Пример

Две танке, концентрично постављене металне сфере, налазе се у ваздуху. Полупречник унутрашње сфере је R_1, а наелектрисање Q_1. Полупречник спољашње сфере је R_2, а ова сфера је наелектрисана количином наелектрисања Q_2. а) Одредити вектор јачине електростатичког поља које потиче од ових сфера. б) Одредити потенцијале тачака A, B, C, при чему се тачка A налази унутар унутрашње сфере, на растојању R_A од центра сфера; тачка B се налази између унутрашње и спољашње сфере, на растојању R_B од центра сфера; тачка C се налази ван спољашње сфере, на растојању R_C од центра сфера. ($R_A < R_1 < R_B < R_2 < R_C$). Потенцијале појединих тачака рачунати у односу на референтну тачку која се налази у бесконачности.

в) Одредити потенцијал тачке B у односу на тачку C. Колики је потенцијал тачке C у односу на тачку B?

г) Одредити напон између тачака B и C. Колики је напон између тачака C и B?

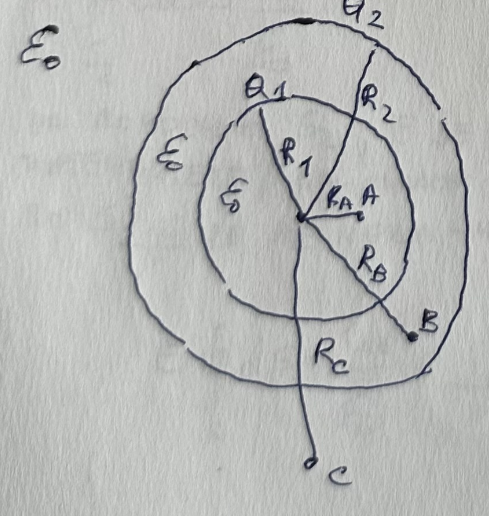
д) Одредити потенцијал унутрашње сфере.

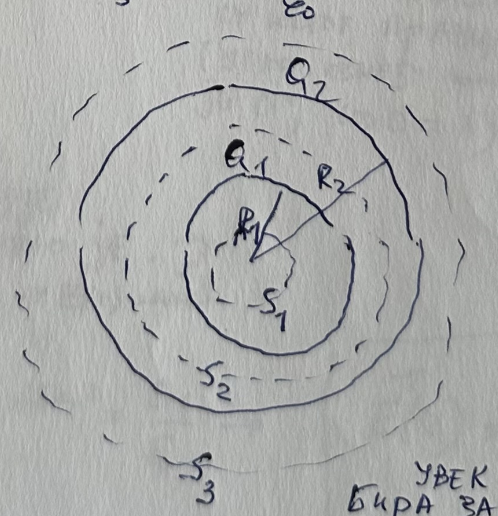
ђ) Одредити потенцијал спољашње сфере.

е) Одредити напон између спољашње и унутрашње сфере.

Решење:

а) $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{ys}}{\varepsilon_0}$ Гаусов закон (у лок. обл.)



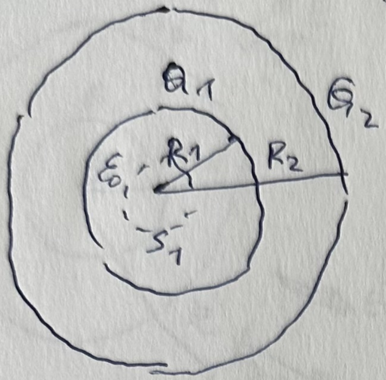


Постоје три области:
1- унутар унутрашње сфере
2- између сфера
3- ван спољашње сфере

Увек се бира замишљена површина која „прати" облик наелектрисаног тела које ствара поље - овде сферна површина.

– Ел. поље унутар унутрашње сфере

Гаус: $\oint_{S_1} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{yS_1}}{\varepsilon_0}$

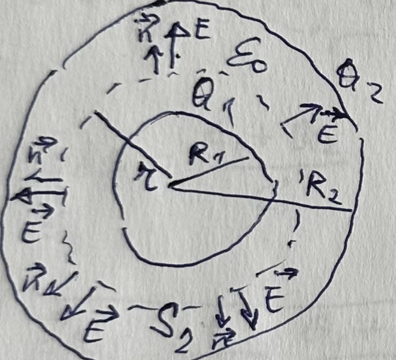


$Q_{yS_1} = 0 \Longrightarrow \boxed{E = 0}$ за $r < R_1$

НЕМА ЕЛ. ПОЉА УНУТАР УНУТРАШЊЕ СФЕРЕ

– Ел. поље између унутрашње и спољашње сфере

Гаус: $\oint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{yS_2}}{\varepsilon_0}$



за $Q_1 > 0$ поље орјент. од сфере 1

$$\oint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{yS_2}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

унутар затворене сфере површине S_2 налази се наелектрисање Q_1

$$\oint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_{S_2} E \cdot dS \cdot \overset{1}{\cancel{\cos\angle}}\underbrace{(\vec{E}, d\vec{S})}_{0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

ВЕКТОРИ $\vec{E}$ и $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ СУ ИСТОГ ПРАВЦА И СМЕРА (УГАО ИЗМЕЂУ ЊИХ (који заклапају) ЈЕ 0; $\cos 0 = 1$)

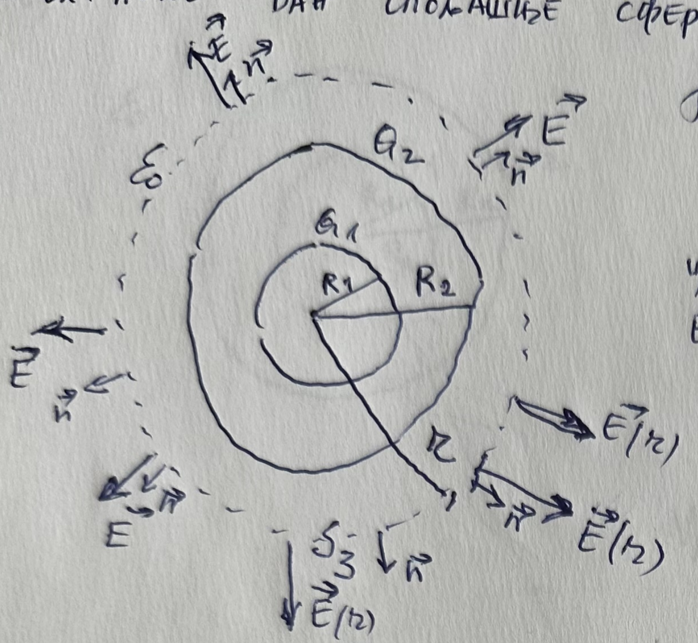
$$\oint_{S_2} E\, dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

НА ПОВРШИНИ S_2, E ЈЕ ИСТОГ ИНТЕНЗИТЕТА; ПРИЛИКОМ ИНТЕГРАЦИЈЕ ПО S_2, E СЕ НЕ МЕЊА – КОНСТАНТНО ЈЕ. r

$r = \text{const.} \rightarrow E(r) = \text{const.}$

$$E \oint_{S} dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \longrightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \cdot \vec{or}, \quad R_1 < r < R_2}$$

- Ел. поље ван спољашње сфере



Гаус: $\oint_{S_3} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{уS_3}}{\varepsilon_0}$

цртано за $Q_1 > 0$ $Q_2 > 0$

$\vec{E}$ орјентисано „напоље" од тела

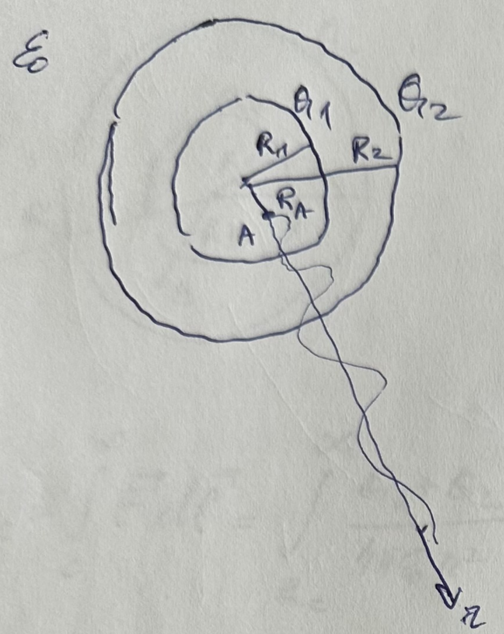
$$\oint_{S_3} E \cdot ds \cdot \cos \measuredangle(\underbrace{\vec{E}, d\vec{s}}_{0}) = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint_{S_3} ds = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \longrightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} \cdot \vec{ort_r}} \quad \boxed{R_2 < r}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \text{нема поља}; & r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{ort_r}; & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{ort_r}; & R_2 < r \end{cases}}$$

б)



$$V_A = \int_A^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

(по било ком путу → резултат је увек исти
↓
може се бирати путања интеграције

(скаларни производ $\vec{E}\,d\vec{l}$ свакако узима само пројекцију радијалног правца)

$$V_A = \int_A^{\infty} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_A^{\infty} E\cdot \underbrace{dl\cdot \cos\angle(\vec{E};\, d\vec{l})}_{dr} =$$

радијално је

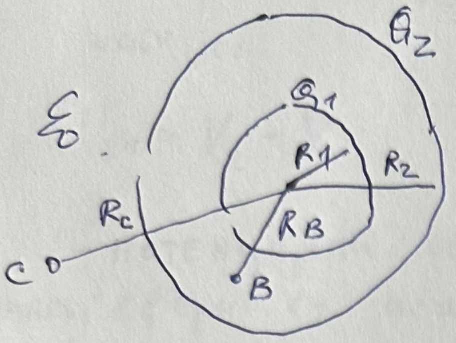
$$= \int_A^{\infty} E\cdot dr \Rightarrow \int_A^{\infty} E\,dr = \int_{R_A}^{R_1} 0\cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

E се мења (видети тачку а) овог задатка)

$$V_A = \int_{R_A}^{R_1} 0\cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1}{r^2}\,dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1+Q_2}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_2}^{\infty} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} - \left(-\frac{1}{R_1}\right)\right) + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\cancel{-\frac{1}{\infty}}^{\,0} - \left(-\frac{1}{R_2}\right)\right) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



$$V_B = \int_B^\infty \vec{E}\,d\vec{l} =$$

$$= \int_{R_B}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \dots$$

$$V_C = \int_C^\infty \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_C}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \dots$$

в) $$V_{B-C} = \int_B^C \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_B}^{R_C} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_B}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr + \int_{R_2}^{R_C} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \dots$$

(СВЕ ТАЧКЕ НА РАСТОЈАЊУ R_B ОД ЦЕНТРА СФЕРА СУ ЕКВИПОТЕНЦИЈАЛНЕ).

$$V_{C-B} = \int_C^B \vec{E}\,d\vec{l} = -V_{B-C} = \dots$$

!

г) $$V_{BC} = \int_B^C \vec{E}\,d\vec{l} = V_{B-C} = \dots$$

$$\underline{U_{CB} = -U_{BC} = \dots} \quad \left(U_{CB} = \int_C^B \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_C}^{R_B} \vec{E}\,d\vec{l} \right)$$

д) $$V_1 = \int_{R_1}^\infty \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \dots$$

ђ) $$V_2 = \int_{R_2}^\infty \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \dots$$

$$U_{21} = \int_2^1 \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \ldots$$

што је:

$$U_{21} = V_2 - V_1$$

– ПОТЕНЦИЈАЛИ СВИХ ТАЧАКА КОЈЕ СЕ НАЛАЗЕ НА НАЕЛЕКТРИСАНОЈ МЕТАЛНОЈ СФЕРИ СУ ИСТИ (ДА НИЈЕ ТАКО, ТЕКЛА БИ СТРУЈА ИЗМЕЂУ ТАЧАКА МЕТАЛНЕ ПОВРШИНЕ КОЈЕ БИ ЕВЕНТУАЛНО БИЛЕ НА РАЗЛИЧИТИМ ПОТЕНЦИЈАЛИМА). У ЕЛЕКТРОСТАТИЦИ ТО НИЈЕ МОГУЋЕ (ОСИМ У ПРОЦЕСУ НАЕЛЕКТРИСАВАЊА ТЕЛА).

ЗАТО ЈЕ ПОТРЕБНО „ПОЋИ" (ПРИ ИНТЕГРАЦИЈИ) ОД БИЛО КОЈЕ ТАЧКЕ НА МЕТАЛНОЈ СФЕРИ 2, И „ДОЋИ" ДО БИЛО КОЈЕ ТАЧКЕ НА МЕТАЛНОЈ СФЕРИ 1; РЕЗУЛТАТ, ТЈ. НАПОН, ЈЕ УВЕК ИСТИ.