Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:

Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.

Za dodatna pitanja vezano za zadatak.

Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!.

Za ideju, komentar na izvođenje.

Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
- Uživo: tokom termina konsultacija **sredom u 10 časova** u Laboratoriji za elektrotehniku i elektroniku (soba 2, pored Studentske službe).

1 Elektrostatika

1. Dve koncentrične sfere, poluprečnika $R_1 = 5$ cm i $R_2 = 9$ cm nalaze se u vazduhu. Spoljašnja sfera naelektrisana je količinom naelektrisanja $Q_2 = 10$ nC. Izračunati kolikom količinom naelektrisanja, Q_1, treba naelektrisati unutrašnju sferu da bi potencijal spoljašnje sfere bio $V_2 = 2$ kV. Smatrati da je referentna tačka u beskonačnosti.

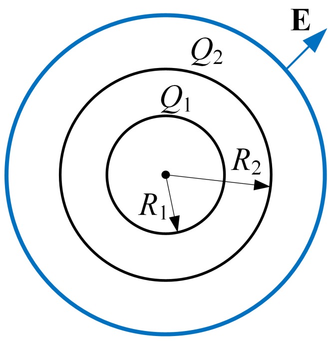
Rešenje: Kako postoji zahtev za potencijalom spoljašnje sfere, počećemo od njega. Prema definiciji, potencijal tačke A je integral električnog polja po proizvoljnoj putanji od te tačke do referentne tačke:

$$V_A = \int_A^{\text{ref}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Potencijal spoljašnje sfere je

$$V_2 = \int_{R_2}^{+\infty} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{R_2}^{+\infty} E\left(r\right) \cdot \mathrm{d}r, \tag{1}$$

jer su linije električnog polja, zbog simetrije, radijalne. U ovom zadatku vektor jačine električnog polja se može odrediti iz Gausovog zakona. Primetimo iz granica integracije u izrazu (1) da je potrebno odrediti samo električno polje na intervalu $(R_2, +\infty)$.



Postavimo Gausovu površ kao na slici. Ukupno obuhvaćeno naelektrisanje ovako odabranom površi je $Q_1 + Q_2$ pa dobijamo za $r > R_2$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Primenom izraza (1) imamo

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{R_2}^{+\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_2}^{+\infty} r^{-2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_2}^{+\infty} \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2 - Q_2 = \frac{1}{\cancel{9} \cdot 10^9} \cdot \cancel{9} \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^{-9} \\ &= 20 \cdot 10^{-9} - 10 \cdot 10^{-9} = 10 \text{ nC}. \end{aligned}$$

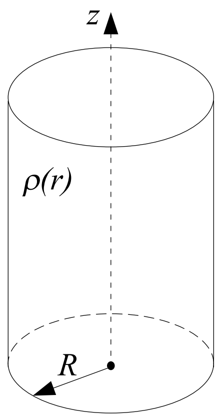
Koliko bi bilo električno polje unutar manje sfere, a koliko između sfera?

Da li bi se zadatak promenio ukoliko unutrašnja sfera ne bi bila šuplja, već da je kompletna od metala?

Ako bi referentna tačka bila na nekom drugom mestu, npr. u centru, da li bi se promenio izraz za potencijal spoljašnje sfere?

Koliki bi bio rad potreban da se jedno tačkasto naelektrisanje Q_0 prebaci sa unutrašnju na spoljašnju sferu?

2. U veoma dugačkom cilindru poluprečnika R ravnomerno je raspoređena zapreminska gustina naelektrisanja $\rho(r) = \rho_0$, gde je ρ_0 konstanta. Odrediti vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački prostora.



Rešenje: Kako je cilindar veoma dugačak, polje je aksijalno simetrično u odnosu na osu cilindra. Da bismo odredili intenzitet električnog polja na ostojanju r od ose, primenićemo Gausov zakon. Biramo koaksijalno postavljeni valjak poluprečnika baze r i visine h. Električno polje je tangencijalno na baze i normalno na omotač pa fluks postoji samo kroz omotač valjka. Razlikujemo slučajeve:

1) $r \leq R$:

$$\oint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E \cdot \cancel{2\pi} r \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0 \cancel{2\pi} r' \cancel{h} \mathrm{d}r'$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\rho_0 \cdot \frac{1}{2} r^2 = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \Longrightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\mathbf{i}_r.$$

2) $r > R$:

$$E \cdot \cancel{2\pi} r \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \rho_0 \cancel{2\pi} r' \cancel{h} \mathrm{d}r'$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\rho_0 \cdot \frac{1}{2} R^2 \Longrightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathbf{i}_r.$$

Studentima se predlaže da skiciraju funkciju jačine električnog polja u funkciji rastojanja, kao i da primete da je to neprekidna funkcija.

3. Poluprečnik unutrašnjeg provodnika sfernog vazdušnog kondenzatora iznosi $r_1 = 2$ cm, a unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika je r_2 =3 cm. Napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika je $U_{12} = 150$ V. Izračunati **a)** površinske gustine naelektrisanja obe elektrode. **b)** Najveću jačinu elektrostatičkog polja u kondenzatoru. **c)** Kapacitivnost kondenzatora.

Rešenje: Neka je unutrašnja elektroda kondenzatora opterećena sa Q, a spoljašnja sa $-Q$. U prostoru između elektroda $r \in (r_1, r_2)$ električno polje se može dobiti primenom Gausovog zakona:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \Longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad r \in (r_1, r_2)$$

Integracijom ovog polja od r_1 do r_2 dobija se napon

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Odavde je

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 U_{12}}{r_2 - r_1} = \frac{\frac{1}{9\cdot 10^9} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot \cancel{10^{-2}} \cdot 150}{(3-2) \cdot \cancel{10^{-2}}}$$
$$Q = 1 \text{ nC}.$$

Površinska gustina naelektrisanja unutrašnje elektrode je

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi r_1^2} = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \approx 200 \, \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}.$$

Površinska gustina naelektrisanja spoljašnje elektrode je

$$\sigma_2 = \frac{-Q}{4\pi r_2^2} = \frac{-10^{-9}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-4}} \approx -88,4 \, \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}.$$

Najveća jačina elektrostatičkog polja je za $r = r_1^+$ tj.

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{4 \cdot 10^{-4}} = 22,5 \, \frac{\text{MV}}{\text{m}}.$$

Kapacitivnost kondenzatora je

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{\frac{1}{9\cdot 10^9} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot \cancel{10^{-2}}}{(3-2) \cdot \cancel{10^{-2}}}$$
$$= \frac{6}{9} \cdot 10^{-7} = \frac{200}{3} = 66,67 \text{ nF}.$$

4. Metalna naelektrisana lopta poluprečnika $a = 5$ cm nalazi se na potencijalu $V = 100$ V. Izračunati potencijal i intenzitet jačine električnog u tački A na rastojanju $b = 10$ cm od centra lopte.

Rešenje: Kako je lopta metalna, električno polje unutar lopte je jednako nuli tj. $E = 0$ za $r < a$, gde je r odstojanje centra lopte do posmatrane tačke. Električno polje izvan lopte, za $r > a$ možemo dobiti primenom Gausovog zakona i ono je

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \ r > a. \tag{1}$$

Metalna lopta je ekvipotencijalna i njen potencijal je

$$V = \int_a^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

pa je odavde $Q = 4\pi\varepsilon_0 aV$. Potencijal proizvoljne tačke izvan lopte je

$$V = \int_r^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathrm{d}R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0} aV}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} r} = \frac{aV}{r},$$

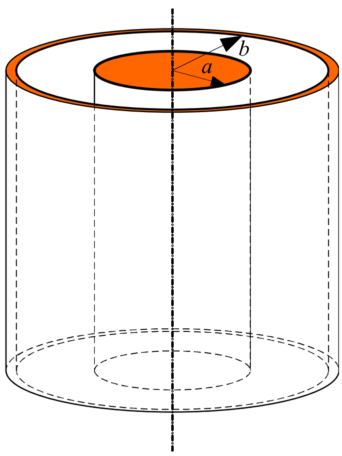
a potencijal u tački na rastojanju b je

$$V\left(r = b\right) = \frac{aV}{b} = \frac{5 \cdot 100}{10} = 50 \text{ V}.$$

Iz relacije (1) imamo

$$E\left(r = b\right) = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0} aV}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} b^2} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 100}{100 \cdot 10^{-4}} = 500\ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

5. Koaksijalni vod, prikazan na slici, ima unutrašnji poluprečnik spoljašnje elektrode b. Kritično električno polje vazduha je E_{kr0}. Izračunati **a)** poluprečnik unutrašnje elektrode a, tako da probojni napon ovog kondenzatora bude maksimalan i **b)** podužnu kapacitivnost koaksijalnog voda.



Rešenje: Neka je podužna gustina naelektrisanja unutrašnje elektrode Q'. Tada primenom Gausovog zakona možemo dobiti električno polje između elektroda:

$$E = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}, \ r \in \left(a, b\right).$$

Napon između elektroda je

$$U = \int_a^b \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}.$$

Najveće električno polje je uz unutrašnju elektrodu, za $r = a^+$ pa dobijamo

$$\frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 a} \leq E_{\mathrm{kr0}} \Longrightarrow Q'_{\mathrm{max}} = 2\pi\varepsilon_0 a E_{\mathrm{kr0}}.$$

Probojni napon dobijamo kada izraz za Q'_{max} zamenimo u izraz za napon:

$$U_{\mathrm{pr}} = \frac{\cancel{2\pi\varepsilon_0} a E_{\mathrm{kr0}}}{\cancel{2\pi\varepsilon_0}} \ln\frac{b}{a} = aE_{\mathrm{kr0}} \ln\frac{b}{a}.$$

Maksimalni probojni napon dobijamo iz uslova

$$\frac{dU_{\mathrm{pr}}}{da} = E_{\mathrm{kr0}} \left(\ln\frac{b}{a} + a \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{-b}{a^2} \right) = 0 \Longleftrightarrow \ln\frac{b}{a} = 1,$$

pa je $\frac{b}{a} = e$, a odavde je $a = \frac{b}{e}$. Podužna kapacitivnost je po definiciji

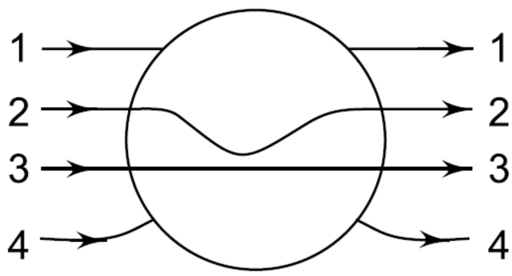
$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Za slučaj kada je probojni napon maksimalan dobijamo

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln e} = 2\pi\varepsilon_0.$$

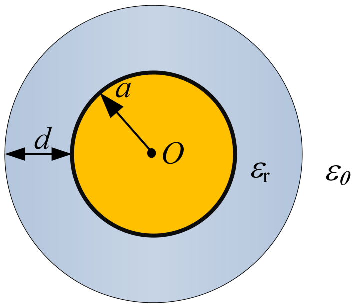
Odavde je i jedinica u SI sistemu za permitivnost vakuuma $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$.

6. Metalna sfera se nalazi u homogenom električnom polju. Koja od prikazanih linija električnog polja je tačna?



Rešenje: Kako je sfera metalna u njoj nema električnog polja. Stoga linije 2 i 3 odmah otpadaju. Kako električno polje na površi provodnika ima samo normalnu komponentu, u obzir dolaze samo linije polja 4.

7. Oko metalne lopte poluprečnika a i naelektrisanja Q nalazi se omotač od homogenog dielektrika debljine d i relativne dielektrične konstante ε_{r}. Odrediti: **a)** Vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački u prostoru, **b)** potencijal i **c)** kapacitivnost ove lopte. Smatrati da je referentna tačka u beskonačnosti.



Rešenje: a) Vektor jačine električnog polja dobija se primenom uopštenog Gausovog zakona:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{slobodno}}.$$

U metalu nema polja, pa je za $r < a$ vektor električne indukcije $\mathbf{D} = 0$, a onda je i $\mathbf{E} = 0$.

Za $r > a$ je

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \Longrightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Električno polje je

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} r^2}\mathbf{i}_r, \qquad r \in (a, a+d)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{i}_r, \qquad r\,(a+d, +\infty)\,.$$

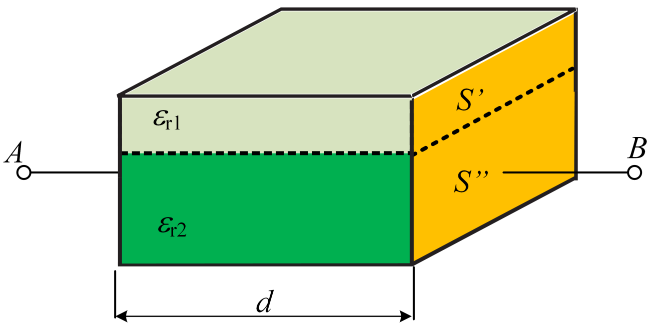
b) Potencijal lopte, koja je kao metalna ekvipotencijalna, dobijamo integracijom vektora jačine električnog polja

$$\begin{aligned} V &= \int_a^{+\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^{a+d} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} r^2}\,\mathrm{d}r + \int_{a+d}^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} a\,(a+d)} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(a+d)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(a+d)}\left(\frac{d}{\varepsilon_\mathrm{r} a} + 1\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(a+d)} \cdot \frac{d+\varepsilon_\mathrm{r} a}{\varepsilon_\mathrm{r} a}. \end{aligned}$$

c) Kapacitivnost lopte (smatra se da je druga elektroda u beskonačnosti) dobijamo kao

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} a\,(a+d)}{d+\varepsilon_\mathrm{r} a}.$$

8. Pločasti kondenzator ispunjen je sa dva dielektrika kao na slici, gde su $S' = 10\ \mathrm{cm}^2$ i $S'' = 15\ \mathrm{cm}^2$, $d = 1$ mm; $\varepsilon_{\mathrm{r}1} = 3$ i $\varepsilon_{\mathrm{r}2} = 5$. Naelektrisanja ploča kondenzatora su $Q_1 = -Q_2 = 4$ nC. Izračunati: **a)** vektor jačine električnog polja i električnog pomeraja (električne indukcije) i **b)** kapacitivnost ovog kondenzatora.



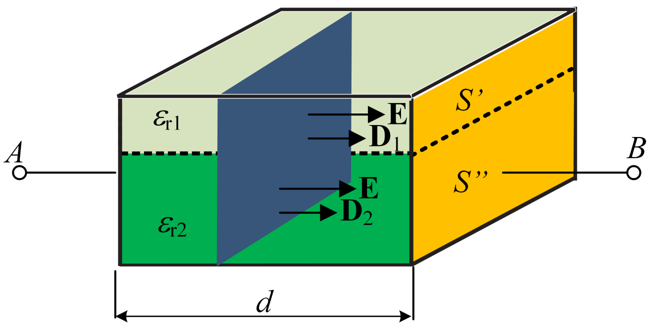
Rešenje: a) Pošto je razdvojna površina dva dielektrika normalna na ploče kondenzatora, to je vektor jačine električnog polja tangencijalan na tu razdvojnu površinu, kao na slici. Iz graničnih uslova je $E_{1t} = E_{2t} = E$.

Primenom uopštenog Gausovog zakona, gde je zatvorena površ prikazana na slici, dobija se

$$D_1 S' + D_2 S'' = Q \iff \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E S' + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E S'' = Q,$$

pa je

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} S' + \varepsilon_{r2} S''\right)} = \frac{4 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12} \left(3 \cdot 10 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 15 \cdot 10^{-4}\right)} \\ &= 43045,47 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \end{aligned}$$



Intenziteti vektora električnog pomeraja su:

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E = 1,14 \ \frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E = 1,9 \ \frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

b) Kako je električno polje homogeno između elektroda pločastog kondenzatora, napon između elektroda je

$$U = Ed = 43,05 \ \mathrm{V}$$

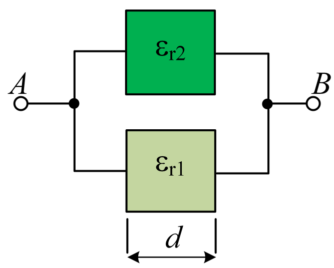
pa je kapacitivnost

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4 \cdot 10^{-9}}{43,05} = 92,91 \ \mathrm{pF}.$$

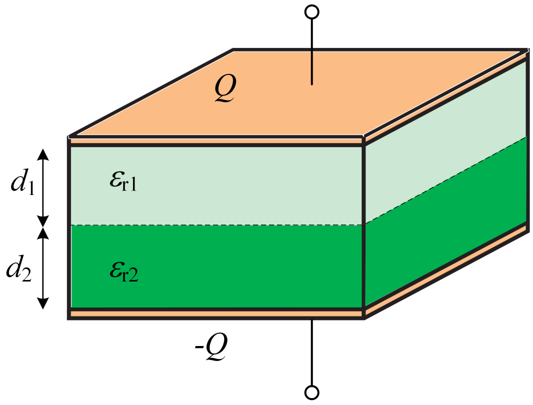
Analizirajući izraz za kapacitivnost kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} S' + \varepsilon_{r2} S'')} \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S'}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S''}{d} = C' + C'',$$

primećuje se da se može predstaviti kao paralelna veza dva kondenzatora čije su kapacitivnosti $C' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S'}{d}$ i $C'' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S''}{d}$.



9. U pločastom kondenzatoru, koji ima površine ploča $S = 20\ \mathrm{cm}^2$ i naelektrisanje na pločama $Q_1 = -Q_2 = Q = 10\ \mathrm{nC}$, nalaze se dva homogena dielektrika debljine $d_1 = 2$ mm i $d_2 = 3$ mm. Razdvojna površina dielektrika je paralelna pločama kondenzatora, kao na slici. Relativne dielektrične konstante ovih dielektrika su $\varepsilon_{\mathrm{r}1} = 3$ i $\varepsilon_{\mathrm{r}2} = 9$. Izračunati **a)** vektor dielektričnog pomeraja i vektor jačine električnog polja i **b)** kapacitivnost ovog kondenzatora.



Rešenje: S obzirom da je razdvojna površina između dielektrika paralelna pločama kondenzatora i da su vektor jačine električnog polja i vektor dielektričnog pomeraja upravni na ploče kondenzatora, to su vektori jačine električnog polja i dielektričnog pomeraja upravni i na razdvojnu površinu dielektrika. Znači da na površini koja razdvaja dielektrike ovi vektori imaju samo normalnu komponentu $E = E_{\mathrm{n}}$ i $D = D_{\mathrm{n}}$ ($E_{\mathrm{tan}} = 0, D_{\mathrm{tan}} = 0$). Iz graničnih uslova, na razdvojnoj površi je $D_{1\mathrm{n}} = D_{2\mathrm{n}} = D$, a kako u ovom slučaju vektor dielektričnog pomeraja ne zavisi od rastojanja od elektroda, znači da je vektor dielektričnog pomeraja isti u oba dielektrika. Njegov intenzitet je:

$$D = \frac{Q}{S} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-4}} = 5\ \frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Pravac i smer je upravan na ploče kondenzatora. Jačine električnog polja različite su u dielektricima:

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}1}} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3} \approx 188\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$$
$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}2}} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9} \approx 63\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}.$$

Pravac i smer vektora jačine električnog polja upravan je na ploče kondenzatora. Napon između pozitivne i negativne ploče kondenzatora je:

$$U_{12} = E_1 d_1 + E_2 d_2 \approx 564\ \mathrm{V}.$$

Kapacitivnost kondenzatora je

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = 17,7\ \mathrm{pF}.$$

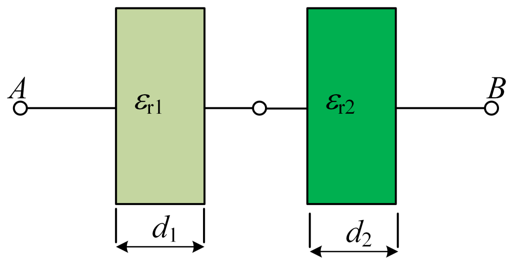
Ukoliko se izraz za kapcitivnost napiše u sledećem obliku

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\cancel{D} \cdot S}{\cancel{D}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r1}}} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r2}}}\right)}$$

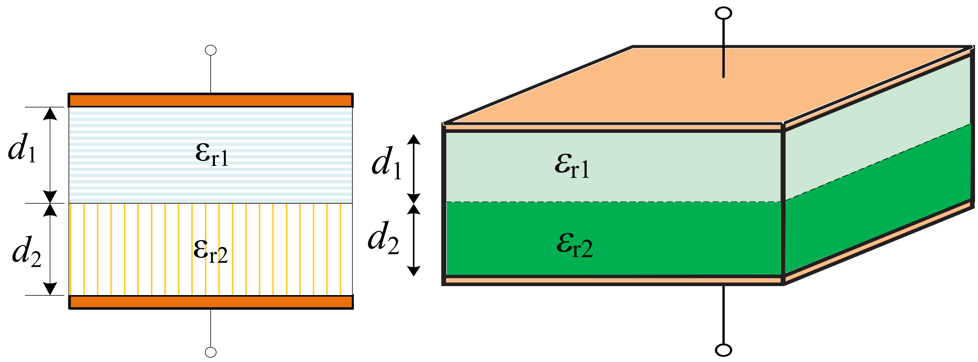
i uzme njegova recipročna vrednost

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r1}}S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r2}}S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Vidi se da se ovaj kondenzator može predstaviti rednom vezom dva kondenzatora, kapacitativnosti C_1 i C_2, kao na slici.



10. Pločasti kondenzator ima dvoslojan dielektrik prikazan na slici. Debljine slojeva dielektrika su jednake $d_1 = d_2 = 1$ mm, a njihove relativne permitivnosti i električne čvrstine su $\varepsilon_{\mathrm{r1}} = 2$, $E_{\mathrm{kr1}} = 200$ kV/cm i $\varepsilon_{\mathrm{r2}} = 5$, $E_{\mathrm{kr2}} = 100$ kV/cm. Izračunati probojni napon kondenzatora. Zanemariti ivične efekte.



Rešenje: Vektor jačine električnog polja i električne indukcije su normalni na razdvojnu površ dva dielektrika. Zbog toga, iz graničnih uslova se dobija $D_{1\mathrm{n}} = D_{2\mathrm{n}} = D$. Primenom uopštenog Gausovog zakona je

$$D = \frac{Q}{S},$$

a onda su jačine električnog polja u dielektricima date izrazima

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r1}}S} \;\text{ i }\; E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r2}}S}.$$

Napon kondenzatora je

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r1}}S}d_1 + \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r2}}S}d_2. \tag{1}$$

Potrebno je odrediti u kom dielektriku će prvo doći do proboja. U ovom slučaju do proboja dolazi u dielektriku sa manjom vrednošću $Q_{\max}$. Upoređivanjem

$$Q_{1\max} = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r1}}SE_{\mathrm{kr1}} \;\text{ i }\; Q_{2\max} = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r2}}SE_{\mathrm{kr2}}$$

dobija se

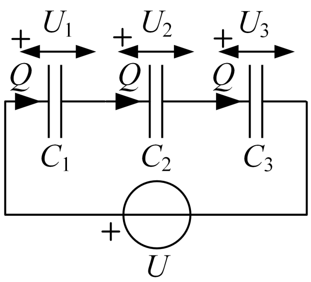
$$\frac{Q_{1\,\max}}{Q_{2\,\max}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}1} E_{\mathrm{kr}1}}{\varepsilon_{\mathrm{r}2} E_{\mathrm{kr}2}} = \frac{2 \cdot 200}{5 \cdot 100} = \frac{4}{5},$$

pa je manje $Q_{1\,\max}$. Ovo implicira da će do proboja doći prvo u prvom dielektriku. Zamenom $Q_{1\,\max}$ u relaciju (1) dobija se

$$U_{\mathrm{pr}} = \frac{\cancel{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}1} S} E_{\mathrm{kr}1}}{\cancel{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}1} S}} d_1 + \frac{\cancel{\varepsilon_0} \varepsilon_{\mathrm{r}1} \cancel{S} E_{\mathrm{kr}1}}{\cancel{\varepsilon_0} \varepsilon_{\mathrm{r}2} \cancel{S}} d_2 = 200 \cdot \frac{10^3}{10^{-2}} \cdot 10^{-3} + \frac{2}{5} \cdot 200 \cdot \frac{10^3}{10^{-2}} \cdot 10^{-3}$$

$$U_{\mathrm{pr}} = 20000 + 8000 = 28\ \mathrm{kV}.$$

11. Na izvor napona $U = 100$ V priključena su tri redno vezana kondenzatora nepoznatih kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3, kao na slici. Izmereni naponi na ovim kondenzatorima su: $U_1 = 20$ V, $U_2 = 30$ V i $U_3 = 50$ V, respektivno, a količina elektriciteta na svakom od njih je $Q = 300$ µC. Odrediti: **a)** nepoznate kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3, **b)** ekvivalentnu kapacitivnost ove redne veze kondenzatora, **c)** ukupnu energiju ovog sistema kondenzatora.



Rešenje: a) Kako je količina elektriciteta na svakom od kondenzatora 300 µC, primenom formule

$$Q = C \cdot U,$$

možemo dobiti kapacitivnost svakog od kondenzatora

$$C_1 = \frac{Q}{U_1} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{20} = 15\ \mu\mathrm{F}$$

$$C_2 = \frac{Q}{U_2} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{30} = 10\ \mu\mathrm{F}$$

$$C_3 = \frac{Q}{U_3} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{50} = 6\ \mu\mathrm{F}.$$

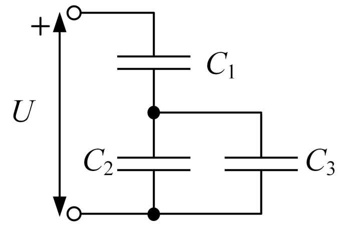
b) Ekvivalentna kapacitivnost tri redno vezana kondenzatora je data

$$\frac{1}{C_{\mathrm{ekv}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}}$$

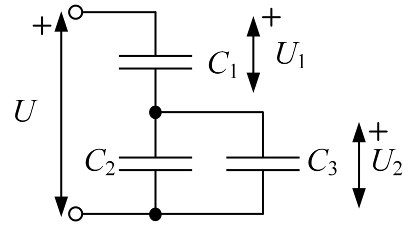
pa je $C_{\mathrm{ekv}} = 3$ µF.
c) Ukupna energija je

$$W = \frac{1}{2} C_{\mathrm{ekv}} U^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 15\ \mathrm{mJ}.$$

12. Tri kondenzatora, $C_1 = 6$ µF, $C_2 = 3$ µF i $C_3 = 1$ µF, vezana kao na slici, priključena su na izvor napona U =100 V. Odrediti: **a)** količinu elektriciteta na svakom od kondenzatora, **b)** energiju svakog kondenzatora pojedinačno, i **c)** ukupnu energiju sistema kondenzatora.



Rešenje: a) Na slici označen je napon pobude i naponi na kondenzatorima. Iz jednačine naponske ravnoteže ima se



$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2 + C_3}$$
$$100 = Q \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} \right),$$

pa je $Q = 240\ \mu$C. Ova količina elektriciteta odgovara kondenzatoru čija je kapacitivnost C_1. Da bi se odredile količine elektriciteta na preostala dva kondenzatora, potrebno je izračunati napon U_2

$$U_2 = \frac{Q}{C_2 + C_3} = 60 \text{ V},$$

pa je

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 180\ \mu\text{C}$$
$$Q_3 = C_3 \cdot U_2 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 60\ \mu\text{C}.$$

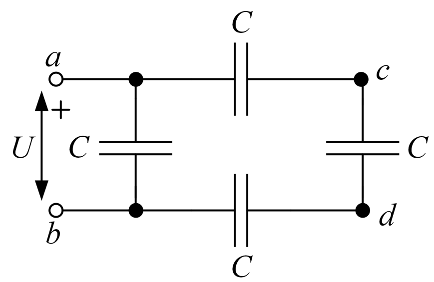
b) Energija svakog od kondenzatora je

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 40^2 = 4,8 \text{ mJ}$$
$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2 = 5,4 \text{ mJ}$$
$$W_3 = \frac{1}{2} C_3 U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2 = 1,8 \text{ mJ}.$$

c) Ukupna energija se dobija kao zbir pojedinačnih energija

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 12 \text{ mJ}.$$

13. Svi kondenzatori kapacitivnosti $C = 6$ µF su neopterećeni priključeni u kolo, kao na slici, i dovedeni na ulazni napon $U_{ab} = 100$ V. Odrediti **a)** napon na kondenzatoru koji se nalazi između tačaka c i d. **b)** Ukupnu energiju u sistemu.



Rešenje: a) Tri redno vezana kondenzatora imaju isto opterećenje Q. Iz relacije

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} = \frac{3Q}{C},$$

dobijamo da je

$$Q = \frac{CU}{3} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{3} = 200\ \mu\mathrm{C}.$$

Napon između tačaka c i d je

$$U_{cd} = \frac{Q}{C} = \frac{200 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 33,33\ \mathrm{V}.$$

b) Ekvivalentna kapacitivnost između tačaka a i b se može dobiti ukoliko primetimo da su tri redno vezana kondenzatora u paraleli sa četvrtim kondenzatorom pa je

$$C_{\mathrm{ekv}} = \frac{C}{3} + C = \frac{4C}{3} = 8\ \mu\mathrm{F}.$$

Ova ekvivalentna kapacitivnost se nalazi na naponu U_{ab} pa je energija

$$W_{\mathrm{uk}} = \frac{1}{2} C_{\mathrm{ekv}} U_{ab}^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 4 \cdot 10^{-2} = 40\ \mathrm{mJ}.$$