Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ЕНЕРГЕТСКИ АСПЕКТИ -
енергија деформисања чврстог тела

Биомеханика ткива и органа

ENERGIJA ELASTIČNOG DEFORMISANJA TELA
RAD SPOLJAŠNJIH SILA NA TELO

Primjna prvog zakona termodinamike kod deformisanja tela

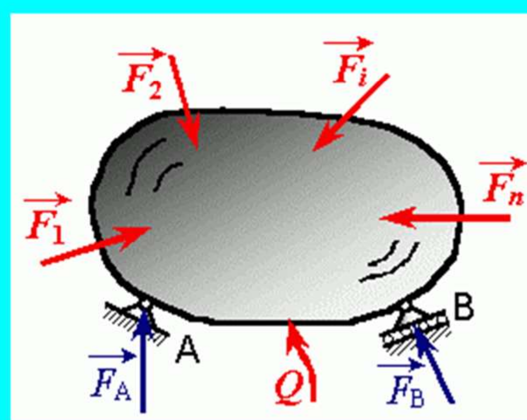
Rad spoljašnjih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n$ na deformabilnom telu deformišu telo, a pri tom sile vrše rad W_e,. Osim tog telo od okoline prima ili predaje toplotu ***Q***. Rad spoljasnjih sila i dovedena Q troše se na povećanje unutrašnje energije tela ***U*** i na povećanje njegove kinetičke energije E_k.
Prema **prvom zakonu termodinamike** vredi:

$$\boxed{W_\mathrm{e} + Q = U + \Delta E_\mathrm{k}}.$$

Pri polaganom povećanju opterećenja prirast kinetičke energije tela može se zanemariti, kao i promena toplote sa okolinom, te vredi izraz:

$$\boxed{W_\mathrm{e} \cong U},$$

tj. celokupan rad spoljašnjih sila troši se na povećanje ***unutrasnje energije*** tela, koja se tada naziva i ***energijom deformisanja***. Kad je telo elastično, energija deformisanja može se ponovno pretvoriti u mehanički rad.
Ako se razmatraju samo ***linearno-elastična tela***, što znači da sile linearno rastu s porastom pomeranja njihovih nap. tačaka, odnosno da naprezanja linearno zavise o deformacijama, kao i da se tela nakon rasterećenja potpuno vraćaju u prvobitni oblik i dimenzije.



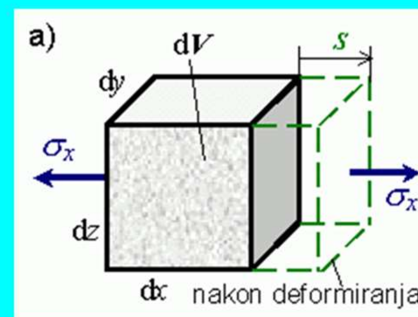
ENERGIJA DEFORMISANJA I GUSTINA ENERGIJE DEFORMISANJA

Određivanje energije deformisanja tela kod:
a) normalne komponente naprezanja; b) tangencijalne komponente naprezanja; c) opšteg slučaja opterećenja

Primjenjuje se ***metod superpozicije***, tj. posebno se razmatra energija deformisanja svake komponente naprezanja, a ukupnu energiju deformisanja odredi ćemo sabiranjem na odgovarajući način pojedinih delova energije. Razmatranje se sprovodi na elementu tela V $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

a) element opterećen normalnom komponentom naprezanja σ_x, slika a)**:**

Pri polaganom opterećivanju naprezanje postepeno raste ***s*** porastom deformacije. Kod linearno-elastičnih materijala zavisnost naprezanja i deformacija je linearna.



Elementarni rad spoljasnjih sila na element tela jest:

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e} = \int_{(s)} F_x \cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}U$$

.Sila F_x raste linearno od 0 do svoje konačne vrednosti:

$$F_x = \sigma_x \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Konačno pomeraj s napadne tačke sila F_x jeste:

$$s = \varepsilon_x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}s = \mathrm{d}(\varepsilon_x\,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}\varepsilon_x\,\mathrm{d}x.$$

Sledi izraz za rad spolj. sila na element tela:

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}F_x \cdot s = \frac{1}{2}\sigma_x\,\varepsilon_x\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}U.$$

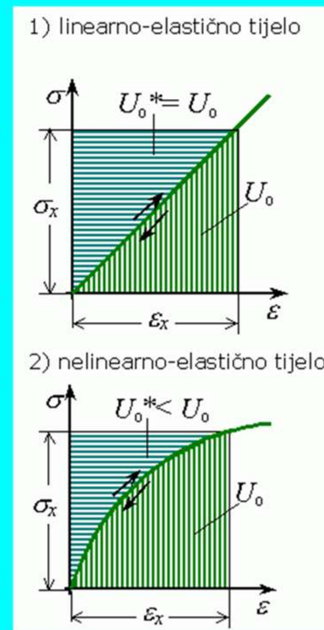
Izraz za **energiju deformisanja tela** može se izvesti i uz primjenu Hookeovog zakona za jednoosno stanje naprezanja, tj. $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, sledi:

$$\boxed{\mathrm{d}U = \int_{(s)} F_x\,\mathrm{d}s = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}\varepsilon_x\,\mathrm{d}x = E\,\mathrm{d}V \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x \mathrm{d}\varepsilon_x = E\,\mathrm{d}V\,\frac{\varepsilon_x^2}{2} = \frac{1}{2}\sigma_x\,\varepsilon_x\,\mathrm{d}V}.$$

Energija deformisanja po jedinici V tela jeste ***gustina energije deformisanja*** U_o.

Za element opterećen jednoosnim normalnim naprezanjem σ_x, gustina energije deformisanja dato je izrazom, slika 1):

$$\boxed{U_{\mathrm{o}} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x}.$$



Ako tijelo nije linearno-elastično bit će gustina energije deformiranja:

$$U_{\mathrm{o}} = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \mathrm{d}\varepsilon_x = k\sigma_x\varepsilon_x,$$

gdje je $0 < k < 1$ konstanta zavisna o svojstvima tela, a dijagram $\sigma_x = f(\varepsilon_x)$ dan je na slici 2).

Može se definisati i komplementarna energija deformisanja, a njena gustina definise se izrazom:

$$\boxed{U_{\mathrm{o}}^* = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x \mathrm{d}\sigma_x}.$$

Za linearno elastično tijelo, slika 1), komplementarna energija deformisanja iznosi:

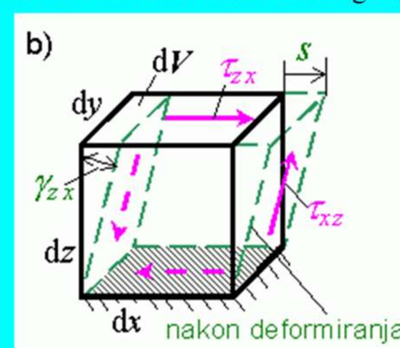
$$\boxed{U_{\mathrm{o}}^* = U_{\mathrm{o}} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x}$$

b) element opterećen tangencijalnim komponentama naprezanja $\tau_{xz} = \tau_{zx}$:

Element na slici b) nalazi se u stanju čistog smicanja. Ako je donja povrsina nepomična, sila koja na njoj djeluje ne vrši rad. Rad bočnih sila također je jednak nuli, jer je pomeraj upravan na pravac sile. rad vrši samo sila na gornjoj površini. Elementarni rad spoljašnjih sila iznosi:

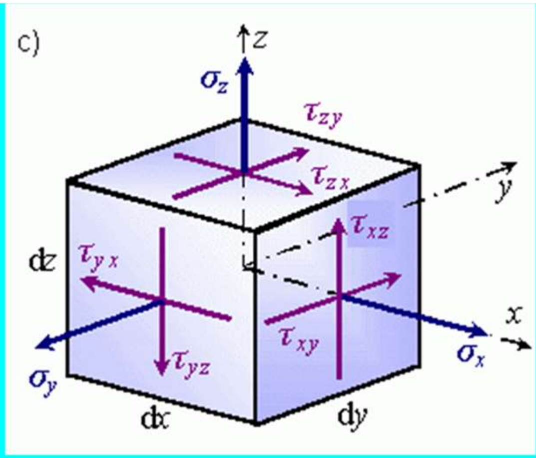
$$\mathrm{d}W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}(\tau_{zx} \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x)\gamma_{zx}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}\mathrm{d}V = \mathrm{d}U,$$

gdje je γ_{zx} ugaona deformacije elementa.



Gustina energije deformisanja elementa data je izrazom:

$$\boxed{U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}}.$$



c) opštii slučaj opterećenja elementa, slika c):

Naprezanje σ_x vrši rad samo na deformaciji ε_x, naprezanje σ_y vrši rad na deformaciji ε_y,

naprezanje τ_{zx} na deformaciji γ_{zx}, itd. Radovi se mogu nezavisno računati, pa je ukupni rad unutrašnjih sila u opštem slučaju naprezanja dan izrazom:

$$dW_e = dU = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \ldots + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dV,$$

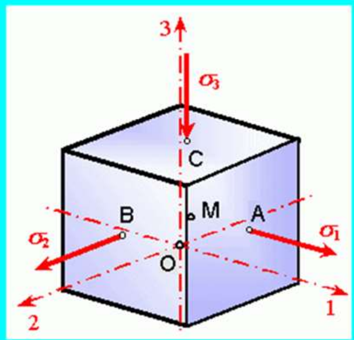
a gustina energije deformisanja jest:

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)}.$$

IZRAZI ZA GUSTINU DEFORMISANJA TELA

u slučaju glavnih naprezanja i glavnih deformacija gustina energije deformisanja jeste:

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right)}$$



komponente naprezanja i deformacija povezane su hookeovim zakonom, te se energija deformisanja može izraziti samo kao funkcija naprezanja, odnosno deformacija. sledi:

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}.$$

gustina energija ne zavisi o izboru koordinatnog sistema, pa u slučaju podudaranja osi s glavnim pravcima naprezanja sledi jednostavniji oblik izraza:

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]}.$$

Delovi energije deformisanja tela

Deformiranje okoline svake tačke može se rastaviti na istovremenu promenu oblika (**distorzija**) i promjenu zapremin (**dilatacija**). Energiju deformisanja može se rastaviti na dva dela: **energiju promjene zapremine** ili **dilatacijsku (hidrostatičku) energiju** i na **energiju promjene oblika** ili **distorzijsku energiju**.

Zapreminska deformacija Θ izražava promenu zapreminei vezana je uz podužne deformacije izrazom:

$$\boxed{\Theta \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}.$$

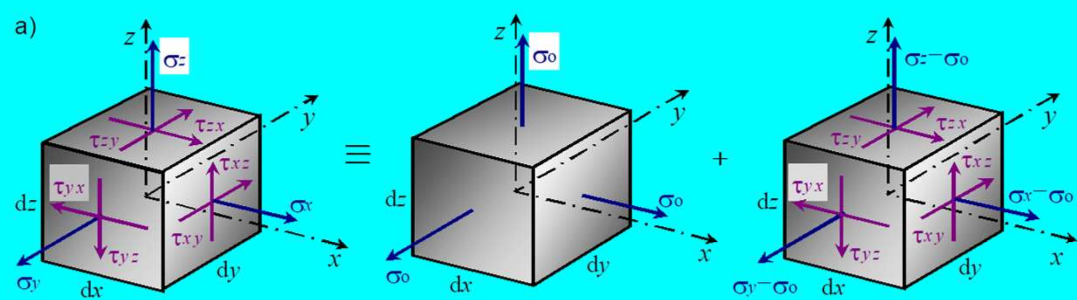
Ako uvrstimo Hookeov zakon sledi:

$$\boxed{\Theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_o = \frac{\sigma_o}{K}},$$

gdje su K – zapreminski modul elastičnosti i σ_o – srednje normalno naprezanje ("**hidrostatički pritisak**") definisan izrazima:

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}, \qquad \boxed{\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}}.$$

Svaki se tenzor naprezanja može rastaviti u dva dela: **sferni deo** i **devijatorski deo**. Sferni deo predstavlja jednoliko sabijanje ili jednoliko rastezanje u svim smerovima i uzrokuje samo dilataciju ili **promjenu zapremine**. To srednje naprezanje odgovara hidrostatičkom pritisku, pa odatle i naziv hidrostatička energija deformisanja. Devijatorski dio uzrokuje samo distorziju ili **promenu oblika**, slika a):



Sferni i devijatorski deo tenzora naprezanja.

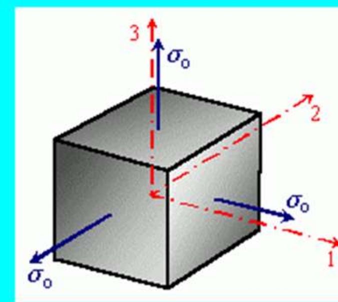
U matričnom zapisu tenzor naprezanja jeste:

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \left[\sigma_{ij}^{o}\right] + \left[s_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_o) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_o) \end{bmatrix}.$$

ili izražen s glavnim naprezanjima, slika b), u obliku:

IZRAZ ZA GUSTINU DILATACIJSKE (HIDROSTATIČKE) ENERGIJE DEFORMISANJA

ako uvrstimo komponente sfernog tenzora naprezanja $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_o$, gustina dilatacijske (hidrostatičke) energije U_{oh} data je

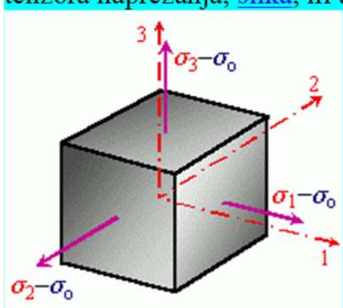


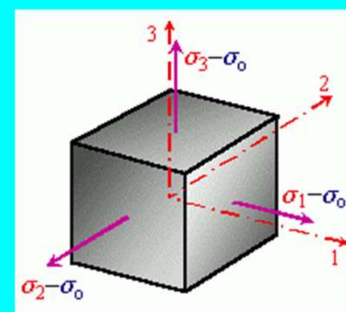
izrazom:

$$U_{oh} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_o^2 = \frac{\sigma_o^2}{2K} \quad □ \quad \boxed{U_{oh} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2}.$$

Izraz za gustinu distorzijske energije deformisanja

Gustina distorzijske energije deformisanja možemo dobiti tako da u izraz za U_o uvrstimo komponente devijatorskog tenzora naprezanja, slika, ili tako da od ukupne gustine energije deformisanja oduzmemo gustinu dilatacijske energije:





$$\boxed{U_o = U_{oh} + U_{od}} \quad □ \boxed{U_{od} = U_o - U_{oh}}.$$

Slijedi izraz za gustinu distorzijske energije deformiranja:

$$U_{od} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right] - \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2,$$

koji nakon sređivanja ima oblik:

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right],$$

odnosno u obliku: $\boxed{U_{od} = \frac{1}{3G}\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2\right)}$.

Maksimalna tangenicjalna naprezanja kod prostornog stanja naprezanja u tački tela data su izrazima:

$$\boxed{\tau_{12} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}, \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}.$$

Функција специфичне енергије деформације W са применом биолошке материјале и ткива
- нелинеарна еластичност

Пример физиолошког издужења код плућа је у опсегу $(1.1-2)$

Функција W је функција деформације овде је тензор. C, функција издужења α

$$W = W(C) = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}$$

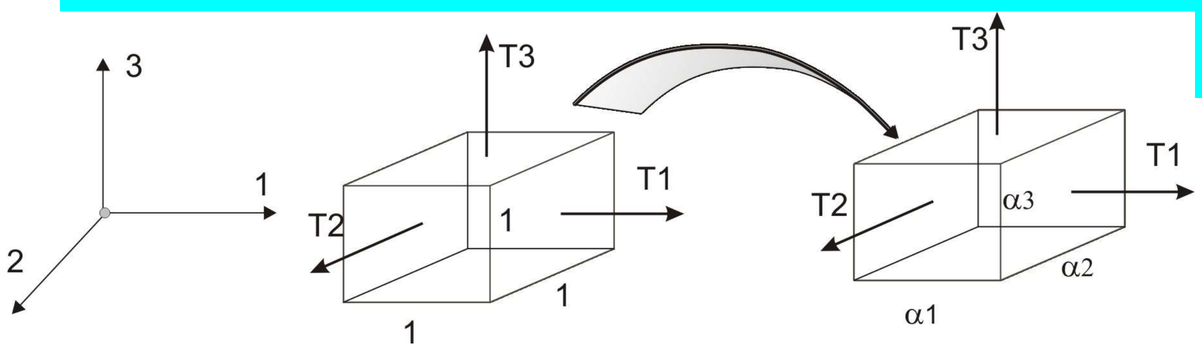
За материјале који су изотропни онда се може $W = W(I_c, II_c, III_c)$

Пример формирања конститутивних релација применом виртуелног рада.

Силе - $T_1\alpha_2\alpha_3, T_2\alpha_1\alpha_3, T_3\alpha_1\alpha_2$ рад на вирт. померањима $\delta\alpha_i,\ i = 1,2,3$

,

$\alpha_i + \delta\alpha_i,\ i = 1,2,3$



$$\delta W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}\delta\alpha_3$$

$$\delta W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = T_1\alpha_2\alpha_3\delta\alpha_1 + T_2\alpha_1\alpha_3\delta\alpha_2 + T_3\alpha_1\alpha_2\delta\alpha_3$$

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}, \quad T_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\frac{1}{\alpha_1\alpha_3}, \quad T_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2},$$

За мале деформације

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial e_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial e_1}\frac{1}{\alpha_2\alpha_3} = \frac{\partial W}{\partial e_1}\circ 1 \circ \left(\left(1+e_2\right)\circ\left(1+e_3\right)\right)^{-1} \approx \frac{\partial W}{\partial e_1} \ ,$$

$$\alpha_i = 1 + e_i,\ i = 1,2,3$$

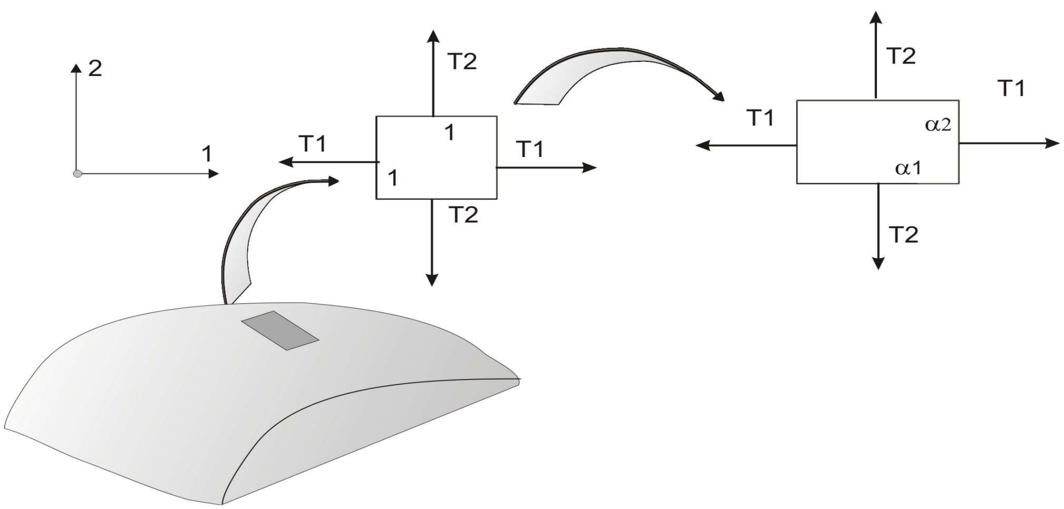
$$T_2 = \frac{\partial W}{\partial e_2},\ \ T_3 = \frac{\partial W}{\partial e_3},\ \ T_i \to \sigma_i \ \ oznake$$

Kastiljanova teorema

Равански случај еластичности (кожа, паренхин плућа)

$$\delta W\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = T_1\alpha_2\delta\alpha_1 + T_2\alpha_1\delta\alpha_2$$

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{1}{\alpha_2},\ \ T_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\frac{1}{\alpha_1},$$



Случај нестишљивог материјала

$$III_C = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = 1\,,\ (\Delta V = 0) \Rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$$

$$W = W(\alpha_1,\alpha_2)\big|_{izotropan} = W(I_C, II_C)$$

$p_{0\rightarrow}$ из граничних услова

$$T_1 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{1}{\alpha_2\alpha_3},$$

$$T_2 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\frac{1}{\alpha_1\alpha_3},$$

$$T_3 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2},$$

Двосмерна екстензија нестишљивог материјала (пр. Кожа, плућа, ткиво срца)

$T_3 = 0,\ \alpha_3 = 1/(\alpha_1\alpha_2)$

$$0 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2} \Rightarrow p_0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2},$$

Меримо

$\alpha_1, \alpha_2, T_1, T_2$

$$T_1 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{1}{\alpha_2\alpha_3},\ T_2 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\frac{1}{\alpha_1\alpha_3},$$

Одређујемо

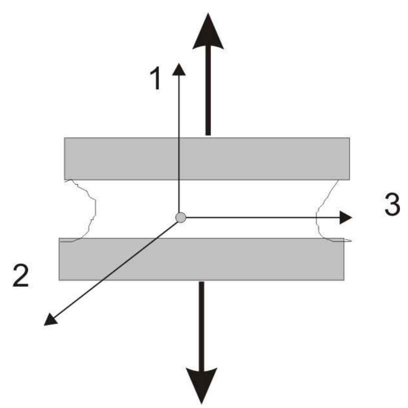
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \Rightarrow W = W(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

Једносмерна екстензија

$$T_1 \neq 0,\ \ T_2 = T_3 = 0,\ \ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{\alpha_1}$$

$$T_1 = 2\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial II_C}\right)$$

Чисто смицање



$$T_1 = 2\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial II_C}\right)$$

$$\alpha_2 = 1,\ \ \alpha_3 = 1/\alpha_1,$$