Примена Тејлорове формуле

1 Апроксимације у некој тачки

Пример 1. Одредити Тејлоров полином трећег степена којим се функција $f(x) = x^2 \ln x$ апроксимира у тачки $x = 1$.

Решење. Одредимо прва три извода функције $f(x) = x^2 \ln x$, а затим израчунајмо вредности добијених извода у тачки $x = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \ln x \quad &\Rightarrow \quad f(1) = 0 \\ f'(x) = 2x \ln x + x \quad &\Rightarrow \quad f'(1) = 1 \\ f''(x) = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3 \quad &\Rightarrow \quad f''(1) = 3 \\ f'''(x) = \frac{2}{x} \quad &\Rightarrow \quad f'''(1) = 2. \end{aligned}$$

Сада добијене вредности извода заменимо у Тејлоров полином трећег степена,

$$\begin{aligned} T_{3,1} &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o(x-1)^3 = \\ &= x - 1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o(x-1)^3. \end{aligned}$$

Пример 2. Апроксимирати функцију $f(x) = x^2 e^{-x}$ Тејлоровим полиномом трећег степена у тачки $x = 2$.

Решење. Израчунамо прва три извода функције $f(x) = x^2 e^{-x}$, а затим одредимо вредности добијених извода у тачки $x = 2$,

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad f(2) = 4e^{-2} \\ f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) \quad &\Rightarrow \quad f'(2) = 0 \\ f''(x) = e^{-x}(2 - 2x) - e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \quad &\Rightarrow \quad f''(2) = -2e^{-2} \\ f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 4x + 2) + e^{-x}(2x - 4) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 6) \quad &\Rightarrow \quad f'''(2) = 2e^{-2}. \end{aligned}$$

Сада добијене вредности извода заменимо у Тејлоров полином трећег степена,

$$\begin{aligned} T_{3,2} &= + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + o(x-2)^3 = \\ &= 4e^{-2} + \frac{0}{1}(x-2) + \frac{-2e^{-2}}{2}(x-2)^2 + \frac{2e^{-2}}{6}(x-2)^3 + o(x-2)^3 = \\ &= 4e^{-2} - \frac{1}{e^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3e^2}(x-2)^3 + o(x-2)^3. \end{aligned}$$

Пример 3. Одредити Тејлоров полином трећег степена функције $f(x) = x\sin x$ у тачки $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решење. Израчунамо прва три извода функције $f(x) = x\sin x$, а затим одредимо вредности добијених извода у тачки $x = \dfrac{\pi}{2}$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\sin x & &\Rightarrow & f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2}\\
f'(x) &= \sin x + x\cos x & &\Rightarrow & f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1\\
f''(x) &= 2\cos x - x\sin x & &\Rightarrow & f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2}\\
f'''(x) &= -3\sin x - x\cos x & &\Rightarrow & f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -3.
\end{aligned}
$$

Сада добијене вредности извода заменимо у Тејлоров полином трећег степена,

$$
\begin{aligned}
T_{3,\frac{\pi}{2}} &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 =\\
&= \frac{\pi}{2} + \left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{-3}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 =\\
&= x - \frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3.
\end{aligned}
$$

Пример 4. Апроксимирати функцију $f(x) = \ln(1+\sin x)$ Тејлоровим полиномом трећег степена у тачки $x = \pi$.

Решење. Одредимо прва три извода функције $f(x) = \ln(1+\sin x)$, а затим израчунајмо вредности добијених извода у тачки $x = \pi$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+\sin x) & &\Rightarrow & f(\pi) &= 0\\
f'(x) &= \frac{\cos x}{1+\sin x} & &\Rightarrow & f'(\pi) &= -1\\
f''(x) &= \frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = & & & &\\
&= \frac{-(\sin x + 1)}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x} & &\Rightarrow & f''(\pi) &= -1\\
f'''(x) &= \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} & &\Rightarrow & f'''(\pi) &= -1.
\end{aligned}
$$

Сада добијене вредности извода заменимо у Тејлоров полином трећег степена,

$$
\begin{aligned}
T_{3,\pi} &= f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + o(x-\pi)^3 =\\
&= -(x-\pi) - \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{6}(x-\pi)^3 + o(x-\pi)^3.
\end{aligned}
$$

Пример 5. Наћи Маклоренов развој петог степена функције $f(x)=\dfrac{1+x-x^2}{1+x+2x^2}$.

Решење. Уведемо смену $t=x+2x^2$, имамо да је

$$f(x)=\frac{1+x-x^2}{1+x+2x^2}=1-\frac{3x^2}{1+x+2x^2}=1-3x^2\cdot\frac{1}{1-t}=1-3x^2(1-t+t^2-t^3+o(t^3)).$$

Даље је $t^2=x^2+4x^3+o(x^3), \quad t^3=x^3+o(x^3), \quad o(t^3)=o(x^3)$,

где смо користили развој за t^2 и t^3 до трећег степена. Заменом ових израза добијамо

$$f(x)=1-3x^2(1-x-2x^2+x^2+4x^3-x^3+o(x^3))=$$
$$=1-3x^2+3x^3+3x^4-9x^5+o(x^5).$$

Пример 6. Функцију $f(x)=\operatorname{tg}x$ развити у околини нуле до члана са x^5.

Решење. Применом развоја функције $\sin x$ и $\cos x$ добијамо

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^{-1}.$$

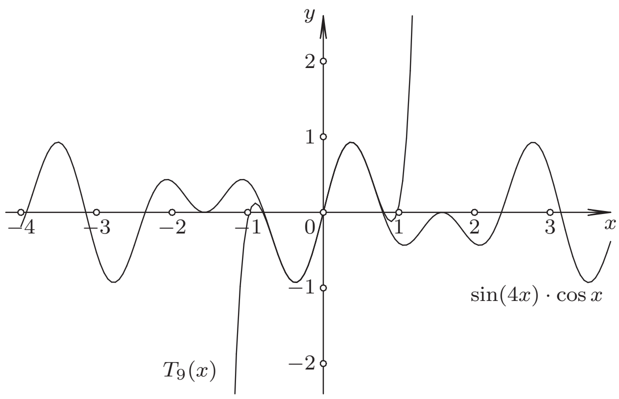
Други фактор се даље може развити применом смене $t=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$,

$$\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^{-1}=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4).$$

Према томе,

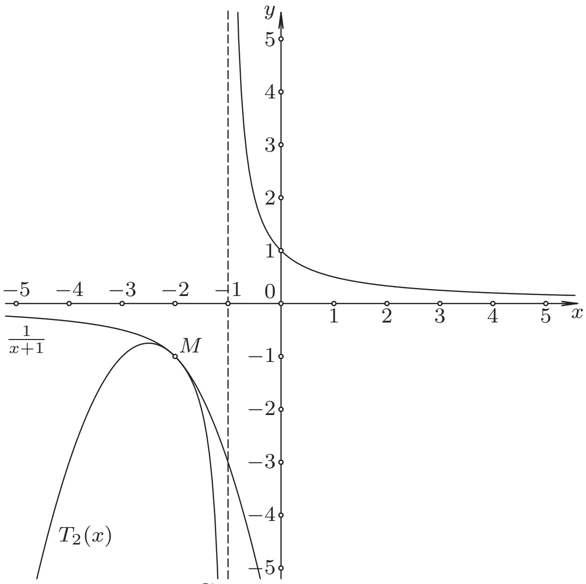
$$\operatorname{tg}x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)\right)=x+\frac{x^3}{3}\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\quad(x\to 0).$$

Пример 7. На слици 1 је дата апроксимација тригонометријске функције $f(x)=\sin(4x)\cdot\cos x$ Маклореновим полиномом деветог стетпена. Видимо да се ове функције, $f(x)$ и Маклоренов полином $T_9(x)$ поклапају на већем делу интервала $(-1,1)$, што је довољно велика околина тачке $x=0$.

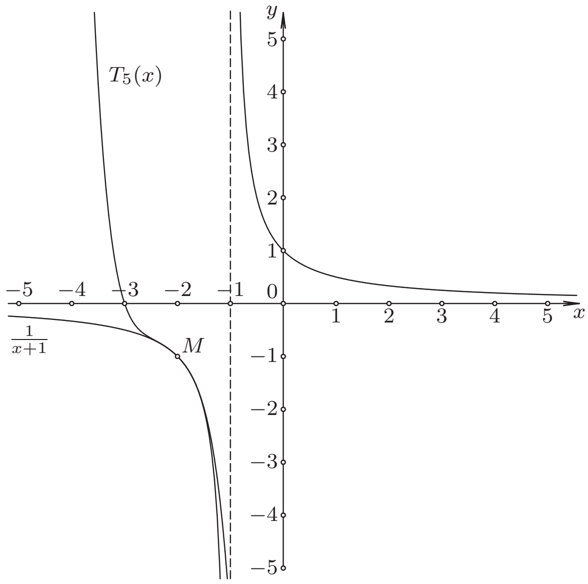


Сл. 1

Пример 8. Овде је приказана апроксимација функције $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, Тејлоровим полиномом другог и петог степена у тачки $x = -2$. Апроксимација је утолико боља уколико је тачка x ближа тачки a. Такође, Тејлоров полином вишег степена боље апроксимира функцију од Тејлоровог полинома мањег степена. Ма слици 2 (лево) смо функцију $f(x) = \frac{1}{x+1}$ апроксимирали Тејлоровим полиномом другог степена $T_2(x)$, док на слици 3 (десно) Тејлоровим полиномом петог степена $T_5(x)$, видимо да је ова друга апроксимација боља. Такође се примећује да су обе апроксимације добре у околини тачке $M(-2,-1)$.



Сл. 2



Сл. 3

2 Маклоренов развој неких елементарних функција

2.1 Развој функције $f(x) = \sin x$

Нађимо неколико првих извода функције $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
f''(x) &= -\sin x = \sin(x + \pi) \\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\
f''''(x) &= \sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin x
\end{aligned}$$

Сада уопштено за $n-$ти извод добијамо следеће

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases}
f^{(4k+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \text{за} \quad n = 4k+1 \\
f^{(4k+2)}(x) = \sin(x + \pi) & = \sin(x + \pi + 2k\pi) \quad \text{за} \quad n = 4k+2 \\
f^{(4k+3)}(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) & = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \text{за} \quad n = 4k+3 \\
f^{(4k+4)}(x) = \sin(x + 2\pi) & = \sin(x + 2\pi + 2k\pi) \quad \text{за} \quad n = 4k+4
\end{cases}$$

даље је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases}
f^{(4k+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(x + (4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\
f^{(4k+2)}(x) = \sin(x + \pi + 2k\pi) = \sin\left(x + (4k+2)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\
f^{(4k+3)}(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(x + (4k+3)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\
f^{(4k+4)}(x) = \sin(x + 2\pi + 2k\pi) = \sin\left(x + (4k+4)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)
\end{cases}$$

па је

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Сада нађимо вредности извода у тачки $x = 0$.

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases}
f^{(4k+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & = 1 \quad \text{за} \quad n = 4k+1 \\
f^{(4k+2)}(0) = \sin(\pi) & = 0 \quad \text{за} \quad n = 4k+2 \\
f^{(4k+3)}(0) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & = -1 \quad \text{за} \quad n = 4k+3 \\
f^{(4k+4)}(0) = \sin(2\pi) & = 0 \quad \text{за} \quad n = 4k+4
\end{cases}$$

Дакле, Маклоренов полином $n-$тог степена за функцију $f(x) = \sin x$ гласи

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

2.2 Развој функције $f(x) = \cos x$

Нађимо неколико првих извода функције $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$$
$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$f''''(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Сада уопштено за $n-$ти извод добијамо следеће

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & = & \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) & \text{за} & n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(x) = \cos(x + \pi) & = & \cos(x + \pi + 2k\pi) & \text{за} & n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) & = & \cos\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) & \text{за} & n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(x) = \cos(x + 2\pi) & = & \cos(x + 2\pi + 2k\pi) & \text{за} & n = 4k+4 \end{cases}$$

даље је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) & = & \cos\left(x + (4k+1)\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(4k+2)}(x) = \cos(x + \pi + 2k\pi) & = & \cos\left(x + (4k+2)\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(4k+3)}(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) & = & \cos\left(x + (4k+3)\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(4k+4)}(x) = \cos(x + 2\pi + 2k\pi) & = & \cos\left(x + (4k+4)\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

па је

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Сада нађимо вредности извода у тачки $x = 0$.

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & 0 & \text{за} & n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(0) = \cos(\pi) & = & -1 & \text{за} & n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & = & 0 & \text{за} & n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(0) = \cos(2\pi) & = & 1 & \text{за} & n = 4k+4 \end{cases}$$

Па Маклоренов полином $n-$тог степена за функцију $f(x) = \cos x$ изгледа овако

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

2.3 Развој функције $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Одредимо њене изводе у тачки $x = 0$. Из $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ следи $f'(x)(1+x^2) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$, а према Лајбницовој формули, за $n \geqslant 1$ је

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0,$$

одакле следи

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0).$$

Како је $f(0) = 0, f'(0) = 1$, добијамо

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{за} \quad n = 2k, \qquad k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k(2k)!, & \text{за} \quad n = 2k+1, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Сада је

$$f(x) = x - \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+1}),$$

коначно добијамо Маклоренов полином $n-$тог степена за функцију $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2k+1}).$$

2.4 Развој функције e^x

Познато је за функцију $f(x) = e^x$, да је

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{за свако} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зато је за $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad f^{(n)}(0) = 1$. Па добијамо да Маклоренов полином $n-$тог степена функције $f(x) = e^x$ изгледа овако

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2.5 Развој функције $f(x) = (1+x)^\alpha$

Посматрајмо ову функцију за $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ и одредимо њене изводе у тачки $x = 0$. Добијамо

$$\begin{aligned} f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad &\Rightarrow \quad f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad &\Rightarrow \quad f'(0) = \alpha(\alpha-1) \\ f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-2} \quad &\Rightarrow \quad f'(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad &\Rightarrow \quad f^{(0)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

Израз $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$, подсећа на познати биномни коефицијент. Усвојено је да се и у овом случају, и када α није природан број, пише ознака $\dbinom{\alpha}{n}$. Дакле Маклоренов полином $n-$тог степена функције $f(x) = (1+x)^\alpha$ се може написати на овај начин

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n).$$

2.6 Развој функције $f(x) = \ln(1+x)$

Дата функција је дефинисана за $x > -1$. Нађимо сада $n-$ти извод ове функције у тачки $x = 0$. Из $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ следи $f'(x)(1+x) = 1$, а према Лајбницовој формули, за $n \geqslant 1$ је

$$f^{(n+1)}(x)(1+x) = -nf^{(n)}(x),$$

па је за $x = 0$

$$f^{(n+1)}(0) = -nf^{(n)}(0).$$

Како је $f'(0) = 1$, добијамо даље $f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \ldots$, па можемо закључити да је

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Сада добијамо да Маклоренов полином $n-$тог степена функције $f(x) = \ln(1+x)$ изгледа овако

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2.7 Развој функције $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(-4)^k(1-4^k)}{(2k)!} x^{2k-1} + o(x^{2k}) =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

2.8 Развој функције $f(x) = \arcsin x$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$$

2.9 Развој функције $f(x) = \arccos x$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \ldots - \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

3 Израчунавање граничних вредности

Пример 1. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(x+1)}{x^3}$.

Решење. Функције e^x и $\sin x$ развијемо до трећег степена. Множењем, и задржавањем чланова до x^3 добијамо,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x^2-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+o(x^3)-\dfrac{x^3}{3!}-x^2-x}{x^3}.$$

Сређивањем добијеног израза добијамо коначни резултат,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

У овом задатку, као и у сличним задацима где се примењује Тејлорова формула, стандардно питање је:„*Како знамо до ког степена треба писати Тејлоров развој"?* У ствари, то не знамо унапред. Ако је израз облика $A\cdot B$, тада B развијамо до оног степена после ког би остали додати сабирци помножени са A, тежили нули, односно када имамо ситуацију $\dfrac{B}{A}$, тада B развијамо до степена који је A. Што је слично као претходни случај, само је множење замењено дељењем.

Пример 2. Одредити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\ln\sqrt{1+x^2}-1}{x^4}$.

Решење. Прво упростимо мало лимес, па ћемо добити,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^4}.$$

Даље развијемо функције $\cos x$ и $\ln(1+x^2)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^4)+\dfrac{1}{2}\left(x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)\right)}{x^4}.$$

Једноставним множењем и сређивањем добијамо,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-5x^4}{4!}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{5}{24}.$$

Пример 3. Коришћењем Маклореновог развоја наћи $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

Решење. У оваквим примерима треба водити рачуна шта прво развијамо. Један пут може да закомпликује ствари, па треба изабрати прави. У овом случају прво ћемо развити косинус са аргументом x, па добијамо,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(-\dfrac{x^2}{2}-o(x^2)\right)}{x^4}.$$

Даље је

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{8}.$$

Пример 4. Одредити реалан параметар a тако да $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^a\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ буде коначан. За нађењу вредност параметра a наћи граничну вредност.

Решење. Развијањем $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, по $\dfrac{1}{x}$, добијамо

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

па је,

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^{a-1}+\frac{x^{a-2}}{2}+o(x^{a-2})\right).$$

Први члан у загради, x, тежи ка $+\infty$. Да би гранична вредност била коначна мора негде да се појави сабирак $-x$, а то је могуће ако и само ако је $a-1=1$, тј. $a=2$. У том случају добијамо

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+o(1)=\frac{1}{2}.$$

Да бисмо се уверили да је ово једино решење, приметимо да је за $a>2$ члан $\dfrac{x^{a-2}}{2}\to+\infty$, док је за $a<2$ члан $x\to+\infty$. Па је претходно решење заиста јединствено.

Пример 5. Израчунати вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

Решење. Познате развоје

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4),\qquad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\qquad (x\to 0),$$

уврстимо у почетну граничну вредност, и добијамо крајњи резултат

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^4)-x}{x-(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4))}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3}x^3+o(x^4)}{\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)}=2.$$

Пример 6. Уз помоћ Маклореновог развоја одредити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

Решење. Развијемо функције arcsin, до члана x^3, и затим средимо израз. Даље добијамо коначни резултат,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\frac{1}{6}\cdot 8x^3+o(x^4)-2(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^4)}{x^3}=1.$$

Пример 7. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Решење. Када имамо овакав задатак, тј. ситуацију $f(x)^{g(x)}$, урадићемо следеће $e^{\ln f(x) g(x)}$, па сада одредимо ту граничну вредност. Применом претходног добијамо,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x\ln\cos x}}{x^3}.$$

Израчунајмо сада

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln\cos x=\lim_{x\to 0}\sin x\ln(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))=$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))=-\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

Сада добијени резултат заменимо на почетку. Даље је,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Одредити вредност $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решење. Можемо извршити трансформацију

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)\cdot\frac{1}{x}}.$$

Израчунајмо сада нови лимес, имајући у виду да је

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-x+o(x^2),\qquad \ln(1+x)=x+o(x),\qquad (x\to 0),$$

па добијамо даље,

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1-\frac{2}{\pi}x+o(x^2)\right)\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{\pi}x+o(x)\right)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{2}{\pi}.$$

Заменом у почетну граничну вредност, добијамо резултат

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Пример 9. Коришћењем Тејлорове формуле израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

Решење. Прво ћемо развити функције $\operatorname{tg}x$ и $\sin x$, а затим корене,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+\frac{1}{2}x^3+o(x^4)}-\sqrt{1+x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)}}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4))-\left(1+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4))\right)}{x^3}.$$

Сада једноставним сређивањем добијамо крајњи резултат,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^3+o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{4}.$$

Пример 10. Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

Решење. Када проширимо на заједнички именилац добијамо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\operatorname{tg}x}\right).$$

Сада искористимо познате развоје функција $\operatorname{tg}x$ и $\ln(1+x)$, даље је,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^2)-(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{\ln(1+x)\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{(x+o(x))\cdot(x+o(x))}=\frac{1}{2}.$$

Пример 11. Одредити вредност лимеса $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

Решење. Када $x\to+\infty$, или $x\to-\infty$, обично се користи Маклоренов развој, па дати лимес треба мало трансформисати, и развити по члану $\dfrac{1}{x}$. У овом примеру, из корена извучемо x па затим развијемо по члановима $\dfrac{3}{x}$ и $-\dfrac{2}{x}$. Сада је

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Сређивањем добијеног, коначно добијамо резултат,

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2.$$

Пример 12. Применом Тејлорове формуле, израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Решење. Користећи познате развоје, имамо, кад $x \to 0$

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{120}\sin^5 x + o(x^5) =$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + o(x)\right)^5.$$

Степеновањем и задржавањем чланова до x^5 у претходној једнакости, добијамо

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5).$$

Даље је

$$x\sqrt[3]{1-x^2} = x\left(1 + \binom{1/3}{1}(-x^2) + \binom{1/3}{2}(-x^2)^2 + o(x^4)\right) = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + o(x^5).$$

Заменом добијених резултата у почетни лимес, добијемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5) - \left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + o(x^5)\right)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{9}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{19}{90}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{19}{90}.$$

Тејлорова формула има огромну примену код израчунавања граничних вредности, као што су и претходни примери то илустровали. Многи од ових примера не може да се реше елементарним путем, тј. разним трансформацијама. Неки лимеси су могли да се одреде применом Лопиталовог правила, али тај пут је далеко тежи, и захтева доста рачунања, и доброг сналажења са изводима.

4 Налажење косих асимптота

Налажење косих асимптота, се своди на рачунање граничне вредности функције када $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, у зависности од домена функције. Тада се обично врши развој по члану $\dfrac{1}{x}$, док су пре тога извршене мање трансформације, и сређивања.

Пример 1. Израчунати косе асимптоте (ако постоје) функције $f(x) = x + \dfrac{1}{3} + \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.

Решење. Извућићемо x из корена, и затим извршити развој по члану $\dfrac{2}{x}$.

$$f(x) = x + \frac{1}{3} + \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} = x + \frac{1}{3} + x\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3} + x\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{x} - \frac{1}{9}\cdot\frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] =$$
$$x + \frac{1}{3} + x + \frac{2}{3} - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + 1 - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Дакле, коса асимптота графика дате функције је права $y = 2x + 1$, и то и за $x \to +\infty$ и за $x \to -\infty$. Додатни члан $-\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{x}$ говори о томе да ли се график налази „испод" или „изнад" добијене асимптоте. Ако је члан позитиван, график је „изнад", а ако је негативан, график је „испод" добијене асимптоте.

Пример 2. Израчунати косе асимптоте (ако постоје) функције $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

Решење. Искористимо познати развој за функцију $\operatorname{arctg} x$, даље је

$$f(x) = x\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 1 - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Закључујемо да је права $y = 1$ обострана хоризонтална асимптота. Када $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ график је „испод" асимптоте.

Пример 3. Наћи косе асимптоте (ако постоје) функције $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$.

Решење. Пошто је $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x$, па дату функцију можемо написати као $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, за $x \to +\infty$. Посматрамо само за $x \to +\infty$, јер за $-\infty$ функција није дефинисана. Сада је,

$$f(x) = x\cdot\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)\right) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Права $y = x + \dfrac{1}{2}$ није коса асимптота, јер постоји члан $\sqrt{x}$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, па је закључак да дата функција нема косих асимптота.

Пример 4. Применом Маклореновог развоја израчунати косе асимптоте (ако постоје) функције $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x} + x^2 + x - x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Решење. Групишемо сабирке на следећи начин,

$$f(x) = x \cdot \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right),$$

и затим развијемо функције $\sin\dfrac{1}{x}$ и $e^{\dfrac{1}{x}}$,

$$x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x^2 \cdot \left(1 - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} - o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Сређивањем израза добијамо,

$$= x + 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{6x} - o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Следи да је права $y = \dfrac{1}{2}$ обострана хоризонтална асимптота, када $x \to -\infty$, график је „изнад” асимптоте, а за $x \to +\infty$, график је „испод” асимптоте.

Пример 5. Одредити косе асимптоте (ако постоје) функције $f(x) = \dfrac{|x+2|}{e^{\dfrac{1}{x}}}$.

Решење. Запишемо функцију као $f(x) = |x+2| \cdot e^{-\dfrac{1}{x}}$. Затим развијемо експоненцијалну функцију, по $-\dfrac{1}{x}$, даље је

$$f(x) = |x+2| \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

За $x \to -\infty$ имамо да је $f(x) = -(x+2) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$, када средимо, добијамо

$$f(x) = -x - 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

За $x \to +\infty$ имамо да је $f(x) = (x+2) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$, када средимо, добијамо

$$f(x) = x + 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Права $y = -x-1$, је лева коса асимптота, и график је „испод” асимптоте, а права $y = x+1$, је десна коса асимптота, и график је такође „испод” асимптоте.

Видимо да Тејлорова формула може да се употреби и код израчунавања косих асимптота функције. Код испитивања функција, овакав начин често доста олакша посао, јер може да се догоди, да лимеси преко којих одређујемо коефицијенте буду компликовани, и тешки за израчунавање. У овом случају, имамо још додатни трећи сабирак који помаже да видимо да ли је график „испод”, или „изнад” асимптоте, што може да служи као помоћ за проверу неких других резултата да ли су тачни.