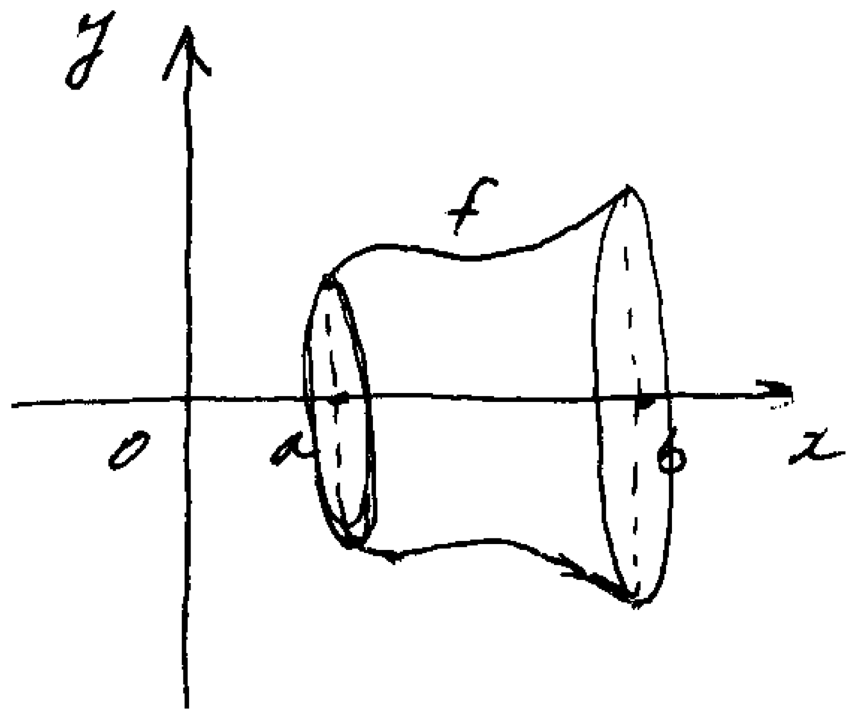
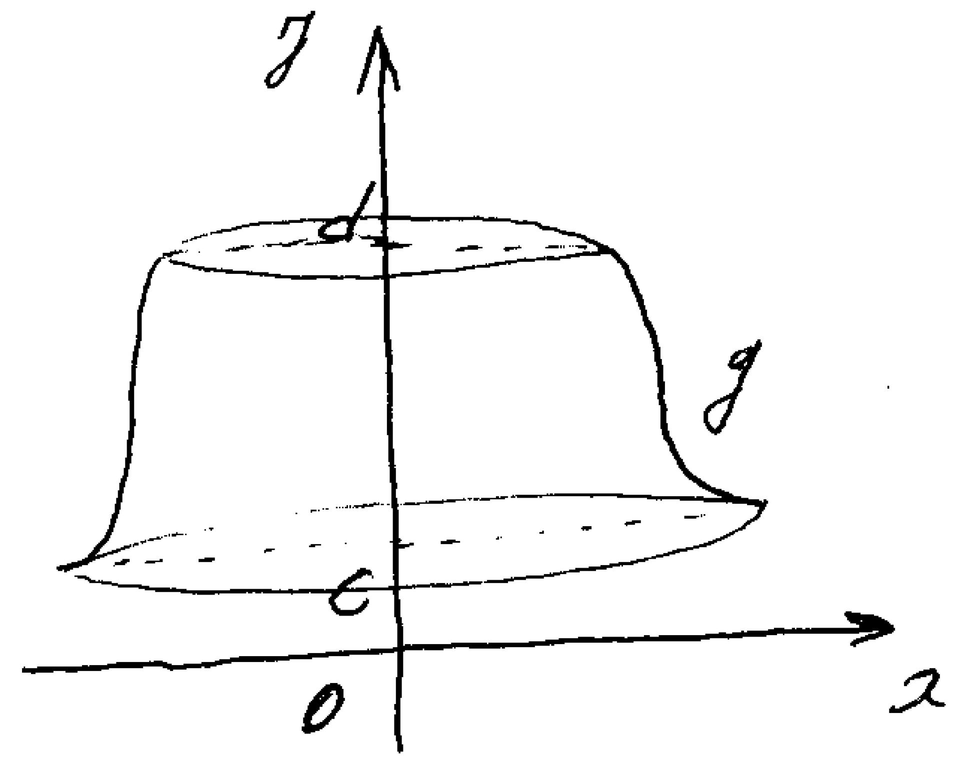
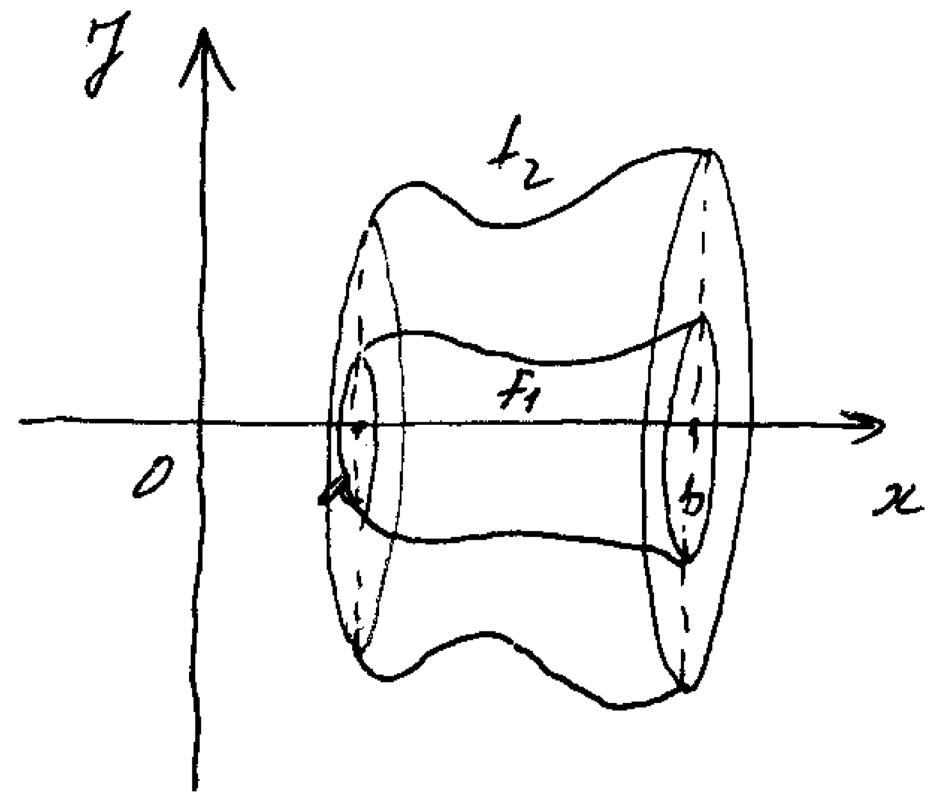
II Запремина обртног тела

1) Декартове координате: $y=f(x),\ x\Big|_a^b$; $x=g(y),\ y\Big|_c^d$







$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$; $V_y=\pi\int_c^d g^2(y)\,dy$; $V_x=\pi\int_a^b \left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$

(НЕ: $(f_2(x)-f_1(x))^2$)

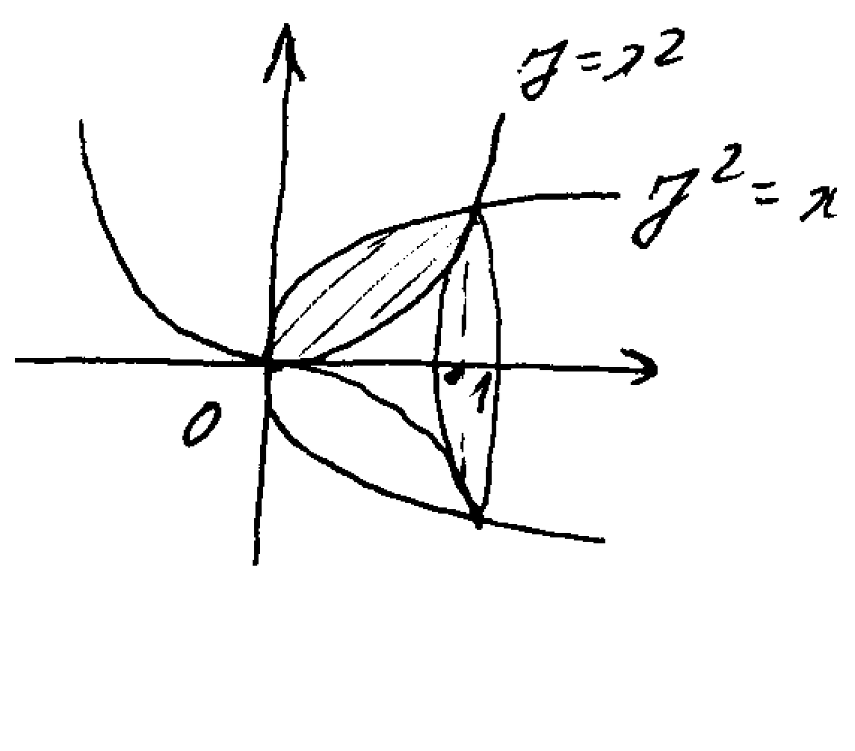
2) Крива задата параметарски: $x=x(t),\ y=y(t),\ t\Big|_\alpha^\beta$

$$V_x=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\,x'(t)\,dt\ ;\qquad V_y=\pi\int_\alpha^\beta x^2(t)\,y'(t)\,dt$$

3) Поларне координате: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho=\rho(\varphi),\ \varphi\Big|_\alpha^\beta$

$$V_x=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi\,d\varphi,\qquad V_y=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3\cos\varphi\,d\varphi$$

* Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривама $y=x^2$, $y^2=x$.



$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \end{cases}$, $x^4=x$; $x(x-1)(x^2+x+1)=0$

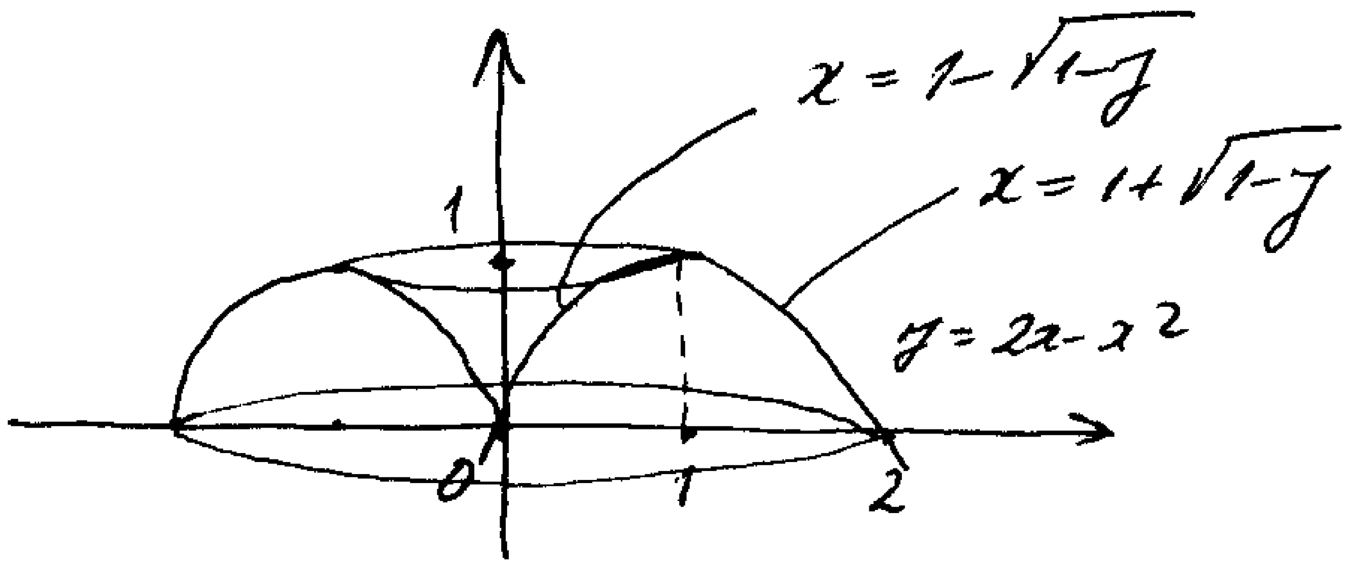
$x_1=0,\ x_2=1$; $x\Big|_0^1$

горња: $y^2=x$, $y=+\sqrt{x}$

доња: $y=x^2$

$$V_x=\pi\int_0^1\left((\sqrt{x})^2-(x^2)^2\right)dx=\pi\int_0^1(x-x^4)\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$$

⊛ Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око y-осе фигуре омеђене кривом $y=2x-x^2$ и одсечком $[0,2]$ x-осе.



$$y = 2x - x^2$$

$$x^2 - 2x + y = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-y}$$

$y\big|_0^1$; горњи: $x = 1+\sqrt{1-y}$

доњи: $x = 1-\sqrt{1-y}$

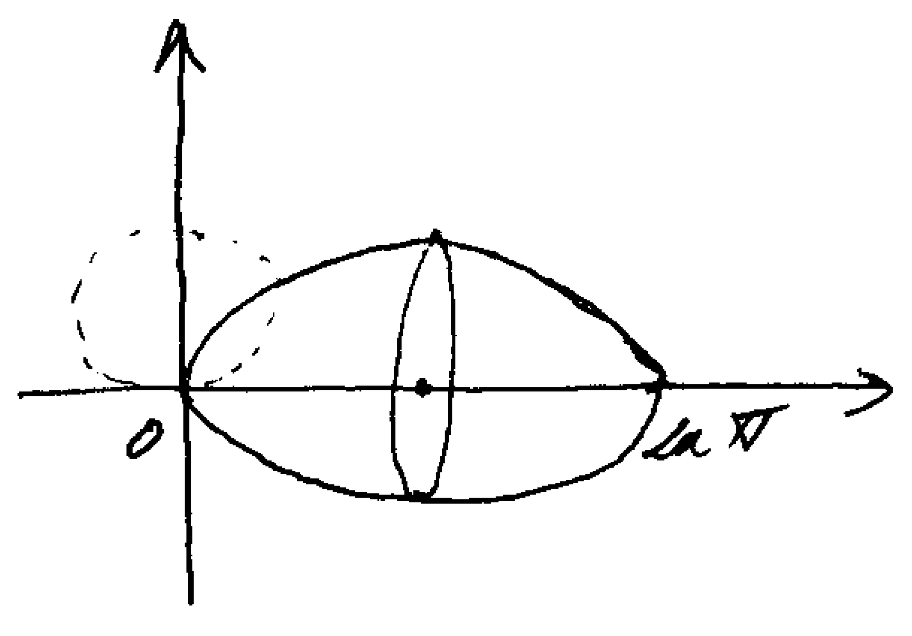
$$V_y = \pi \int_0^1 \left((1+\sqrt{1-y})^2 - (1-\sqrt{1-y})^2 \right) dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\cancel{1} + 2\sqrt{1-y} + \cancel{1-y} \cancel{-1} + 2\sqrt{1-y} \cancel{-1+y} \right) dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-y}\, dy =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 1-y=t \\ -dy = dt \end{matrix} \right\} = 4\pi \int_1^0 t^{1/2}(-dt) = 4\pi \, \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$

⊛ Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе фигуре омеђене једним сводом криве $x=a(t-\sin t),\ y=a(1+\cos t),\ t\big|_0^{2\pi}\ (a>0)$ и x-осом.

ЦИКЛОИДА



$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)\, x'(t)\, dt = \pi \int_0^{2\pi} (a(1-\cos t))^2 a(1-\cos t)\, dt =$$

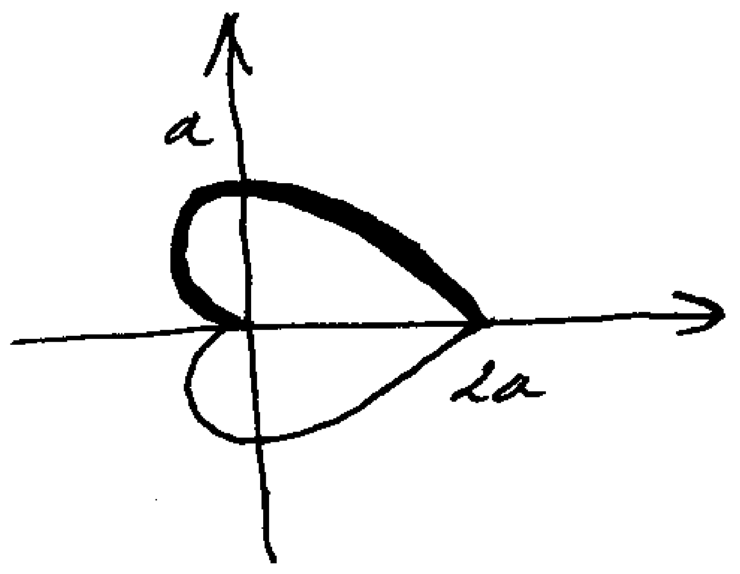
$$= a^3\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t + \cos^3 t)\, dt =$$

$$= a^3\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\, \frac{1+\cos 2t}{2} + (1-\sin^2 t)\cos t \right) dt$$

$$= a^3\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = 5a^3\pi^2$$

⊛ Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе криве $\underbrace{\rho = a(1+\cos\varphi)}_{\text{КАРДИОИДА}}$ $(a>0)$



$\varphi\big|_0^{\pi}$ (Ако бисмо узели $\varphi\big|_0^{2\pi}$, добили бисмо дупло већу запремину, јер би и део криве изнад x-осе и део криве испод x-осе описао исту запремину)

$$V_x = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \left(a(1+\cos\varphi)\right)^3 \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi = \left\{ \begin{matrix} 1+\cos\varphi = t \\ -\sin\varphi \, d\varphi = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3}\int_2^0 t^3(-dt) = \frac{2a^3\pi}{3}\left[\frac{t^4}{4}\right]\Big|_0^2 = \frac{8a^3\pi}{3}$$