Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - трећа недеља

Београд, 2023.

NR

Задатак 7 Израчунати матрицу трансформације применом Родригове матрице за случај сферног кретања крутог тела, чији положај одређују Ојлерови углови. Нека се прва ротације врши око осе Oz за угао $\psi = 30^\circ$, друга око чворне осе On за угао $\theta = 45^\circ$, а трећа око осе $O\zeta$ за угао $\varphi = 60^\circ$. Уводи се претпоставка да се координатни системи $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ у почетном положају поклапају.

Задатак је исти као Задатак 3 (прва недеља вежби), а у наставку ће бити урађен применом Родригове матрице трансформације.

$$\boxed{[A_r] = [I] + (1-\cos\varphi)\left[e^d\right]^2 + \sin\varphi\left[e^d\right]}$$

<u>Решење:</u>

Прва ротација врши се око осе Oz за угао ψ, а потребно је одредити матрицу трансформације координата из покретног координатног система $O\xi^{''}\eta^{''}\zeta^{''}$ у непокретни координатни систем $Oxyz$:

$$Oxyz \xrightarrow{\psi} O\xi^{''}\eta^{''}\zeta^{''} \qquad \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_\psi] \begin{Bmatrix} \xi^{''} \\ \eta^{''} \\ \zeta^{''} \end{Bmatrix}$$

Родригова матрица ове трансформације је:

$$[A_\psi] = [I] + (1-\cos\psi)\left[e_\psi^d\right]^2 + \sin\psi\left[e_\psi^d\right]$$

Дакле, да бисмо применили Родригову матрицу трансформације, потребно је да одредимо јединични вектор осе ротације и његов дуални објекат другог реда, а затим и његов квадрат:

$$\left\{\vec{e}_\psi\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_\psi^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_\psi^d\right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_\psi] = [I] + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_\psi] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Исти поступак примењујемо при одређивању матрице трансформације за наредне две ротације. Јединични вектор осе ротације одређен је у односу на локални координатни систем!

$$\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{Bmatrix} = [A_\theta] \begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix}$$

$$[A_\theta] = [I] + (1 - \cos\theta) \left[e_\theta^d\right]^2 + \sin\theta \left[e_\theta^d\right]$$

$$\{\vec{e}_\theta\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_\theta^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[A_\varphi] = [I] + (1 - \cos\varphi) \left[e_\varphi^d\right]^2 + \sin\varphi \left[e_\varphi^d\right] \Rightarrow [A_\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Коначно, укупна матрица трансформације је:

$$[A] = \left[A_{z_\psi}\right] \left[A_{\xi''_\theta}\right] \left[A_{\zeta'_\varphi}\right] = \begin{bmatrix} 0,1268 & -0,9267 & 0,3535 \\ 0,7803 & -0,1268 & -0,6123 \\ 0,6123 & 0,3535 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

<u>Идеја за вежбу:</u> У Задатку 4 (узастопно обртање око оса непокретног координатног система), можете одредити матрицу трансформације користећи Родригову матрицу трансформације!

Задатак 8 Одредити вектор угаоне брзине $\vec{\omega}$ тела у тренутку $t_1 = 1$ s у случају да се тело обрће око непокретне тачке O. Коначне једначине кретања тела су:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \frac{\pi t}{2} \text{ око осе } Ox, \\
\beta(t) &= \frac{\pi t^2}{4} \text{ око осе } O\eta_1, \\
\gamma(t) &= \frac{\pi t^3}{3} \text{ око осе } O\zeta_2.
\end{aligned}$$

У почетном тренутку тело је било у референтној конфигурацији.

Уводна разматрања Потребно је да се угаона брзина одреди у односу на непокретни координатни систем $Oxyz$.
Ка том циљу, полазимо од Ојлеровог обрасца:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

где су вектор угаоне брзине и вектор положаја одређени у односу на непокретни коорд. сис. $Oxyz$:

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Векторски производ можемо изразити као производ дуалног објекта другог реда првог вектора са другим вектором:

$$\vec{V} = \left[\omega^d\right] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Уз помоћ матрице трансформације можемо одредити везу између вектора положаја у непокретном и покретном координатном систему:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Према томе, вектор брзине је:

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{d}\,[A]}{\mathrm{d}t} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} + [A] \begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix}$$

С обзиром на то да је покретни координатни систем круто везан за тело, следи:

$$\overrightarrow{V} = \frac{\mathrm{d}\,[A]}{\mathrm{d}t} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Пошто су леве стране једначина (1) и (3) једнаке, можемо изједначити и њихове десне стране:

$$\left[\omega^d\right] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{d}\,[A]}{\mathrm{d}t} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

Увођењем трансформације координата (2), добија се:

$$\left[\omega^d\right] [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{d}\,[A]}{\mathrm{d}t} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

Tj.

$$\left[\omega^d\right] [A] = \frac{\mathrm{d}\,[A]}{\mathrm{d}t} \Big/ \cdot [A]^{-1} = [A]^{\mathrm{T}}$$

$$\boxed{\left[\omega^d\right] = \frac{\mathrm{d}\,[A]}{\mathrm{d}t} [A]^{\mathrm{T}}} \tag{4}$$

<u>Решење:</u>

Дакле, потребно је да одредимо матрицу трансформације, а затим да се она транспонује и да се одреди њен први извод по времену. Након тога ће бити одређене и пројекције угаоне брзине на осе непокретног координатног система $Oxyz$.

Матрице трансформације које се односе на три узастопне ротације су:

$$[A_{x_\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\left[A_{\eta_{1_\beta}}\right] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\left[A_{\zeta_{2_\gamma}}\right] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

За сада је довољно да претходне матрице трансформације буду одређене у функцији одговарајућих углова ротације, тј. у функцији времена, с обзиром на то да у наредним корацима очекујемо диференцирање по времену. Укупна матрица трансформације је:

$$[A] = [A_{x_\alpha}] \left[A_{\eta_{1_\beta}}\right] \left[A_{\zeta_{2_\gamma}}\right]$$

Тј.

$$\begin{aligned}[A] &= \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{c}\beta\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\beta \\ \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{c}\gamma + \mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{s}\gamma + \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta \\ -\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta\mathrm{c}\gamma + \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta\mathrm{s}\gamma + \mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\gamma & \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$^*\mathrm{c} = \cos,\ \mathrm{s} = \sin$$

где је сваки члан матрице обележен са α_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Први извод матрице трансформације по времену добија се када се одреди такав извод сваког члана α_{ij}:

$$\frac{\mathrm{d}\,[A]}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dot\alpha_{11} & \dot\alpha_{12} & \dot\alpha_{13} \\ \dot\alpha_{21} & \dot\alpha_{22} & \dot\alpha_{23} \\ \dot\alpha_{31} & \dot\alpha_{32} & \dot\alpha_{33} \end{bmatrix}$$

На пример, извод члана на позицији $(1, 1)$ тј. $\alpha_{11} = \cos\beta\cos\gamma$ је:

$$\dot\alpha_{11} = -\dot\beta\sin\beta\cos\gamma - \dot\gamma\cos\beta\sin\gamma$$

Очигледно је потребно одредити и изводе по времену једначина кретања:

$$\alpha(t) = \frac{\pi t}{2} \Rightarrow \dot\alpha = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

$$\beta(t) = \frac{\pi t^2}{4} \Rightarrow \dot\beta = \frac{\pi t}{2} \tag{6}$$

$$\gamma(t) = \frac{\pi t^3}{3} \Rightarrow \dot\gamma = \pi t^2 \tag{7}$$

Сада на основу једначине (4) можемо написати:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\alpha_{11} & \dot\alpha_{12} & \dot\alpha_{13} \\ \dot\alpha_{21} & \dot\alpha_{22} & \dot\alpha_{23} \\ \dot\alpha_{31} & \dot\alpha_{32} & \dot\alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Уочавамо пројекције угаоне брзине које су нам потребне, тј. ω_x, ω_y и ω_z:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\alpha}_{31}\alpha_{21} + \dot{\alpha}_{32}\alpha_{22} + \dot{\alpha}_{33}\alpha_{23} \\
\omega_y &= \dot{\alpha}_{11}\alpha_{31} + \dot{\alpha}_{12}\alpha_{32} + \dot{\alpha}_{13}\alpha_{33} \\
\omega_z &= \dot{\alpha}_{21}\alpha_{11} + \dot{\alpha}_{22}\alpha_{12} + \dot{\alpha}_{23}\alpha_{13}
\end{aligned}$$

Сређивањем одговарајућих израза, тражене пројекције добијају се у следећем облику:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\alpha} + \dot{\gamma}\sin\beta \\
\omega_y &= \dot{\beta}\cos\alpha - \dot{\gamma}\sin\alpha\cos\beta \\
\omega_z &= \dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}$$

На основу добијених пројекција вектора угаоне брзине, задатих једначина кретања и њихових првих извода (6)-(7), у тренутку $t_1 = 1$ s вектор угаоне брзине је:

$$\vec{\omega}_1 = 1,2071\pi\vec{i} - 0,7071\pi\vec{j} + 0,5\pi\vec{k}$$

Уколико је потребно одредити интензитет траженог вектора, с обзиром на ортогоналност Декартовог коодинатног система можемо применити Питагорину теорему:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2} = 4,665\,\mathrm{s}^{-1}$$