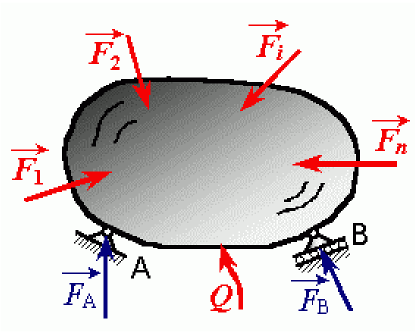
Енергија елатичног деформисања чврстог тела
Рад спољашњих сила које делују на тело

Рад спољашњих сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..\vec{F}_n$ на деформабилном телу троши се на деформисање тог тела, где при томе спољашње силе врше рад W_e ,(сл.5.1). Осим тога тело може да прими или преда околини количину топлоте Q .Рад спољашњих сила и доведена топлота се троше на повећање унутрашње енергије тела U и на повећање његове кинетичке енергије E_k . Према првом закону термодинамике добија се:



Слика 5.1

$$\boxed{W_e + Q = U + \Delta E_k}.$$

При лаганом повећању оптерећења прираст кинетичке енергије тела може се занемарити, као и промена топлоте са околином тј:

$$\boxed{W_e \cong U},$$

тј. целокупан рад спољашњих сила се троши на повећање унутрашње енергије тела, која се тада назива и *енергијом деформисања*. Код еластичних тела, енергија деформисања се може поново претворити у механички рад. Овде ће се разматрати случај линеарно-еластичних тела где силе линеарно се повећавају, односно напрезања линеарно зависе од деформација, где се након растерећења тела потпуно враћају у првобитни облик са истом запремином.

Енергија деформисања и густина енергије деформисања

Одређивање енергије деформисања тела
а)за случај нормалне компоненте напрезања
б) за случај тангенцијалне компоненте напрезања
ц) оптшег случаја оптерећења

Примењује се метода суперпозиције, тј. посебно се посматра енергија деформисања сваке компонентне напрезања, а укупну енергију деформисања одредићемо њиховим сабирањем.Уочава се диф. елеменат тела запремине $dV = dxdydz$

а)за случај нормалне компоненте напрезања(сл.5.2)

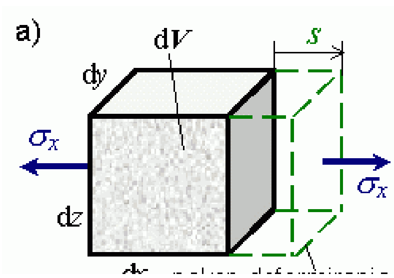
При лаганом оптерећивању одговарајуће напрезање постепено линеарно расте са порастом деформације. Елементарни рад спољашњих сила је:

$$\mathrm{d}W_e = \int_{(s)} F_x \cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}U \, .$$

Како је у случају једноосног напрезања на основу Хуковог закона $\sigma_x = E\varepsilon_x$ добија се да је:

$$\mathrm{d}U = \int_{(s)} F_x\,\mathrm{d}s = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}\varepsilon_x \mathrm{d}x = E\,\mathrm{d}V \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x \mathrm{d}\varepsilon_x = E\,\mathrm{d}V \frac{\varepsilon_x^2}{2} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \mathrm{d}V$$

Енергија деформисања по јединици запремине тела представља густину енергије деформисања U_o. У претходном случају густина енергије деформисања је



Слика 5.2

$$U_o = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x$$

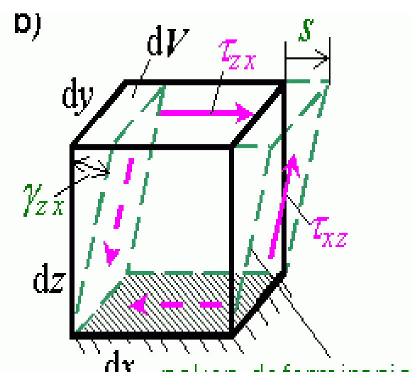
Ако тело није линеарно-еластично густина енергије деформирања је

$$U_o = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \mathrm{d}\varepsilon_x = k\sigma_x \varepsilon_x ,$$

гје је $0 < k < 1$ константа зависна о својствима тела.

б) елемент оптерећен тангенцијалним компонентама напрезања

$\tau_{xz} = \tau_{zx}$



Слика 5.3

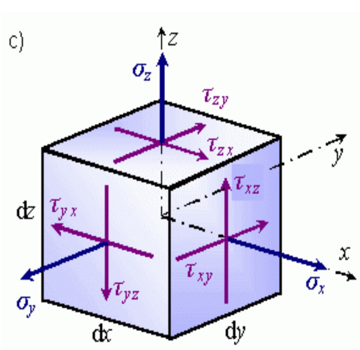
Елемент на сл. 5.3 налази се у стању чистог смицања. Ако је доња плоча непомична, сила која на њој делује не врши рад. Рад бочних сила такође је једнак нули, јер је помак управан на правац силе. Рад врши само сила на горњој плочи.Елементарни рад спољашњих сила износи:

$$\mathrm{d}W_e = \frac{1}{2}(\tau_{zx} \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x)\gamma_{zx}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}\mathrm{d}V = \mathrm{d}U ,$$

гдје је γ_{zx} угао деформације елемента.Густина енергије деформисања елемента дата је изразом:

$$U_o = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} .$$

ц) општег случаја оптерећења, сл.5.4



Слика 5.4

Напрезање σ_x врши рад само на деформацији ε_x, напрезање σ_y врши рад на деформацији ε_y, напрезање τ_{zx} на деформацији γ_{zx}, итд. Радови се могу независно рачунати, па је укупни рад унутарњих сила у општем случају напрезања дат изразом:

$$\mathrm{d}W_e = \mathrm{d}U = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \ldots + \tau_{zx}\gamma_{zx})\mathrm{d}V ,$$

а густина енергије деформисања је:

$$U_o = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) .$$

У случају главних напрезања (сл.5.5) и главних деформација густина енергије деформисања је:

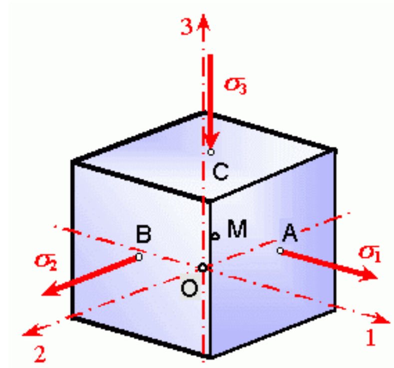
$$U_o=\frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3\right)$$

Компоненте напрезања и деформација повезане су Хуковим законом, те се енергија деформисања може изразити само као функција напрезања, односно деформација. Следи:

$$U_o=\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2\right)-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

Густина енергија не зависи од избора координатног система, па у случају подударања оса с главним правцима напрезања следи једноставнији облик израза:

$$U_o=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right].$$



Слика 5.5

Делови енергије деформисања тела

Деформисање околине сваке тачке може се раставити на истовремену промену облика (**дисторзија**) и промену запремине (**дилатација**). Енергију деформисања може се раставити на два дела:**енергију промене запремине** или **дилатацијску** (**хидростатичку**) **енергију** и на **енергију промене облика** или **дисторзијску енергију**.

Запреминска деформација Θ изражава промену запремине и везана је за подужне деформације изразом:

$$\Theta\approx\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

Ако уврстимо Хуков закон следи:

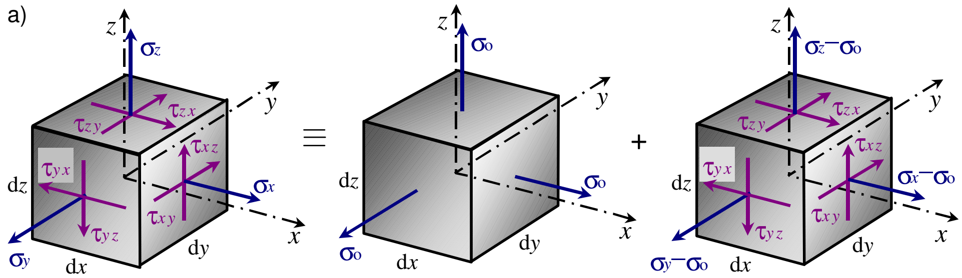
$$\Theta=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_o=\frac{\sigma_o}{K},$$

гдје су K – запремински модул еластичности и σ_o – средње нормално напрезање ("**хидростатички притисак**") дефинисани изразима:

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)},$$

$$\sigma_o=\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}.$$

Сваки се тензор напрезања може раставити у два дела: **сферни део** и **девијаторски део**. Сферни део представља једнолико сабијање или једнолико растезање у свим смеровима и узрокује само дилатацију или **промену запремине**. То средње напрезање одговара хидростатичком притиску, па одатле и назив хидростатичка енергија деформисања. Девијаторски део узрокује само дисторзију или **промену облика**, слика 5.6.



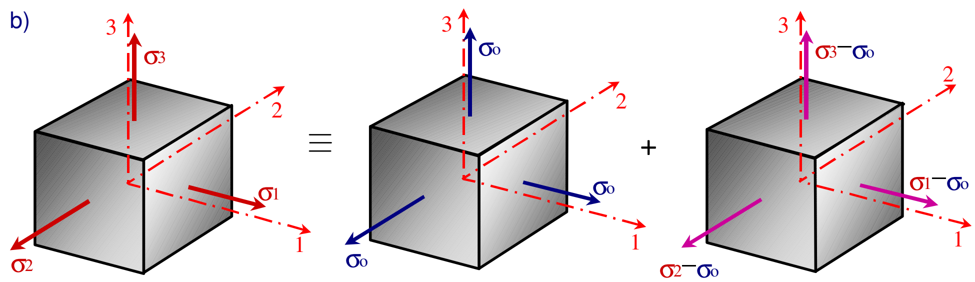
сферни део девијаторски део

Слика 5.6

У матричном запису тензор напрезања је:

$$[\sigma_{ij}]=[\sigma_{ij}^{o}]+[s_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma_o & 0 & 0\\ 0 & \sigma_o & 0\\ 0 & 0 & \sigma_o\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\sigma_x-\sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & (\sigma_y-\sigma_o) & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z-\sigma_o)\end{bmatrix}$$

или изражен с главним напрезањима, слика 5.7, у облику:



сферни део девијаторски део

Слика 5.7

$$[\sigma_{ij}]-[\sigma_{ij}^{o}]+[s_{ij}]-\begin{bmatrix}\sigma_o & 0 & 0\\ 0 & \sigma_o & 0\\ 0 & 0 & \sigma_o\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\sigma_1-\sigma_o) & 0 & 0\\ 0 & (\sigma_2-\sigma_o) & 0\\ 0 & 0 & (\sigma_3-\sigma_o)\end{bmatrix}$$

Израз за густину дилатацијске (хидростатичке) енергије деформисања

Ако уврстимо компоненте сферног тензора напрезања $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_o$,сл.5.8 густина дилатацијске (хидростатичке) енергије U_{oh} дата је изразом:

$$U_{oh}=\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_o^2=\frac{\sigma_o^2}{2K}$$

$$\boxed{U_{oh}=\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2}.$$

Израз за густину дисторзијске енергије деформисања

Густина дисторзијске енергије деформисања можемо добити тако да у израз за U_o уврстимо компоненте девијаторског тензора напрезања, сл.5.9, или тако да од укупне густине енергије деформисања одузмемо густину дилатацијске енергије:

$$\boxed{U_o = U_{oh} + U_{od}}$$

$$\boxed{U_{od} = U_o - U_{oh}}.$$

Следи израз за густину дисторзијске енергије деформисња:

$$U_{od} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]-\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2,$$

који након сређивања има облик:

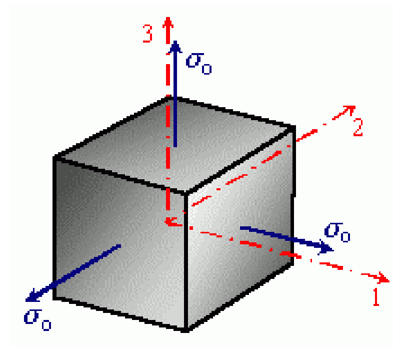
$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right],$$

односно у облику:

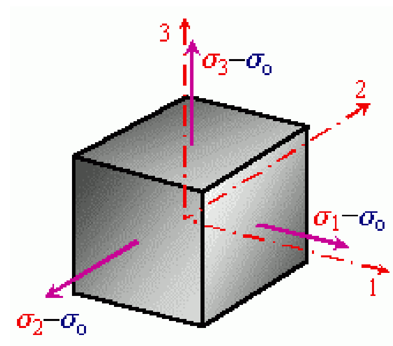
$$\boxed{U_{od} = \frac{1}{3G}\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2\right)}.$$

Максимална тангенцијална напрезања код просторног стања напрезања у уоченој тачки тела су дата изразима:

$$\boxed{\tau_{12} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}, \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}.$$



Слика 5.8



Слика 5.9

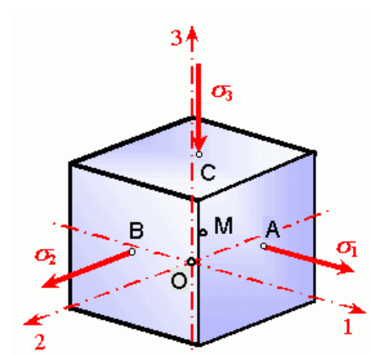
Питања:

1. Примена првог закона термодинамике на деформабилно тело.
2. Одређивање енергије деформисања тела за случај нормалне компоненте напрезања
3. Одређивање енергије деформисања тела за случај нормалне компоненте напрезања за случај тангенцијалне компоненте напрезања
4. Одређивање енергије деформисања тела општег случаја оптерећења
5. Објаснити приказивање тензора напрезањау два дела: **сферни део** и **девијаторски део**

6.

Задатак1 За просторно стање напрезања у тачки м тела задано на сл. з.1 треба одредити густину енергије деформисања и одговарајуће делове исте,(густину дилатацијске (хидростатичке) енергије деформисања, густину дисторзијске енергије деформисања). Познато је:

$\sigma_1 = 190\,\text{MPa}$, $\sigma_2 = 90\,\text{MPa}$, $\sigma_3 = -100\,\text{MPa}$, Пуасонов коефицијент $\nu = 0{,}32$, Јунгов модуо еластичности $E = 207\,\text{GPa}$, $\sigma_{dop} = 260\,\text{MPa}$.



Слика з.1

Коначне еластичне деформације – (не)линеарна еластичност, функција енергије деформације

Уочено је да физиолошки опсег деформација код многих ткива излази ван домена линеарних деформација и Hooke-овог закона. На пример, физиолошки опсег коефицијената истезања код плућа варира од 1,1 до 2,0. У овим случајевима захтеване су нелинеарне деформације и нелинеарне конститутивне једначине. Нажалост, за разлику од линеарне еластичности где Hooke-ов закон представља универзалну конститутивну везу, овакав закон не постоји код нелинеарне еластичности. Различите конститутивне једначине одговарају различитим материјалима. Ове једначине су обично изведене из *функције енергије деформације*.

Главни задатак је дефинисати одговарајућу форму функције енергије деформације за дати материјал.

Функција енергије деформације

Ако се еластичност посматра стриктно са становишта континуума, онда се енергија мере деформације може посматрати као механичка енергија нагомилана у еластичном телу током деформације. Пошто еластична тела не расипају енергију (тј. она представљају конзервативне системе), ово значи да рад спољњег оптерећења током деформације мора бити тачно избалансиран енергијом мере деформације нагомиланом у телу. Ово је у ствари формулација закона о одржању механичке енергије у случају кад се тело не креће кроз простор (тј. кинетичка енергија је нула). Формулација закона о одржању енергије за системе на микроструктуралном и молекуларном нивоу, енергија деформације треба бити ригорозније дефинисана где се сада узимају у обзир не само механички ефекти, већ и термодинамички ефекти (температуру, извор топлоте, ентропију итд.). Прво ћемо размотрити и узети у обзир само механичке ефекте.
Математички говорећи, енергија деформације се разматра и узима по јединици референтне запремине. Ова величина је

позната као функција енергије деформације или функција густине енергије деформације (W). Пошто W представља енергију нагомилану током деформације, мора да зависи од неке врсте мере деформације, на пример C. Она је скаларна величина и према томе не зависи од избора координатног система. Пригодно је изабрати координатни систем чије се осе подударају са основним правцима (јединичим векторима) C, тј., где је C дијагонална матрица са дијагоналним члановима α_1^2, α_2^2 и α_3^2 (главни правци издужења, види претходне лекције). Према томе је

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \tag{д1}$$

Ако је материјал изотропан, може се показати да W зависи од три основне инваријанте од C, I_C, II_C и III_C, дате једначином (д2)

$$I_C = trC,\ II_C = \frac{1}{2}\left[(trC)^2 - trC^2\right],\ III_C = \det C \tag{д2}$$

$$W = W(I_C, II_C, III_C). \tag{д3}$$

Треба показати како да се израчуна конститутивна веза коришћењем W за изотропни материјал. За то ће се искористити и применити виртуални рад из аналитичке механике. Као што је понемуто раније самтра се да деформација изотропног, хомогеног тела довољна за потпуно карактерисање његовог еластичног понашања. Узима се у обзир, према томе, јединична коцка изотропног, хомогеног, еластичног материјала (Ривлин, 1956, Wард, 1983).

Нека на странама коцке (види сл.9.1) делују напони $T_i,\ i=1,2,3$ тако да се јеиднична коцка деформише у призму са странама које одговарају главним издужењима $\alpha_i,\ i=1,2,3$. Енергија деформације је одређена изразом (д1).

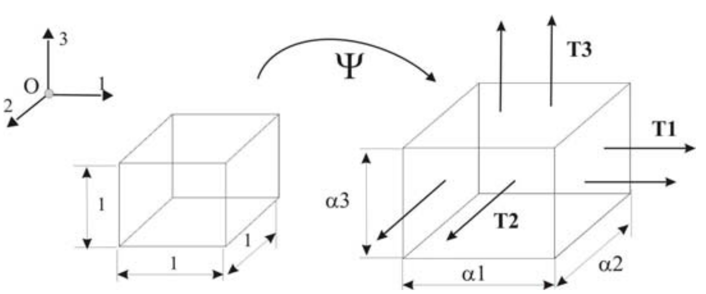
$$\delta W = T_1\alpha_2\alpha_3\delta\alpha_1 + T_2\alpha_3\alpha_1\delta\alpha_2 + T_3\alpha_1\alpha_2\delta\alpha_3 \tag{д4}$$

С друге стране, виртуелни рад је функција α_i тако да је

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\delta\alpha_2 + \frac{\partial W}{\partial\alpha_3}\delta\alpha_3 \tag{д5}$$

На основу (1,2), и да су $\delta\alpha_i$ одговарајуће варијације закључује се да су:

$$T_1 = \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1},\ T_2 = \frac{1}{\alpha_3\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2},\ T_3 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_3}, \tag{д6}$$



Слика 9.1

Ако је материјал нестишљив што је случај са многим биолошким ткивима (изузетно мала стишљивост) захваљујући садржају високог процента воде унутар ткива. За такве материјале могу се дати следеће релације које важе. Како је $III_C = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = 1$ онда је W функција само

$$W = W(I_C, II_C) \tag{д7}$$

У овом случају напони су неодређени који се односе на „хидростатички притисак“ p јер не може произвести промену запремине уоченог ткива и последично неће утицати на α_i. Тако је сада:

$$T_1 = \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - p,\; T_2 = \frac{1}{\alpha_3\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - p,\;\; T_3 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_3} - p, \quad (д8)$$

Релације између функције енергије деформације и коефицијената линеарне еластичности

Нека се разматра изотропни еластични материјал и претпоставимо да је функција енергије деформације W - $W = W\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$. Исто тако претпоставља се да је материјал првобитно униформно подвргнут преднапону и нека су са α означена одговарајућа издужења. Развојем W у ред око α добија се:

$$W\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right) = W\big|_\alpha + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\right)\Big|_\alpha \left(\alpha_i - \alpha\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right)\Big\|_\alpha \left(\alpha_i - \alpha\right)\left(\alpha_j - \alpha\right) + \ldots \quad (д9)$$

Заменом (д6) у израз (д3) следи:

$$T_1 = \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right)\Big\|_\alpha + \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1}\right)\Big\|_\alpha \left(\alpha_1 - \alpha\right) + \\ + \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\right)\Big\|_\alpha \left(\alpha_2 - \alpha\right) + \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_1}\right)\Big\|_\alpha \left(\alpha_3 - \alpha\right) + \ldots\end{array}\right) \quad (д10)$$

Остала два израза за T_2, T_3 добијају се пермутацијом одговарајућих индекса. Ако се посматрају мале деформације које су суперпониране на стање које је последица униформног преднапона.Онда је укупно издужење α_i се може сматрати да се састоји од униформног издужења α и суперпонираног издужења α_i' тако да је сада:

$$\alpha_i = \alpha\left(1 + \alpha_i'\right) = \alpha\left(1 + e_i\right) \quad (д11)$$

где су са e_i означене мале деформације које одговарају издужењима α_i', $i = 1,2,3$ респективно.Заменом (д11) у израз (д10) добија се:

$$T_1 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right)\Big\|_\alpha + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1}\right)\Big\|_\alpha \left(e_1\right) + + \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\right)\Big\|_\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1}\right)\Big\|_\alpha \left(e_3 + e_2\right) + \ldots\right] \quad (д12)$$

С друге стране има се (види претходне лекције, λ, μ Ламеови коефицијенти)

$$T = -p_o 1 + \lambda tr e 1 + 2\mu e \quad (д13)$$

Упоређивањем претходна два израза може се закључити да је:

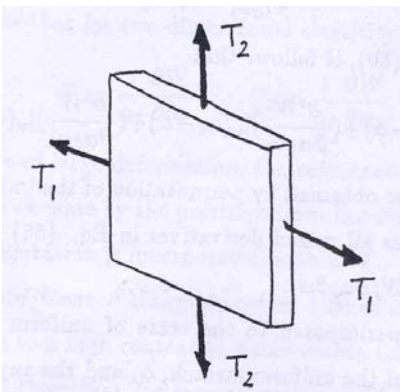
$$p_0 = -\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\right)\Big\|_\alpha, \quad i = 1,2,3 \quad (д14)$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\right)\Big|_\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\right)\Big|_\alpha\right), \quad i \neq j = 1,2,3$$

$$\mu = \frac{1}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_i\partial\alpha_i}\right)\Big|_\alpha - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\right)\Big|_\alpha + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\right)\Big|_\alpha\right), \quad i \neq j = 1,2,3$$

Аксијално напрезање у два правца

Многа биолошка ткива се могу експериментално проучавати на бази теста оптерећења у два аксијална правца (сл.9.2),кожљ, атрерије, паренхин плућа итд. Овај тест су првобитно развили Ривлин и Саундерс (1951) на студијама еластичности гуме. У њему, чисто хомогено поље деформације је створено у танком омотачу са напонима који делују само на ивицама (слика 9.2). Теоретско образложење за овај тест је следеће. Нека су α_1 и α_2 истезања која одговарају напонима T_1 и T_2, респективно, на слици 9.2. Пошто је $T_3 = 0$, притисак p може се добити из израза за T_3 у једначини 8 и онда се замени у изразима за T_1 и T_2. Добијено је да су:



Слика 9.2

$$T_1 = 2(\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2})(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \alpha_2^2\frac{\partial W}{\partial II_C}), \qquad (д15)$$

$$T_2 = 2(\alpha_2^2 - \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2})(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \alpha_1^2\frac{\partial W}{\partial II_C}). \qquad (д16)$$

Мерењем α_i-ова и T_i-ова, може се израчунати $\dfrac{\partial W}{\partial I_C}$ и $\dfrac{\partial W}{\partial II_C}$ из којих се може добити израз за W.

Понашање биолошких ткива (домен (не)линеарне еластичности)

<u>*линеарна еластичност ткива-понашање слично гуми*</u>

Ако се посматрају еластин, резилин, и абдуктин њихово понашање се блиско линеарној еластичности. Слично њима вулканизована гума се може описати тзв. (neo-Hookean) законом где је одговарајућа функција енергије деформисања облика која је добијена емпиријски:

$$W = C_1\left(I_C - 3\right) \qquad (д17)$$

где је са C_1 означена материјална константа. Заменом претходног израза у израз (д16) за једноаксијално напрезање нестишљивог изотропног униформног материјала добија се (д17):

$$T_1 = 2\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial II_C}\right) \qquad (д18)$$

$$T_1 = 2\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1}\right)C_1 \qquad (д19)$$

За издужења која су већа од 2 предложена је функција енергије деформисања –Mooney Rivlin форма:

$$W = C_1\left(I_C - 3\right) + C_2\left(II_C - 3\right) \qquad (д20)$$

где су C_1, C_2 константе. За њихово одређивање потребна су два независна мерења.

Нелинеарна еластичност

Присуство колагена у многим везивним ткивима узрокује нелинеарно понашање истих. Илустративни пример таквог понашања јесте паренхин плућа-где је *п*рвобитно предложена одговарајућа енергија деформације облика:

$$W = \frac{1}{2} c \exp(2.65(\alpha - 1)^2) \qquad \text{(д21)}$$

где је c константа и она је омогућавала да се објасне једнодимензионални случајеви. За 3Д случајеве мора се узети модификована функција енергије деформације.