatrix}.$$



$\bar{q}^1=x_H$, $\bar{q}^2=y_H$, $\bar{q}^3=z_H$ → спољашње координате које одређују позицију врха хватаљке у односу на непокретни систем $Oxyz$!

$$\{\vec{e}_1\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix},\quad \{\vec{e}_2\}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix},\quad \{\vec{e}_3\}=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$$

Положај врха хватаљке у систему $Oxyz$:

$$\begin{Bmatrix}x_H\\y_H\\z_H\end{Bmatrix}=\sum_{j=1}^{3}[A_{0,j}]\left(\{\vec{\rho}_{jj}+\xi_j q^j\vec{e}_j\}\right)=[A_{0,1}]\{\vec{\rho}_{11}\}+[A_{0,2}]\{\vec{\rho}_{22}\}+$$
$$+[A_{0,3}]\left(\{\vec{\rho}_{33}+q^3\vec{e}_3\}\right)$$

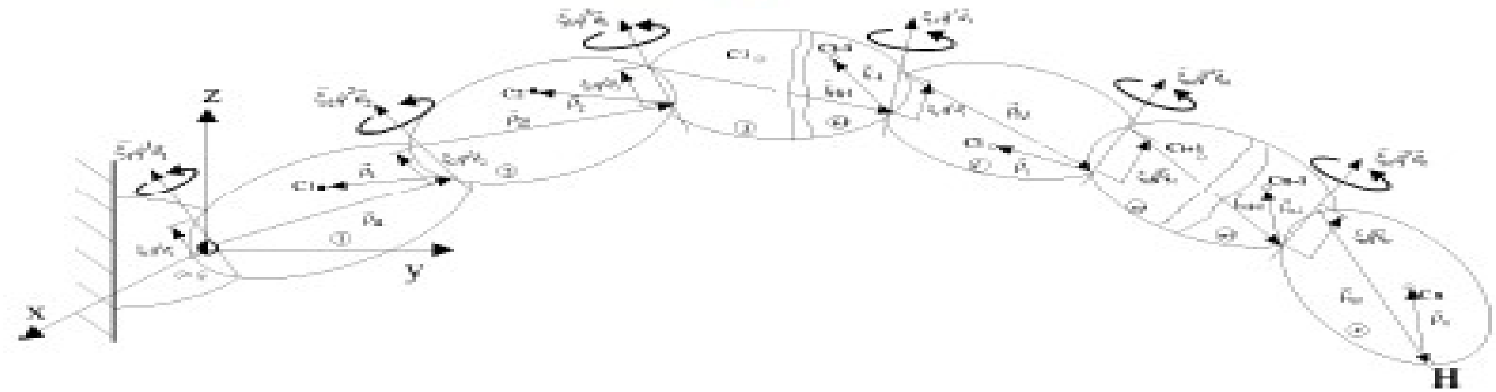
$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} \cos q^1 & -\sin q^1 & 0 \\ \sin q^1 & \cos q^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q^2 & -\sin q^2 \\ 0 & \sin q^2 & \cos q^2 \end{bmatrix}, \quad [A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}][A_{1,2}] = \begin{bmatrix} \cos q^1 & -\sin q^1 \cos q^2 & \sin q^1 \sin q^2 \\ \sin q^1 & \cos q^1 \cos q^2 & -\cos q^1 \sin q^2 \\ 0 & \sin q^2 & \cos q^2 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,3}] = [A_{0,2}][A_{2,3}] = [A_{0,2}][I] = [A_{0,2}]$$

$$\begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(1+q^3)\sin q^1 \cos q^2 \\ (1+q^3)\cos q^1 \cos q^2 \\ 0{,}8 + (1+q^3)\sin q^2 \end{Bmatrix}_{\substack{q^1=0{,}2 \\ q^2=0{,}4 \\ q^3=0{,}6}} = \begin{Bmatrix} -0{,}3 \\ 1{,}44 \\ 1{,}42 \end{Bmatrix} [m].$$

Угаона брзина $\vec{\bar{\omega}}_i$ [Vi] сегмента



$$\vec{\omega}_1 = \bar{\xi}_1 \vec{e}_1 \dot{q}^1$$

$$\vec{\omega}_{2r} = \bar{\xi}_2 \vec{e}_2 \dot{q}^2 ,$$

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_{2p} + \vec{\omega}_{2r} . \qquad \vec{\omega}_{2p} = \vec{\omega}_1 ,$$

$$\vec{\omega}_{3p} = \vec{\omega}_2 , \quad \vec{\omega}_{3r} = \bar{\xi}_3 \vec{e}_3 \dot{q}^3 ,$$

$$\vec{\omega}_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{\Omega}_{k(i)} \dot{q}^k .$$

$$\left\{ \vec{\omega}_i^{(0)} \right\} = \sum_{k=1}^{i} \bar{\xi}_k \left[A_{0,k} \right] \left\{ \vec{e}_k \right\} \dot{q}^k ,$$

$$\vec{\omega}_2 = \bar{\xi}_1 \vec{e}_1 \dot{q}^1 + \bar{\xi}_2 \vec{e}_2 \dot{q}^2 .$$

$$\vec{\omega}_3 = \sum_{k=1}^{3} \bar{\xi}_k \vec{e}_k \dot{q}^k .$$

$$\left\{ \vec{\omega}_i^{(0)} \right\} = [F] \{ \dot{q} \} ,$$

gde je

$$[F] \in R^{3 \times n} \Rightarrow [F] = \left[\bar{\xi}_1 \left\{ \vec{e}_1^{(0)} \right\} \vdots \bar{\xi}_2 \left\{ \vec{e}_2^{(0)} \right\} \vdots \ldots \vdots \bar{\xi}_i \left\{ \vec{e}_i^{(0)} \right\} \right] ,$$

$$\vec{\omega}_i = \sum_{k=1}^{i} \bar{\xi}_k \vec{e}_k \dot{q}^k$$

$$\left\{ \begin{matrix} (0) \\ \ldots \end{matrix} \right\} \rightarrow$$

Означава да се дати вектор израчунава у односу на О-ти тј непокретни координатни систем

Извод вектора везаног за сегмент по генералисаној координати *

$$\bar{\rho}_{ii} = \bar{\rho}_{ii}\left(q^1, q^2, \ldots, q^n\right).$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \bar{\rho}_{ii} \quad \forall \alpha \le i,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > i.$$

- Ојлеров образац

$$\frac{d\bar{\rho}_{ii}}{dt} = \bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{i} \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \dot{q}^\alpha \times \bar{\rho}_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{i} \left(\bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \bar{\rho}_{ii}\right) \dot{q}^\alpha$$

$$\frac{d\bar{\rho}_{ii}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{i} \frac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha, \quad \text{jer je} \quad \frac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0, \ \forall \alpha > i$$

$$\boxed{0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} - \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \bar{\rho}_{ii} \right) \dot{q}^\alpha \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \bar{\rho}_{ii} & \forall \alpha \le i \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{\rho}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0, & \forall \alpha > i \end{cases}}$$

$$\left[|\vec{r}| = \text{const.} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \vec{e} \times \vec{r}, \quad \left(d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{e} \times \vec{r} \right]$$

Брзина центра инерције крутог тела [Vi] $\vec{v}_{C_i}$

$$\vec{v}_{C_i} = \vec{v}_i = \frac{dr_i(q_1, q_2, ..., q_i)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{i} \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^{\alpha}$$

Види претходни слајд *

$$\frac{\partial \vec{\rho}_{kk}}{\partial q^{\alpha}} = \overline{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \vec{\rho}_{kk} \quad \forall \alpha \le k,$$

$$\frac{\partial \vec{\rho}_{kk}}{\partial q^{\alpha}} = 0 \quad \forall \alpha > k.$$

$$\frac{\partial \vec{e}_{k}}{\partial q^{\alpha}} = \overline{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \vec{e}_{k} \quad \forall \alpha \le k,$$

$$\frac{\partial \vec{e}_{k}}{\partial q^{\alpha}} = 0 \quad \forall \alpha > k$$

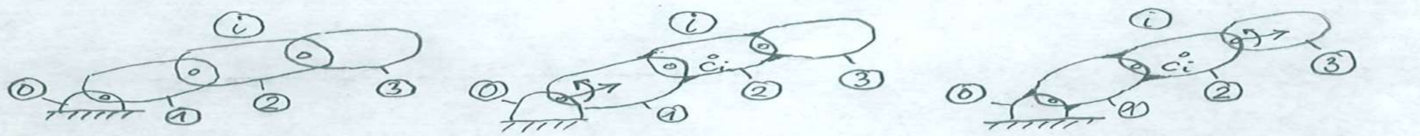
Квазибазни вектор $\vec{T}_{\alpha(i)} = \partial \vec{r}_i / \partial q^{\alpha}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{T}_{\alpha(i)} = \overline{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \vec{R}_{\alpha(i)} + \xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \forall \alpha \le i \\ &\vec{T}_{\alpha(i)} = 0, \forall \alpha > i, \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{R}_{\alpha(i)} = \left[\sum_{k=\alpha}^{i} \left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k \right) + \vec{\rho}_i \right]}$$

* квазибазни вектори

$$\vec{T}_{i(\alpha)} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \text{за} \quad \alpha > i$$



$q^1=0,\ q^2=0,\ q^3=0$ $\qquad$ $q^1\neq 0,\ q^2=0,\ q^3=0$ $\qquad$ $q^1=0,\ q^2=0,\ q^3\neq 0$

Закључак: на промену вектора положаја $\vec{r}_i$ (тј. вектора положаја центра инерције C_i) утичу само тела која предходе сегменту (телу) са фиксираним индексом (i) а тела која следе иза тела са индексом (i) не утичу на промену вектора положаја $\vec{r}_i$, односно:

$$\vec{T}_{i(\alpha)} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} \neq 0 \quad \text{за} \quad \alpha \leq i \quad ; \quad \vec{T}_{i(\alpha)} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \text{за} \quad \alpha > i \quad !$$

($\xi_\alpha = 1,\ \bar{\xi}_\alpha = 0 \Rightarrow$ транслаторни зглоб ; $\xi_\alpha = 0,\ \bar{\xi}_\alpha = 1 \Rightarrow$ ротациони зглоб)

Матрични облик

$\left\{ \begin{matrix} (0) \\ \dots \end{matrix} \right\} \rightarrow$ Означава да се дати вектор израчунава у односу на О-ти тј непокретни координатни систем

$$\left\{\vec{v}_i^{(0)}\right\} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\right\} \dot{q}^{\alpha}$$

$$\left\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\right\} = \bar{\xi}_\alpha \left[A_{0,\alpha}\right]\left[e_\alpha^d\right]\left\{\sum_{k=\alpha}^{i}\left[A_{\alpha,k}\right]\left(\left\{\vec{\rho}_{kk}\right\} + \bar{\xi}_k q^k \left\{\vec{e}_k\right\}\right) + \left[A_{\alpha,i}\right]\left\{\vec{\rho}_k\right\}\right\} +$$

$$+ \xi_\alpha \left[A_{0,\alpha}\right]\left\{\vec{e}_\alpha\right\} \quad \forall \alpha \le i,$$

$$\left\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\right\} = 0 \quad \forall \alpha > i.$$

$$\left[E\right] \in R^{3\times n} \Rightarrow \left[E\right] = \left[\left\{\vec{T}_{1(i)}^{(0)}\right\} \vdots \left\{\vec{T}_{2(i)}^{(0)}\right\} \vdots \dots \vdots \left\{\vec{T}_{n(i)}^{(0)}\right\}\right]$$

$$\left\{\vec{v}_i^{(0)}\right\} = \left[E\right]\left\{\dot{q}\right\},$$

Ugaono ubrzanje krutog tela (V_i)

$$\vec{\varepsilon}_i = \sum_{\beta=1}^{n} \vec{\Omega}_{\beta(i)} \ddot{q}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Lambda}_{\beta\alpha(i)} \dot{q}^{\beta} \dot{q}^{\alpha} ,$$

$$\boxed{\vec{\Lambda}_{\beta\alpha(i)} = \frac{\partial \vec{\Omega}_{\beta(i)}}{\partial q^{\alpha}} ,} \Rightarrow \vec{\Lambda}_{\beta\alpha(i)} = \overline{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \vec{\Omega}_{\beta(i)} \Rightarrow \vec{\Lambda}_{\beta\alpha(i)} = \vec{\Omega}_{\alpha(\beta)} \times \vec{\Omega}_{\beta(i)} ,$$

$$\vec{\Lambda}_{\beta\alpha(i)} = 0 \quad \forall\ \alpha > \beta ,$$

$$\vec{\varepsilon}_i = \sum_{\beta=1}^{i} \vec{\Omega}_{\beta(i)} \ddot{q}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{i}\sum_{\alpha=1}^{\beta} \vec{\Omega}_{\alpha(\beta)} \times \vec{\Omega}_{\beta(i)} \dot{q}^{\beta} \dot{q}^{\alpha} ,$$

$$\vec{\varepsilon}_i = \sum_{\beta=1}^{i} \overline{\xi}_{\beta} \vec{e}_{\beta} \ddot{q}^{\beta} + \sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=\alpha}^{i} \overline{\xi}_{\alpha} \overline{\xi}_{\beta} \vec{e}_{\alpha} \times \vec{e}_{\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} ,$$

$$\left\{\vec{\varepsilon}_i^{(0)}\right\} = \sum_{\beta=1}^{i} \overline{\xi}_{\beta} \left[A_{0,\beta}\right] \left\{\vec{e}_{\beta}\right\} \ddot{q}^{\beta} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=\alpha}^{i} \overline{\xi}_{\alpha} \overline{\xi}_{\beta} \left[A_{0,\alpha}\right] \left[e_{\alpha}^{d}\right] \left[A_{\alpha,\beta}\right] \left\{\vec{e}_{\beta}\right\} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} ,$$

Ubrzanje centra inercije krutog tela (V_i)

$$\vec{a}_{Ci} = \vec{a}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \vec{T}_{\alpha(i)} \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{i} \frac{d\vec{T}_{\alpha(i)}}{dt} \dot{q}^{\alpha} \ ,$$

Kako je $\vec{T}_{\alpha(i)} = \vec{T}_{\alpha(i)}\left(q^1, q^2, \ldots, q^i\right)$ sledi:

$$\frac{d\vec{T}_{\alpha(i)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{i} \frac{\partial \vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta} \ . \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^{\beta}} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \Rightarrow \frac{\partial \vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^{\beta}} = \frac{\partial \vec{T}_{\beta(i)}}{\partial q^{\alpha}} \ ,}$$

$$\boxed{\vec{a}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \vec{T}_{\alpha(i)} \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{i} \sum_{\beta=1}^{i} \vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \ ,}$$

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \frac{\partial \vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^{\beta}} \ ,$$

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \vec{\Gamma}_{\beta\alpha(i)} \ ,$$

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \bar{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \frac{\partial}{\partial q^{\beta}} \left[\sum_{k=\alpha}^{i} \left(\vec{\rho}_k + \xi_k \vec{e}_k q^k \right) + \vec{\tau}_i \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial q^{\beta}}\left[\sum_{k=\alpha}^{i}\left(\vec{\rho}_k+\xi_k\vec{e}_k q^k\right)+\vec{\tau}_i\right]=\frac{\partial}{\partial q^{\beta}}\left[\sum_{k=1}^{i}\left(\vec{\rho}_k+\xi_k\vec{e}_k q^k\right)+\vec{\tau}_i\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial q^{\beta}}\left[\sum^{i}\left(\vec{\rho}_k+\xi_k\vec{e}_k q^k\right)+\vec{\tau}_i\right]=\vec{T}_{\beta(i)}\,.$$

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)}=\bar{\xi}_{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\times\vec{T}_{\beta(i)}\quad\forall\ \ \alpha\le\beta\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_i=\sum_{\alpha=1}^{n}\vec{T}_{\alpha(i)}\ddot{q}^{\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta},}$$