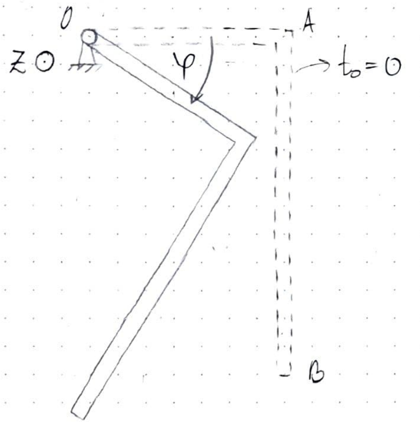
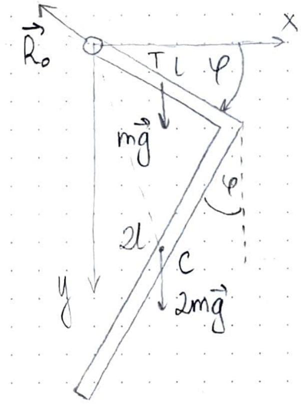
МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ

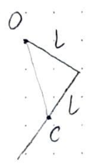
април 2020.

10.5. Правоугли угаоник OAB, састављен од два танка хомогена штапа OA и AB дужина l и $2l$, и маса m и $2m$, респективно, може да се обрће око хоризонталне осе Oz управне на раван угаоника. У почетном тренутку штап OA био је хоризонталан, а угаоник је мировао. Одредити угаону брзину и угаоно убрзање угаоника као и реакцију зглоба у тачки O у зависности од угла обртања φ.





$\dot\varphi, \ddot\varphi, R_o = f(\varphi) \dots ?$



$\overline{OC}^2 = l^2 + l^2$

$\Downarrow$

за Штајнерову теорему

$\longrightarrow$ ЗАКОН ПРОМЕНЕ МОМЕНТА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА НЕПОКРЕТНУ ОСУ Oz

(1) $\quad \frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = \Sigma M_{Oz}(\vec{F}_i^s) = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + 2mg(l\cos\varphi - l\sin\varphi) = mgl\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right)$

$\mathcal{L}_{Oz} = \mathcal{L}_{Oz}^{OA} + \mathcal{L}_{Oz}^{AB}$

$\mathcal{L}_{Oz}^{OA} = J_{Oz}\dot\varphi = \frac{1}{3}ml^2\dot\varphi$

Штајнерова теорема

$\mathcal{L}_{Oz}^{AB} = J_{Oz}\dot\varphi = \left[J_{Cz'} + 2m(l^2+l^2)\right]\dot\varphi = \left[\frac{1}{12}2m(2l)^2 + 4ml^2\right]\dot\varphi = \frac{14}{3}ml^2\dot\varphi$

$\mathcal{L}_{Oz} = \frac{1}{3}ml^2\dot\varphi + \frac{14}{3}ml^2\dot\varphi = 5ml^2\dot\varphi$

(2) $\quad \frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = 5ml^2\ddot\varphi$

$$5ml^2\ddot\varphi = mgl\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right) \Big/ : ml \quad \Rightarrow \quad \underline{\ddot\varphi = \frac{g}{5l}\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right) = \ddot\varphi(\varphi)}$$

$$\ddot\varphi = \frac{d\dot\varphi}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot\varphi d\dot\varphi}{d\varphi} = \frac{g}{10l}(5\cos\varphi - 4\sin\varphi) \Big/ \cdot d\varphi$$

$$\int_0^{\dot\varphi}\dot\varphi d\dot\varphi = \frac{g}{2l}\int_0^{\varphi}\cos\varphi d\varphi - \frac{2g}{5l}\int_0^{\varphi}\sin\varphi d\varphi$$

$$\underline{\dot\varphi^2 = \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{4g}{5l}(\cos\varphi - 1)} \Rightarrow \dot\varphi = f(\varphi)$$

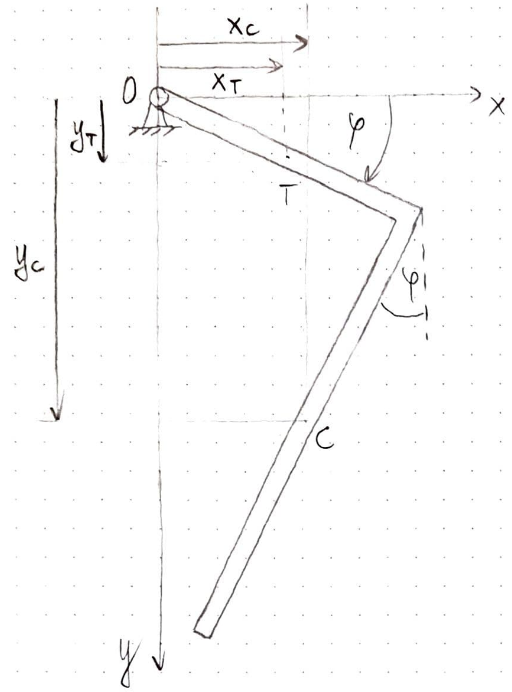
ДА БИСМО ОДРЕДИЛИ $\vec{R}_o$ $\Rightarrow$ КОРИСТИМО ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСА $\Rightarrow$ У ЊЕМУ СЕ ЈАВЉА СУМА СВИХ СИЛА

$3m\vec{a}_{c_{sis}} = m\vec{a}_T + 2m\vec{a}_c = \vec{R}_o + m\vec{g} + 2m\vec{g} \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j}$ треба нам R_{ox} и $R_{oy} \Rightarrow R_o^2 = R_{ox}^2 + R_{oy}^2$

(3) $\quad x: \; m\ddot{x}_T + 2m\ddot{x}_c = -R_{ox}$

(4) $\quad y: \; m\ddot{y}_T + 2m\ddot{y}_c = -R_{oy} + 3mg$ $\quad$ y- оса окренута на доле!

$\ddot{x}_T, \ddot{x}_c, \ddot{y}_T, \ddot{y}_c \dots ?$



$$x_T = \frac{l}{2}\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_T = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$y_T = \frac{l}{2}\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_T = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$x_C = l\cos\varphi - l\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = l(-\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}\cos\varphi) = -l\dot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$y_C = l\sin\varphi + l\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_C = l(\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi) = l\dot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)$$

ОДРЕЂЕНО У ПРВОМ ДЕЛУ ЗАДАТКА:

$$(5) \quad \ddot{x}_T = -\frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \qquad \ddot{\varphi} = \frac{g}{10l}(5\cos\varphi - 4\sin\varphi)$$

$$(6) \quad \ddot{y}_T = \frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \qquad \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{5l}(5\sin\varphi + 4\cos\varphi - 4)$$

$$(7) \quad \ddot{x}_C = -l\ddot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi) - l\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi) = -l[\ddot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi) + \dot{\varphi}^2(\cos\varphi - \sin\varphi)]$$

$$(8) \quad \ddot{y}_C = l\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + l\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}\cos\varphi) = l[\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(\sin\varphi + \cos\varphi)]$$

$$(5),(7) \to (3) \Rightarrow R_{Ox} = \frac{1}{2}ml(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + 2ml[\ddot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi) + \dot{\varphi}^2(\cos\varphi - \sin\varphi)]$$

$$(6),(8) \to (4) \Rightarrow R_{Oy} = 3mg - \frac{1}{2}ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - 2ml[\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(\sin\varphi + \cos\varphi)]$$

$$R_{Ox} = \left(\frac{5}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{5}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi + 2\ddot{\varphi}\cos\varphi - 2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)ml$$

$$= \left[\ddot{\varphi}\left(\frac{5}{2}\sin\varphi + 2\cos\varphi\right) - \dot{\varphi}^2\left(2\sin\varphi - \frac{5}{2}\cos\varphi\right)\right]ml$$

$$= \left[\frac{g}{10l}(5\cos\varphi - 4\sin\varphi)\left(\frac{5}{2}\sin\varphi + 2\cos\varphi\right) - \frac{g}{5l}(5\sin\varphi + 4\cos\varphi - 4)\left(2\sin\varphi - \frac{5}{2}\cos\varphi\right)\right]ml$$

$$= \frac{mg}{10}\left(10\cos^2\varphi + \frac{9}{2}\sin\varphi\cos\varphi - 10\sin^2\varphi - 20\sin^2\varphi + 20\cos^2\varphi + 9\sin\varphi\cos\varphi + 16\sin\varphi - 20\cos\varphi\right)$$

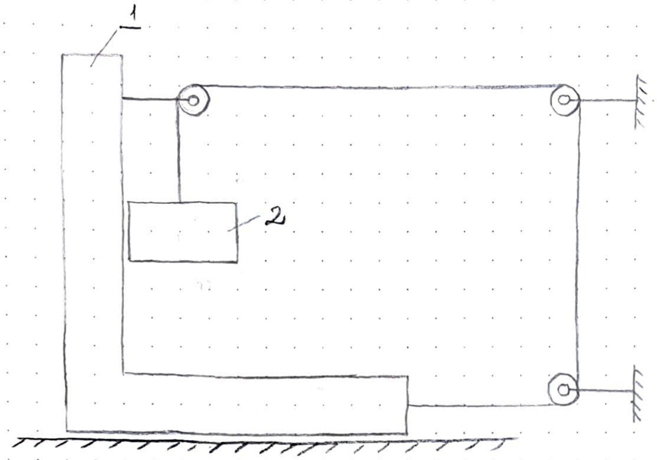
$$= \frac{mg}{10}\cdot\frac{1}{2}(60\cos^2\varphi + 27\sin\varphi\cos\varphi - 60\sin^2\varphi + 32\sin\varphi - 40\cos\varphi)$$

$$R_{Ox} = \frac{mg}{20}(60 - 120\sin^2\varphi + 27\sin\varphi\cos\varphi + 32\sin\varphi - 40\cos\varphi)$$

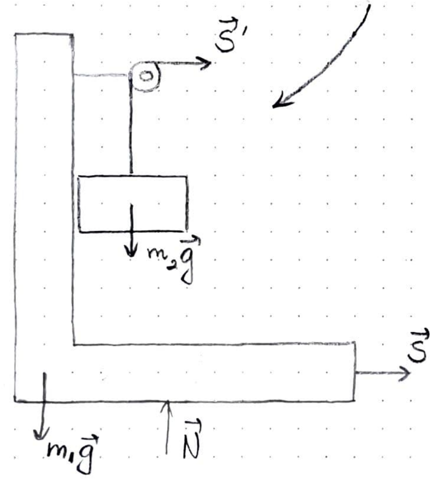
$$R_{Oy} = 3mg - \left[\ddot{\varphi}\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right) - \dot{\varphi}^2\left(\frac{5}{2}\sin\varphi + 2\cos\varphi\right)\right]ml$$

$$R_{Oy} = \frac{mg}{20}(67 + 27\sin^2\varphi + 120\sin\varphi\cos\varphi - 40\sin\varphi - 32\cos\varphi) \qquad R_O^2 = R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2$$

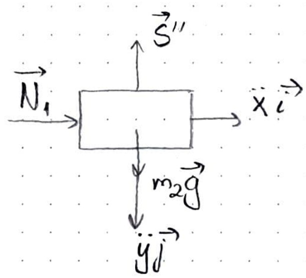
10.29. Платформа 1 масе m_1, која може да се креће по хоризонталној равни, и тело 2 масе m_2 повезани су лаким неистегљивим ужетом као што је приказано на слици. Занемарујући масе котурова и трење одредити убрзање платформе и силу у ужету.



ПОСМАТРАМО СИСТЕМ КОЈИ СЕ САСТОЈИ ОД ТЕЛА 1 И ТЕЛА 2
(ОСЛОБАЂАМО СЕ ВЕЗА КОЈЕ ДЕЛУЈУ НА СИСТЕМ)



ТЕЛО 2



$S = S' = S''$

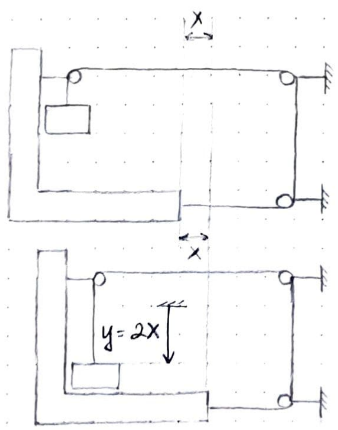
! јер су масе котурова занемарљиве

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{S}'' \,/\cdot \vec{j}$$

$$m_2\ddot{y} = m_2 g - S \quad (1)$$

$$m\vec{a}_c = m_1\vec{g} + \vec{N} + m_2\vec{g} + \vec{S} + \vec{S}' \,/\cdot \vec{i}$$, $m = m_1 + m_2$, $a_{cx} = \ddot{x} \Rightarrow$ ЈЕДИНО УБРЗАЊЕ У ПРАВЦУ $\vec{i}$

$$(2) \quad (m_1 + m_2)\ddot{x} = 2S$$



ВЕЗА!

$$y = 2x \quad (3) \qquad \Rightarrow \quad \ddot{y} = 2\ddot{x} \quad (4)$$

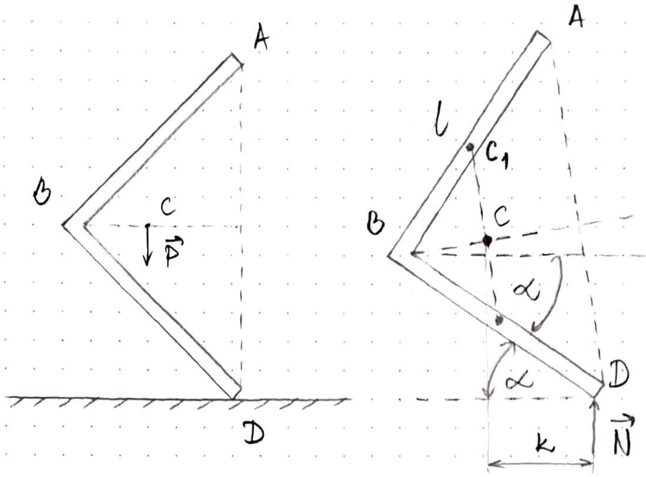
$$\left.\begin{aligned} (4) \rightarrow (1) \Rightarrow \quad & S = m_2 g - 2m_2\ddot{x} \\ (2) \Rightarrow \quad & S = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\ddot{x} \end{aligned}\right\}$$ две једначине са две непознате

$$m_2 g - 2m_2\ddot{x} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{2m_2 g}{m_1 + 5m_2}$$

$$S = \frac{m_2(m_1 + m_2)g}{m_1 + 5m_2}$$

10.32. Правоугли угаоник ABD тежине P састављен је од два једнака хомогена штапа дужине l. Крај D угаоника ослања се на глатку хоризонталну раван при чему су тачке A и D на истој вертикали. Угаоник је пуштен да се креће без почетне брзине. Одредити реакцију равни у почетном тренутку.



$\overline{BC}\sqrt{2} = \frac{l}{2} \Rightarrow \overline{BC} = l\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\overline{CC_1} = \overline{BC}$

$\alpha = 45° - \varphi$

$$k = l\cos\alpha - \overline{BC}\cos\varphi$$
$$= l\cos(45°-\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\varphi$$

$\frac{P}{g}\vec{a}_c = \vec{N} + \vec{P} \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j}$ $\Rightarrow$ КОРИСТИМО ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСА ЈЕР СЕ У ЊЕМУ ЈАВЉА РЕАКЦИЈА РАВНИ (У СУМИ СВИХ СИЛА)

x: $\frac{P}{g}\ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \dot{x}_c = const. = \dot{x}_c(0) = 0 \Rightarrow x_c = const. = x_c(0)$ (1)

y: $\frac{P}{g}\ddot{y}_c = N - P \Rightarrow N = P + \frac{P}{g}\ddot{y}_c$ (2)

$$y_c = l\sin\alpha + l\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$$
$$y_c = l\sin(45°-\varphi) + l\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$$
$$\dot{y}_c = -l\dot{\varphi}\cos(45°-\varphi) + \frac{\sqrt{2}}{2}l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\ddot{y}_c = -l\ddot{\varphi}\cos(45°-\varphi) - l\dot{\varphi}^2\sin(45°-\varphi) + \frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \quad (3)$$

(2) $\Rightarrow N(0) = P + \frac{P}{g}\ddot{y}_c(0)$ (4)

(3) $\Rightarrow \ddot{y}_c(0) = -l\ddot{\varphi}(0)\cos 45° + \frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot{\varphi}(0)$ → (јер је $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ (без почетне брзине)

$\ddot{y}_c(0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}l\ddot{\varphi}(0)$ (5), $\ddot{\varphi}(0)$...?

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_c}{dt} + \cancelto{0}{\vec{v}_c \times m\vec{v}_c} = \vec{M}_c^s \;/\cdot\vec{k}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{cz}}{dt} = M_{cz}^s \quad (0)$$

$\mathcal{L}_{cz} = J_{cz}\dot{\varphi}$, $J_{cz} = 2\left[\frac{1}{12}\frac{P}{2g}l^2 + \frac{P}{2g}(\overline{CC_1})^2\right] = \frac{5}{24}\frac{P}{g}l^2$

$\curvearrowleft +$ $\frac{d\mathcal{L}_{cz}}{dt} = J_{cz}\ddot{\varphi} = M_{cz}(\vec{F}_i^s) = N\cdot k = N\cdot\left[l\cos(45°-\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\varphi\right]$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J_{cz}}N\cdot\left[l\cos(45°-\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\varphi\right]$$

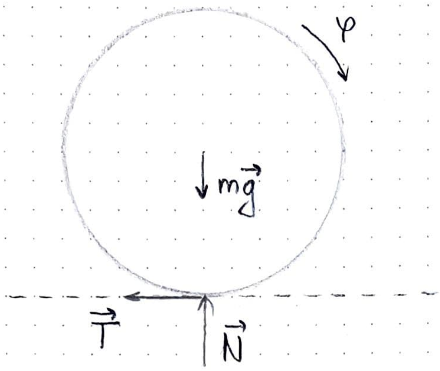
$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{1}{J_{cz}}N(0)\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}l\right) = \frac{\cancelto{6}{24}}{5}\frac{g}{P}\frac{1}{l^{\cancel{2}}}\cdot N(0)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cancel{l}$$

$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{6\sqrt{2}}{5}\frac{g}{Pl}N(0) \quad (6)$$

* када се ради са $2l$ добије се $N(0) = \frac{5}{17}P$

(6) → (5) $\Rightarrow \ddot{y}_c(0) = -\frac{\sqrt{2}}{\cancelto{2}{4}}\cancel{l}\frac{\cancelto{3}{6}\sqrt{2}}{5}\frac{g}{P\cancel{l}}N(0) = -\frac{3}{5}\frac{g}{P}N(0)$ → (4) $N(0) = \frac{5}{8}P$

КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА



$\vec{T} \Rightarrow$ СИЛА ТРЕЊА ПРИ КОТРЉАЊУ БЕЗ КЛИЗАЊА

* СМЕР ⇒ ПРЕТПОСТАВЉАНО
* $T \leq \mu N$

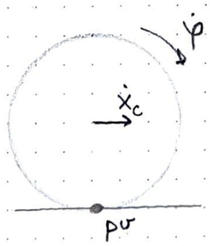
* БЕЗ $\vec{T}$: $m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} \,/ \cdot \vec{i}$

$m\ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \dot{x}_c = const.$

АКО ЈЕ $\dot{x}_c(0) = 0$

ДОБИЈА СЕ $x_c = const.$

А ТО ЈЕ НЕМОГУЋЕ !



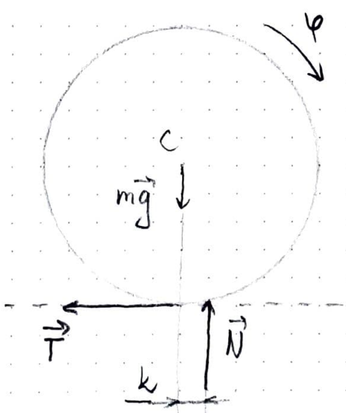
! ЈЕДАН СТЕПЕН СЛОБОДЕ !

ОД 3 МОГУЋА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ ПРИ КРЕТАЊУ У РАВНИ, ЕЛИМИНИШЕ СЕ ВЕРТИКАЛНО ПОМЕРАЊЕ ТЦ.

$$\dot{y}_c = \ddot{y}_c = 0$$

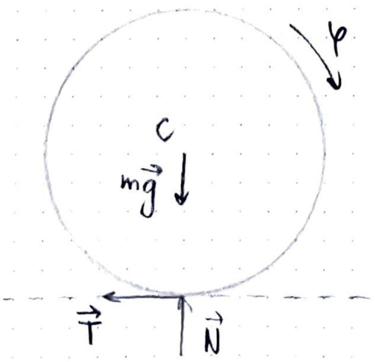
ДОК ЗБОГ ПОСТОЈАЊА ТРЕНУТНОГ ПОЛА БРЗИНА МОЖЕМО ОДРЕДИТИ КРЕТАЊЕ СВАКЕ ТАЧКЕ У ФУНКЦИЈИ УГЛА φ, ЧИМЕ СЕ УКИДА ЈОШ ЈЕДАН СТЕПЕН СЛОБОДЕ

* КАДА ПОСТОЈИ ОТПОР КОТРЉАЊУ СА КРАКОМ k



* СИЛА РЕАКЦИЈЕ ПОДЛОГЕ ПРАВИ МОМЕНТ СА КРАКОМ k У ОДНОСУ НА ЦЕНТАР ДИСКА
* СМЕР МОМЕНТА ЈЕ СУПРОТАН ОД СМЕРА ПОРАСТА УГЛА φ ⇒ ЧИМЕ СЕ СТВАРА ОТПОР КОТРЉАЊУ

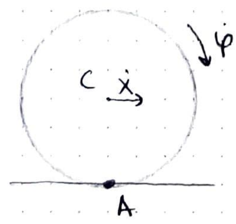
КОТРЉАЊЕ СА КЛИЗАЊЕМ (ПРОКЛИЗАВАЊЕМ)



$\vec{T} \Rightarrow$ СИЛА ТРЕЊА КЛИЗАЊА

* СМЕР ⇒ СУПРОТАН ОД СМЕРА КРЕТАЊА
* $T = \mu N$

! ДВА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ !

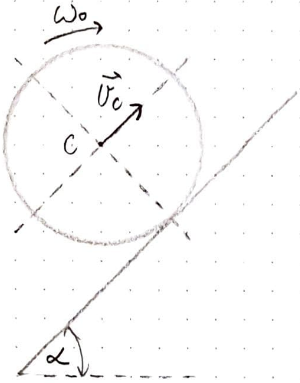


ТАЧКА А НИЈЕ ТРЕНУТНИ ПОЛ БРЗИНА $\Rightarrow \vec{v}_A \neq 0$

$\Downarrow$

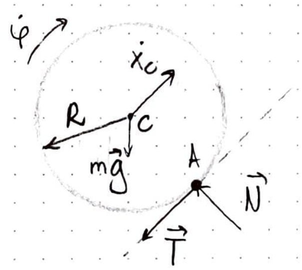
НЕ УКИДА СЕ ДРУГИ СТЕПЕН СЛОБОДЕ

10.47. Хомогени танки цилиндар, полупречника R и масе m, почиње кретање уз стрму раван нагиба $\alpha = 45°$ угаоном брзином $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ и брзином средишта $v_c = 2R\omega_0$. Ако је коефицијент трења између цилиндра и равни $\mu = \frac{1}{3}$ (статички и динамички), одредити висину пењања цилиндра.



* Цилиндар проклизава у почетку кретања и због тога тачка додира између цилиндра и подлоге није тренутни пол брзина ($v_A \neq 0$ тј. $v_A > 0$). У току кретања брзина тачке додира се смањује и постаје $v_A = 0$ након чега се цилиндар котрља без клизања!

I ЦИЛИНДАР ПРОКЛИЗАВА ⇒ тачка A није тренутни пол брзина $v_A > 0$!



$T = \mu N = \frac{1}{3} N$

$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} \;/\cdot \vec{i} \;/\cdot \vec{j}$$

$$x: \quad m\ddot{x}_c = -mg\frac{\sqrt{2}}{2} - T \quad (1), \quad T = \mu N$$

$$y: \quad 0 = N - mg\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \Rightarrow N = mg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T = \mu mg\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}mg$$

$$m\ddot{x}_c = -mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}mg \;/: m \Rightarrow \ddot{x}_c = -\frac{2\sqrt{2}}{3}g \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_c}{dt} + \cancel{\vec{v}_c \times m\vec{v}_c}^{\,0} = \vec{M}_c^s \;/\cdot \vec{k}$$

$$\circlearrowleft +\; \frac{d\mathcal{L}_{cz}}{dt} = M_{cz}^s = TR = \frac{\sqrt{2}}{6}mgR$$

$$\mathcal{L}_{cz} = J_{cz}\dot{\varphi} = mR^2\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{cz}}{dt} = mR^2\ddot{\varphi}$$

ТАНКИ ЦИЛИНДАР

$$\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{6}\cancel{m}g\cancel{R}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{g}{R} \quad (4)$$

$$(3)/\cdot dt \Rightarrow \int_{v_{c0}}^{\dot{x}_c} d\dot{x}_c = -\frac{2\sqrt{2}}{3}g\int_0^t dt \Rightarrow \dot{x}_c - v_{c0} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}gt$$

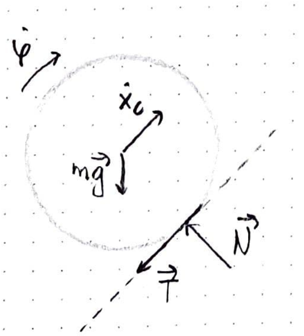
$$\dot{x}_c = 2R\omega_0 - \frac{2\sqrt{2}}{3}gt \quad (5)$$ ⇒ БРЗИНА СЕ СМАЊУЈЕ У ТОКУ КРЕТАЊА

$$(4)/\cdot dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{g}{R}\int_0^t dt \Rightarrow \dot{\varphi} - \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{g}{R}t$$

$\dot{x}_c \neq f(\dot{\varphi}) \Rightarrow$ **2 СТЕПЕНА СЛОБОДЕ !**

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{g}{R}t \quad (6)$$ ⇒ УГАОНА БРЗИНА СЕ ПОВЕЋАВА

II ЦИЛИНДАР ПРЕСТАЈЕ ДА ПРОКЛИЗАВА У НЕКОМ ТРЕНУТКУ t_1 ⇒ $v_A = 0$ ⇒ $A \equiv P^v$



$$(7) \quad \dot{x}_c = R\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{x}_c = f(\dot{\varphi})$$ ⇒ **1 СТЕПЕН СЛОБОДЕ !**

$$(7) \to (5),(6) \Rightarrow 2R\omega_0 - \frac{2\sqrt{2}}{3}gt_1 = R\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{g}{R}t_1\right)$$

$$t_1 = \frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{R\omega_0}{g}$$ ⇒ ТРЕНУТАК КАДА ПРЕСТАЈЕ ПРОКЛИЗАВАЊЕ

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}(t_1) = \omega_0 + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{6}_{\,3}}\frac{\cancel{g}}{\cancel{R}}\frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{\cancel{R}\omega_0}{\cancel{g}}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{6}{5}\omega_0, \quad \dot{x}_{c1} = \frac{6}{5}R\omega_0$$ ПОЧЕТНИ УСЛОВИ У II ДЕЛУ КРЕТАЊА (t_1 ЈЕ ПОЧ. ТРЕНУТАК)

$|T| \leq \mu N = \frac{1}{3}N$

СМЕР СЕ ПРЕТПОСТАВЉА!

II $\quad m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j}$

x: $\quad m\ddot{x}_c = -mg\frac{\sqrt{2}}{2} - T \quad (8)$

y: $\quad 0 = N - mg\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow N = mg\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9)$

$$\left.\begin{aligned} &\circlearrowleft{+}\ \frac{d\alpha_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^{s} = TR \\ &\frac{d\alpha_{Cz}}{dt} = mR^2\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} mR^2\ddot{\varphi} = TR \quad (10)$$

$(7)\,/\,\frac{d}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_c = R\ddot{\varphi} \rightarrow (8) \Rightarrow mR\ddot{\varphi} = -mg\frac{\sqrt{2}}{2} - T \quad (11)$

(10), (11) ⇒ ДВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ $(\ddot{\varphi}, T)$

$$\left.\begin{aligned} &(11)/\cdot R \Rightarrow mR^2\ddot{\varphi} = -mgR\frac{\sqrt{2}}{2} - TR \\ &(10) \Rightarrow mR^2\ddot{\varphi} = TR \end{aligned}\right\} -mgR\frac{\sqrt{2}}{2} - TR = TR$$

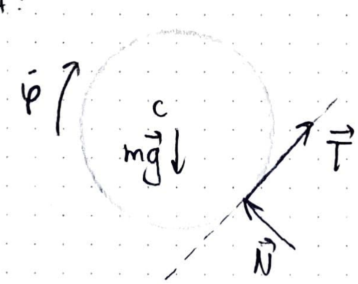
$$T = -\frac{\sqrt{2}}{4}mg$$

ПОГРЕШНО ПРЕТПОСТАВЉЕН СМЕР

$$|T| = \frac{\sqrt{2}}{4}mg > \mu N = \frac{1}{3}N = \frac{\sqrt{2}}{6}mg$$

! Да би се тело котрљало без клизања $|T| \leq \mu N$. Пошто након тренутка t_1 тај услов није задовољен, то значи да се тело никада не котрља без клизања и да је брзина тачке A била једнака нули само у тренутку t_1, док за $t > t_1$ важи $v_A \neq 0$

Међутим, након тренутка t_1, сила $\vec{T}$ има смер <u>УЗ</u> стрму раван:



$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j}$

x: $\quad m\ddot{x}_c = -mg\frac{\sqrt{2}}{2} + T \quad (12) \qquad T = \mu N \Rightarrow$ СИЛА ТРЕЊА КЛИЗАЊА

y: $\quad 0 = N - mg\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (13) \Rightarrow N = mg\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{2}}{6}mg$

$(12) \Rightarrow \ddot{x}_c = -\frac{\sqrt{2}}{3}g \quad (14)$

$$\left.\begin{aligned} &\circlearrowleft{+}\ \frac{d\alpha_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^{s} = -TR \\ &\frac{d\alpha_{Cz}}{dt} = mR^2\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} mR^2\ddot{\varphi} = -TR$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{g}{R} \quad (15)$$

(14)/$\cdot dt$ $\Rightarrow$ $\int_{\dot{x}_{c_1}}^{\dot{x}_c} d\dot{x}_c = -\frac{\sqrt{2}}{3} g \int_{t_1}^{t} dt$

$$\dot{x}_c - \dot{x}_{c_1} = -\frac{\sqrt{2}}{3} g (t - t_1) \Rightarrow \dot{x}_c = \frac{6}{5} R\omega_0 - \frac{\sqrt{2}}{3} g (t - t_1) \quad (16)$$

(15)/$\cdot dt$ $\Rightarrow$ $\int_{\dot{\varphi}_1}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{g}{R} \int_{t_1}^{t} dt$

$$\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{g}{R} (t - t_1) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{6}{5} \omega_0 - \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{g}{R} (t - t_1) \quad (17)$$

ПОШТО СЕ ТРАЖИ ВИСИНА ПЕЊАЊА ПОСТАВЉАМО УСЛОВ $\dot{x}_{c_2} = 0$ (ЗАУСТАВИ СЕ)

$$\dot{x}_{c_2} = 0 = \frac{6}{5} R\omega_0 - \frac{\sqrt{2}}{3} g (t_2 - t_1)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{9\sqrt{2}}{5} \frac{R\omega_0}{g}$$

$$t_2 = \frac{9\sqrt{2}}{5} \frac{R\omega_0}{g} + t_1 = \frac{12\sqrt{2}}{5} \frac{R\omega_0}{g}$$ $\Rightarrow$ тренутак заустављања

(16)/$\cdot dt$ $\Rightarrow$ $\int_{x_{c_1}}^{x_{c_2}} dx_c = \frac{6}{5} R\omega_0 \int_{t_1}^{t_2} dt - \frac{\sqrt{2}}{3} g \int_{t_1}^{t_2} t\,dt + \frac{\sqrt{2}}{3} g t_1 \int_{t_1}^{t_2} dt$

(ДРУГИ НАЧИН $= \frac{6}{5} R\omega_0 \int_{t_1}^{t_2} dt - \frac{\sqrt{2}}{3} g \int_{0}^{t - t_1} z\,dz$, $z = t - t_1$)

$$x_{c_2} - x_{c_1} = \frac{6}{5} R\omega_0 (t_2 - t_1) - \frac{\sqrt{2}}{3} g \frac{1}{2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{\sqrt{2}}{3} g t_1 (t_2 - t_1) =$$

$$x_{c_2} = x_{c_1} + \frac{6}{5} R\omega_0 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{5} \frac{R\omega_0}{g} - \frac{\sqrt{2}}{6} g \left(\frac{2 \cdot 12^2}{5} - \frac{2 \cdot 3^2}{5} \right) \frac{R^2\omega_0^2}{g^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} g \frac{3\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{5} \frac{R^2\omega_0^2}{g^2}$$

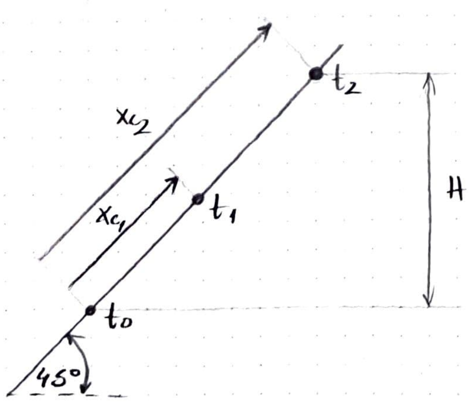
$$x_{c_2} = x_{c_1} + \frac{27\sqrt{2}}{25} \frac{R^2\omega_0^2}{g}$$

? (5)/$\cdot dt$ $\Rightarrow$ $\int_{0}^{x_{c_1}} dx_c = 2R\omega_0 \int_{0}^{t_1} dt - \frac{2\sqrt{2}}{3} g \int_{0}^{t_1} t\,dt$

$$x_{c_1} = 2R\omega_0 \frac{3\sqrt{2}}{5} \frac{R\omega_0}{g} - \frac{2\sqrt{2}}{3} g \frac{1}{2} \frac{3^2 \cdot 2}{25} \frac{R^2\omega_0^2}{g}$$

$$x_{c_1} = \frac{24\sqrt{2}}{25} \frac{R^2\omega_0^2}{g}$$

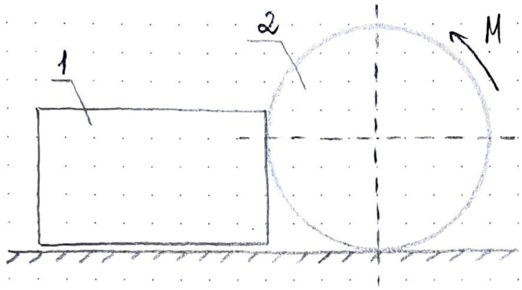
$$x_{c_2} = \frac{51\sqrt{2}}{25} \frac{R^2\omega_0^2}{g}$$



$$H = x_{c_2} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow H = \frac{51}{25} \frac{R^2\omega_0^2}{g}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$H = \frac{51}{25} R$$

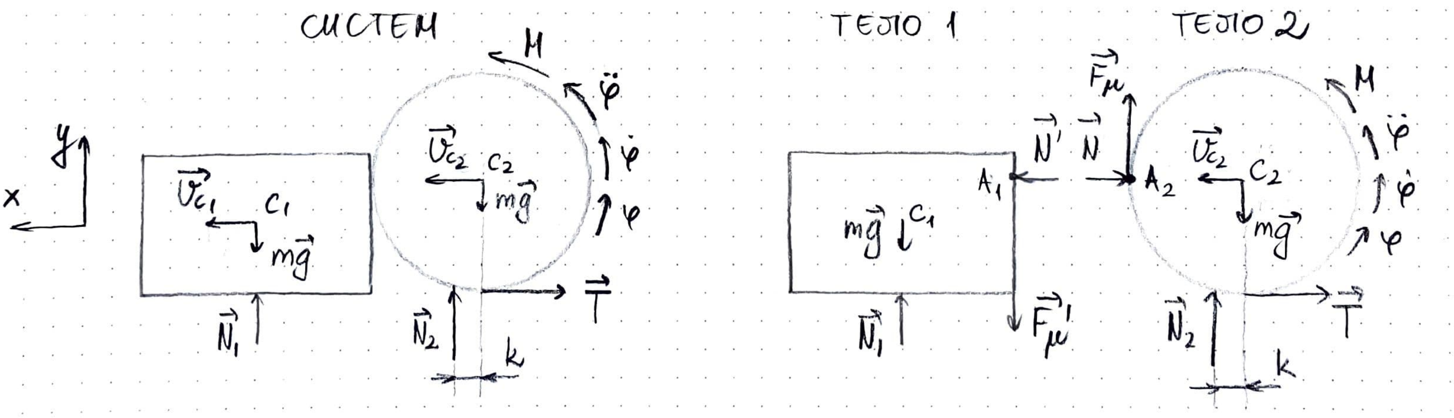
10.43. Систем приказан на слици састоји се од призме 1 масе m, која може да клизи без трења по хоризонталној равни, и диска 2, масе m и полупречника R, који се котрља без клизања по хоризонталној равни. Коефицијент трења клизања између призме и диска износи $\mu=0,5$, а крак отпора котрљању између диска и хоризонталне равни је $k=0,1R$. У почетном тренутку систем је мировао. Ако на диск делује спрег интензитета момента M, одредити убрзање призме и спољне реакције које делују на систем.



* ОТПОР КОТРЉАЊУ ⇒ СИЛА $\vec{N_2}$ ПРАВИ МОМЕНТ СА КРАКОМ k У ОДНОСУ НА ОСУ C_{2z}; ТАЈ МОМЕНТ ЈЕ СУПРОТНОГ СМЕРА У ОДНОСУ НА СМЕР КОТРЉАЊА, ТЕ СЕ ТИМЕ СУПРОТСТАВЉА КОТРЉАЊУ ТЈ. ПРУЖА ОТПОР КОТРЉАЊУ

** ПРИ КОТРЉАЊУ БЕЗ КЛИЗАЊА ЈАВЉА СЕ И СИЛА ТРЕЊА ПРИ КОТРЉАЊУ БЕЗ КЛИЗАЊА; СМЕР ТЕ СИЛЕ СЕ ПРЕТПОСТАВЉА (НИЈЕ ПОЗНАТ!) ДОК ЈЕ ИНТЕНЗИТЕТ $T \leq \mu N$ (ИНТЕНЗИТЕТ СИЛЕ ТРЕЊА ПРИ КОТРЉАЊУ БЕЗ КЛИЗАЊА ЈЕ МАЊИ ОД ИНТЕНЗИТЕТА СИЛЕ ТРЕЊА КЛИЗАЊА

! ПОШТО СЕ СМЕР $\vec{T}$ ПРЕТПОСТАВЉА, НЕ ТРЕБА ДА СЕ ПРЕТПОСТАВИ И СМЕР $\vec{F_\mu}$ (ИЗБЕГАВА СЕ ВИШЕ ПРЕТПОСТАВКИ)



– ТЕЛО 1 СЕ КРЕЋЕ ТРАНСЛАТОРНО

– ЦЕНТАР ДИСКА C_2 КРЕЋЕ СЕ ПРАВОЛИНИЈСКИ

↳ брзина транслације

$$\vec{v}_{C_1}=\vec{v}_{C_2}$$

$$v_{C_2}=R\dot\varphi$$

$$\dot x_{C_1}=\dot x_{C_2}=R\dot\varphi \; \Big/\frac{d}{dt}$$

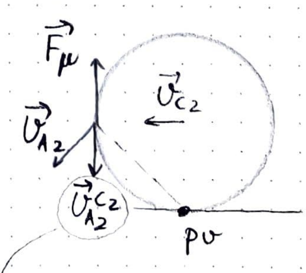
$$\ddot x_{C_1}=\ddot x_{C_2}=R\ddot\varphi \quad (1)$$

Како се одређује смер $\vec{F_\mu}$?

$$\vec{v}_{A_2}=\vec{v}_{C_2}+\vec{v}_{A_2}^{C_2}$$

$$\vec{v}_{A_1}=\vec{v}_{C_1}=\vec{v}_{C_2}$$

$$\vec{v}_{A_2}-\vec{v}_{A_1}=\vec{v}_{A_2}^{C_2}$$



БРЗИНА ПРОКЛИЗАВАЊА ТЕЛА 2 У ОДНОСУ НА ТЕЛО 1 ⇒ СИЛА ТРЕЊА КЛИЗАЊА ИМА ИСТИ ПРАВАЦ, А СУПРОТАН СМЕР У ОДНОСУ НА БРЗИНУ ПРОКЛИЗАВАЊА

! МОЖЕ СЕ ЗАКЉУЧИТИ ДА ЈЕ СМЕР СУПРОТАН СМЕРУ ПОРАСТА УГЛА φ, ДОК ЈЕ $\vec{F_\mu}' = -\vec{F_\mu}$

ТЕЛО 1 $\quad m\vec{a}_{C_1} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}' + \vec{F}_\mu' \;\Big/ \cdot \vec{i} \Big/ \vec{j}$

x: $\quad m\ddot{x}_{C_1} = N' \quad (2)$

y: $\quad 0 = N_1 - mg - F_\mu' \quad (3)$, $\quad F_\mu' = \mu N'$, $\quad F_\mu' = F_\mu$, $\quad N' = N$

ТЕЛО 2 $\quad m\vec{a}_{C_2} = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_\mu + \vec{F} + \vec{F}' \;\Big/ \cdot \vec{i} \Big/ \vec{j}$

x: $\quad m\ddot{x}_{C_2} = -N - T \quad (4)$

y: $\quad 0 = N_2 - mg + F_\mu \quad (5)$

→ СИЛЕ КОЈЕ ЧИНЕ СПРЕГ МОМЕНТА M

$\vec{F} = -\vec{F}'$

$(1) \to (2),(4) \wedge (3),(5) \Rightarrow$ 4 једначине са 5 непознатих $(\ddot{\varphi}, N, N_1, N_2, T)$

$\Downarrow$

ПОТРЕБНА ЈЕ ЈОШ ЈЕДНА ЈЕДНАЧИНА

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{C_2}}{dt} + \cancelto{0}{\vec{v}_{C_2} \times m\vec{v}_{C_2}} = \vec{M}^s_{C_2} \;\Big/ \cdot \vec{k}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{C_2 z}}{dt} = M^s_{C_2 z} = M - N_2 k + TR$$

$$\mathcal{L}_{C_2 z} = J_{C_2 z}\dot{\varphi} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{C_2 z}}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = M - N_2 k + TR \quad (6)$$

$(1) \to (2) \Rightarrow \quad mR\ddot{\varphi} = N \quad (2')$

$(3) \Rightarrow \quad N_1 = mg + \mu N$

$(1) \to (4) \Rightarrow \quad mR\ddot{\varphi} = -N - T \quad (4')$

$(5) \Rightarrow \quad N_2 = mg - \mu N$

5 ј-чина са 5 непознатих

$(4'),(5) \to (6) \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = M - mgk - \mu N k - mR^2\ddot{\varphi} - NR$

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = M - mgk + N(R + \mu k) \quad (7)$$

$(2') \to (7) \Rightarrow \quad \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = M - mgk + mR\ddot{\varphi}(R + \mu k)$

$$\left(\frac{3}{2}mR^2 - mR^2 - \mu mRk\right)\ddot{\varphi} = M - mgk$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M - mgk}{\frac{1}{2}mR^2 - \mu mRk} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{2(M - mgk)}{mR(R - 2\mu k)}$$

$$\ddot{x}_{C_1} = \frac{2(M - mgk)}{m(R - 2\mu k)} \Rightarrow \ddot{x}_{C_1} = \frac{20M - 2mgR}{9mR}$$

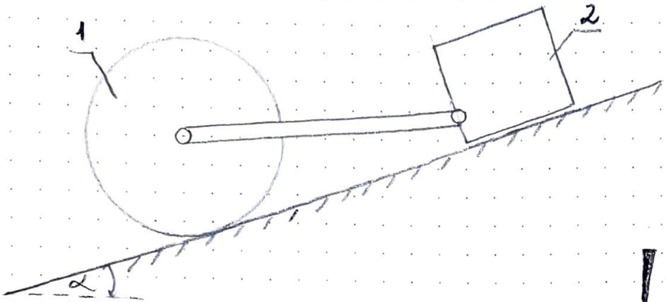
$$N = \frac{2(M - mgk)}{R - 2\mu k}$$

$$N_1 = mg + \frac{2\mu(M - mgk)}{R - 2\mu k} \Rightarrow N_1 = mg + \frac{10M - mgR}{9R}$$

$$N_2 = mg - \frac{2\mu(M - mgk)}{R - 2\mu k} \Rightarrow N_2 = mg - \frac{10M - mgR}{9R}$$

* РЕШЕЊЕ У ЗБИРЦИ НИЈЕ ИСТО

10.42. Диск 1 масе m и полупречника R, зглобно је везан штапом занемарљиве масе за тело 2 масе m. Крак отпора котрљању диска 1 који се котрља без клизања низ стрму раван износи k. Коефицијент трења клизања између тела 2 и стрме равни је μ. Под којим углом треба да је нагнута стрма раван по којој се крећу диск 1 и тело 2 да би сила у штапу била једнака нули.



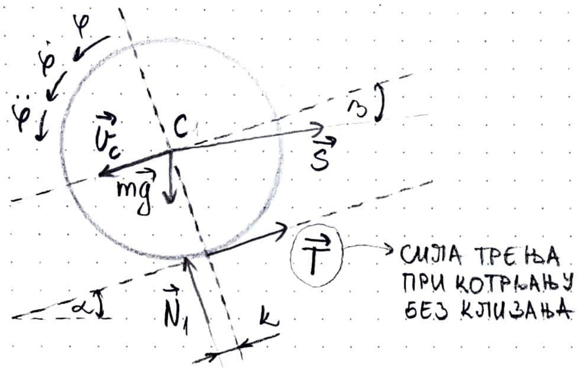
ТЕЛО 1: КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА

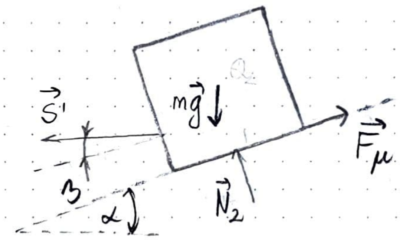
ТЕЛО 2 И ШТАП: ТРАНСЛАЦИЈА

ШТАП СЕ КРЕЋЕ ТРАНСЛАТОРНО ЈЕР СЕ ОБА ЊЕГОВА КРАЈА КРЕЋУ ПРАВОЛИНИЈСКИ

* БРЗИНА ТРАНСЛАЦИЈЕ БИЋЕ ЈЕДНАКА БРЗИНИ ЦЕНТРА МАСЕ ДИСКА C

ЦЕНТАР МАСЕ ДИСКА КРЕЋЕ СЕ ПРАВОЛИНИЈСКИ





ТЕЛО 1:

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_C}{dt} + \cancel{\vec{v}_C \times m\vec{v}_C}^{\,0} = \vec{M}_C^S \;/\cdot \vec{k}$$

$$\circlearrowleft + \quad \frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^S = -N_1 \cdot k + T \cdot R$$

$$\mathcal{L}_{Cz} = J_{Cz}\dot{\varphi}, \quad J_{Cz} = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow \mathcal{L}_{Cz} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = -N_1 k + TR \quad (1)$$

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{S} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{S} \;/\cdot\vec{i} \;/\cdot\vec{j}$$

$$x: \quad m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - S\cos\beta - T \quad (2)$$

$$y: \quad 0 = -mg\cos\alpha - S\sin\beta + N_1 \quad (3)$$

ТЕЛО 2:

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_\mu + \vec{S}' \;/\cdot\vec{i} \;/\cdot\vec{j}$$

$$x: \quad m\ddot{x}_2 = mg\sin\alpha - F_\mu + S'\cos\beta \quad (4), \quad F_\mu = \mu N_2, \quad S' = S$$

$$y: \quad 0 = -mg\cos\alpha + N_2 + S'\sin\beta \quad (5)$$

КИНЕМАТСКА ВЕЗА $\Rightarrow$ $v_C = R\dot{\varphi} = \dot{x}_C$, $v_C = v_2$ (БРЗИНА ТРАНСЛАЦИЈЕ)

$$\dot{x}_C = \dot{x}_2 = R\dot{\varphi} \;/\frac{d}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_C = \ddot{x}_2 = R\ddot{\varphi} \quad (6)$$

УСЛОВ ЗАДАТКА $\Rightarrow$ $s = s' = 0$ (7)

$$(6),(7) \rightarrow (2) \Rightarrow mR\ddot{\varphi} = mg\sin\alpha - T \quad (2')$$

$$(7) \rightarrow (3) \Rightarrow N_1 = mg\cos\alpha \quad (3')$$

$$\left.\begin{array}{l} (6),(7) \rightarrow (4) \Rightarrow mR\ddot{\varphi} = mg\sin\alpha - \mu N_2 \quad (4') \\ (7) \rightarrow (5) \Rightarrow N_2 = mg\cos\alpha \quad (5') \end{array}\right\} mR\ddot{\varphi} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \quad (8)$$

$(1), (2'), (3'), (8)$ $\Rightarrow$ СИСТЕМ ОД 4 ЈЕДНАЧИНЕ СА 4 НЕПОЗНАТЕ $(\ddot{\varphi}, N_1, T, \alpha)$

$$(2'),(3') \rightarrow (1) \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = -mgk\cos\alpha + mgR\sin\alpha - mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = mgR\sin\alpha - mgk\cos\alpha \quad (9)$$

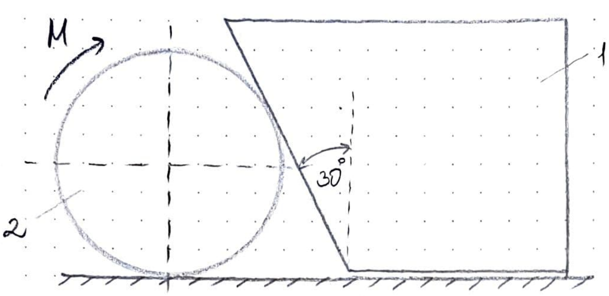
$$(8) / \cdot \frac{3}{2}R \wedge (9) \Rightarrow \frac{3}{2}mgR\sin\alpha - \frac{3}{2}\mu mgR\cos\alpha = mgR\sin\alpha - mgk\cos\alpha$$

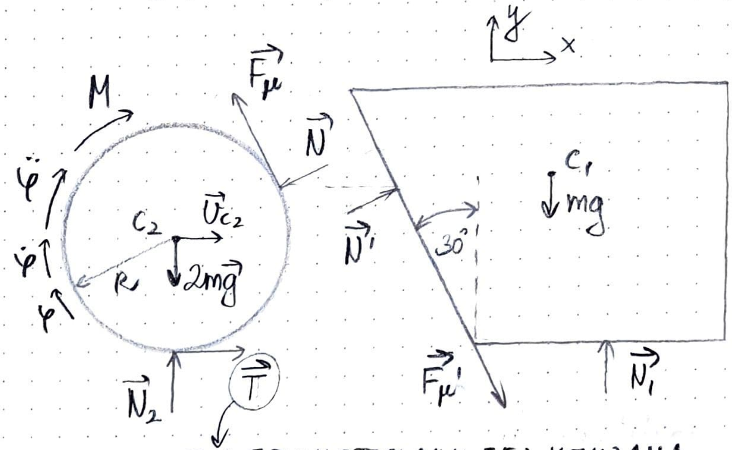
$$\frac{1}{2}mgR\sin\alpha = \frac{3}{2}\mu mgR\cos\alpha - mgk\cos\alpha \ / :\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 2\frac{1}{\cancel{mg}R}\left(\frac{3}{2}\mu\cancel{mg}R - \cancel{mg}k\right)$$

$$\underline{\mathrm{tg}\,\alpha = 3\mu - \frac{2k}{R}}$$

10.49. Ваљак 2, масе $m_2=2m$ и полупречника R, може да се котрља без клизања по хоризонталној равни под дејством момента M приказаног смера. Ваљак додирује страну призме 1 нагнуту под углом од $30°$ у односу на вертикалу. Призма 1 масе $m_1=m$ може да клизи без трења по истој хоризонталној равни. Ако је коефицијент трења између призме и цилиндра $\mu=\frac{\sqrt{3}}{4}$, одредити убрзање тела 1 и реакције веза, уколико је систем мировао на почетку кретања.





СИЛА ТРЕЊА ПРИ КОТРЉАЊУ БЕЗ КЛИЗАЊА

$$m\vec a_{c_1} + 2m\vec a_{c_2} = 3m\vec g + \vec N_1 + \vec N_2 + \vec T \;/\cdot\vec i \;\Rightarrow\; m\ddot x_1 + 2m\ddot x_2 = T$$

$v_{c_2} = R\dot\varphi = v_{c_1}$ (БРЗИНА ТРАНСЛАЦИЈЕ) $\Rightarrow \dot x_1 = \dot x_2 = R\dot\varphi \Rightarrow \ddot x_1 = \ddot x_2 = R\ddot\varphi$

$$3mR\ddot\varphi = T \quad (1)$$

ТЕЛО 1 $m\vec a_1 = m\vec g + \vec N_1 + \vec N' + \vec F_\mu' \;/\cdot\vec i\,/\cdot\vec j$ $\qquad N' = N,\quad F_\mu' = F_\mu = \frac{\sqrt{3}}{4}N$ ⇒ КОМЕНТАР ЗА СМЕР У ЗАДАТКУ 10.43.

x: $m\ddot x_1 = N'\cos 30° + F_\mu'\sin 30° \Rightarrow m\ddot x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{\sqrt{3}}{8}N \Rightarrow mR\ddot\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{8}N \quad (2)$

y: $0 = N_1 - mg + N'\sin 30° - F_\mu'\cos 30° \Rightarrow N_1 = mg - \frac{1}{2}N + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}N \Rightarrow N_1 = mg - \frac{1}{8}N \quad (3)$

ТЕЛО 2 $2m\vec a_2 = 2m\vec g + \vec N_2 + \vec N + \vec F_\mu + \vec T$

x: $2m\ddot x_2 = -N\cos 30° - F_\mu\sin 30° + T \Rightarrow 2mR\ddot\varphi = -\frac{5\sqrt{3}}{8}N + T \quad (4)$

y: $0 = N_2 - 2mg - N\sin 30° + F_\mu\cos 30° \Rightarrow N_2 = 2mg + \frac{1}{8}N \quad (5)$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{c_2}}{dt} + \cancel{\vec v_{c_2}\times m\vec v_{c_2}}^{\,0} = \vec M^s_{c_2} \;/\cdot\vec k$$

$$(+\;\; \frac{d\mathcal{L}_{c_2z}}{dt} = M^s_{c_2z} = M - F_\mu R - TR = M - \frac{\sqrt{3}}{4}NR - TR$$

$$\mathcal{L}_{c_2z} = J_{c_2z}\dot\varphi$$

$J_{c_2z} = \frac{1}{2}mR^2$ ⇒ ЗА ВАЉАК (ЦИЛИНДАР)

$$\mathcal{L}_{c_2z} = \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{c_2z}}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\ddot\varphi$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot\varphi = M - \frac{\sqrt{3}}{4}NR - TR \quad (6)$$

$(1)\rightarrow(4) \equiv (2)$, $\quad (1)\rightarrow(6) \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\ddot\varphi = M - \frac{\sqrt{3}}{4}NR - 3mR^2\ddot\varphi$

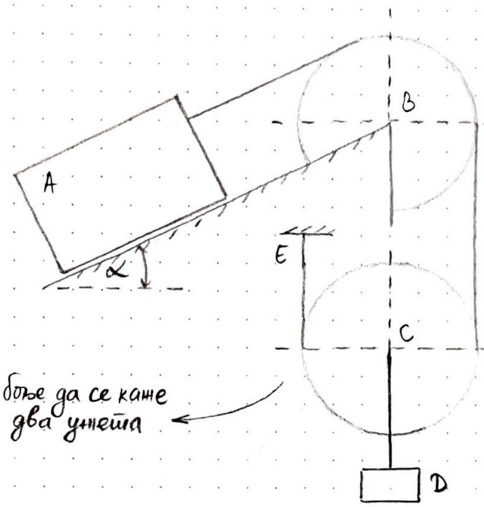
$$\frac{7}{2}mR^2\ddot\varphi = M - \frac{\sqrt{3}}{4}NR \quad (6')$$

(2), (3), (5), (6') ⇒ СИСТЕМ ОД 4 ЈЕДНАЧИНЕ СА 4 НЕПОЗНАТЕ $(N, N_1, N_2, \ddot\varphi)$

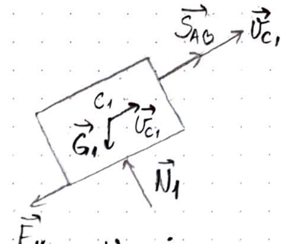
$$\ddot\varphi = \frac{10}{39}\frac{M}{mR^2} \Rightarrow \ddot x_1 = \frac{10}{39}\frac{M}{mR},\quad N = \frac{16\sqrt{3}}{117}\frac{M}{R},\quad F_\mu = \frac{4}{39}\frac{M}{R},\quad N_1 = mg - \frac{2\sqrt{3}}{117}\frac{M}{R},\quad N_2 = 2mg + \frac{2\sqrt{3}}{117}\frac{M}{R}$$

* РЕШЕЊЕ У ЗБИРЦИ НИЈЕ ИСТО

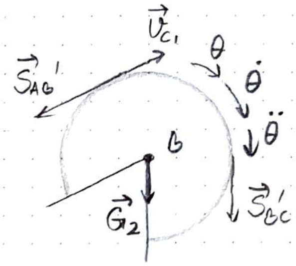
10.55. Терет A тежине G_1, који се налази на стрмој равни нагиба α и коефицијента трења μ, привезан је за уже пребачено преко котура (диска) B и обмотано око котура (диска) C. Други крај ужета везан је за непомичну тачку E. Диск B и котур C су истих тежина G_2 и полупречника R, а терет D који виси о осовини котура C је тежине G_3. Одредити убрзање терета D и силу у ужету на делу AB, ако се терет A креће уз стрмну раван.

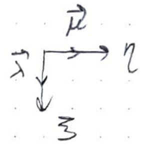


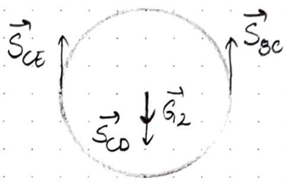
* боље да се каже два ужета

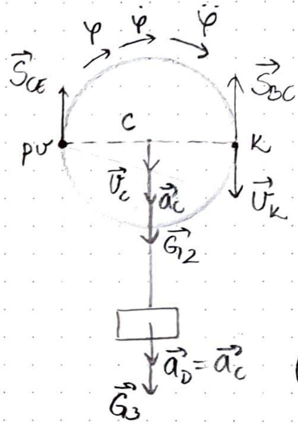


$v_{C_1} = \dot{x}$









* ДРУГИ КРАЈ УЖЕТА МИРУЈЕ

⇓

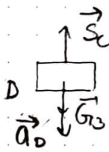
КАО КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА ПО ПОДЛОЗИ

$v_K = \dot{x}$

$v_C = \frac{v_K}{2} = \frac{\dot{x}}{2}$

$a_C = \dot{v}_C = \frac{\ddot{x}}{2} = \ddot{\xi}$

(1) $\underline{\underline{a_D = a_C}}$



КОТУР (ДИСК) C

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_C}{dt} = \vec{M}_C^s \;/\cdot \vec{k}$$

$$(+)\;\frac{d\mathcal{L}_{C\zeta}}{dt} = M_{C\zeta}^s = S_{CE}\cdot R - S_{BC}\cdot R$$

$$\mathcal{L}_{C\zeta} = J_{C\zeta}\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{C\zeta}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\ddot{\varphi}$$

$$(3)\quad \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\ddot{\varphi} = S_{CE}\cdot R - S_{BC}\cdot R}}$$

ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСЕ ЗА ТЕЛО D

$$\frac{G_3}{g}\vec{a}_D = \vec{G}_3 + \vec{S}_{CD}' \;/\cdot \vec{\lambda}$$

$$\frac{G_3}{g}\ddot{\xi} = G_3 - S_{CD}' \quad , \quad \ddot{\xi} = \frac{\ddot{x}}{2}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{G_3}{g}\ddot{x} = G_3 - S_{CD}'}}\quad (2)$$

$$\frac{G_2}{g}\vec{a}_C = \vec{G}_2 + \vec{S}_{CD} + \vec{S}_{CE} + \vec{S}_{BC} \;/\cdot\vec{\lambda} \;\Rightarrow\; \frac{G_2}{g}\ddot{\xi} = G_2 + S_{CD} - S_{CE} - S_{BC} \quad , \quad S_{CD} = S_{CD}'$$

ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСЕ ЗА КОТУР (ДИСК) C

$$\frac{G_2}{g}\ddot{\xi} = G_2 + G_3 - \frac{1}{2}\frac{G_3}{g}\ddot{x} - S_{CE} - S_{BC}$$

$$\ddot{\xi} = \frac{\ddot{x}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot{x} = G_2 + G_3 - \frac{1}{2}\frac{G_3}{g}\ddot{x} - S_{CE} - S_{BC}\quad (4)$$

$$v_C = \dot{\xi} = \overline{CP_v}\,\dot{\varphi} = R\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; \ddot{\xi} = \frac{\ddot{x}}{2} = R\ddot{\varphi}\;(5) \;\Rightarrow\; \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{2R}\;(6)$$

! ЖЕЛИМО СВЕ ДА ИЗРАЗИМО ПРЕКО ЈЕДНЕ КООРДИНАТЕ (СМАЊУЈЕ СЕ БРОЈ ПРОМЕНЉИВИХ)

$$(6)\rightarrow(3) \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}\frac{G_2}{g}\ddot{x} = S_{CE} - S_{BC}\quad (3')$$

$$\frac{G_1}{g}\vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_\mu + \vec{S}_{AB} \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j} \;\Rightarrow$$ ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСЕ ЗА ТЕЛО A

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad \frac{G_1}{g}\ddot{x} = -G_1\sin\alpha - F_\mu + S_{AB} \quad , \quad F_\mu = \mu N_1 \\ y:&\quad 0 = N_1 - G_1\cos\alpha \;\Rightarrow\; N_1 = G_1\cos\alpha \end{aligned}\right\}\; F_\mu = \mu G_1\cos\alpha$$

$$\underline{\underline{\frac{G_1}{g}\ddot{x} = -G_1\sin\alpha - \mu G_1\cos\alpha + S_{AB}\;(7)}}$$

$(+)\ \frac{d\mathcal{L}_{Bz}}{dt} = M^{S}_{Bz} = S_{BC}' \cdot R - S_{AB}' \cdot R \Rightarrow$ ЗАКОН ПРОМЕНЕ МОМ. КОЛ. КР. ЗА НЕПОКРЕТНУ ОСУ Bz

$$\mathcal{L}_{Bz} = J_{Bz}\dot\theta = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{Bz}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\ddot\theta$$

$$\frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\ddot\theta = S_{BC}'\cdot R - S_{AB}'\cdot R \quad /:R \qquad S_{BC}' = S_{BC}, \quad S_{AB}' = S_{AB}$$

$$\dot x = R\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{\dot x}{R} \Rightarrow \ddot\theta = \frac{\ddot x}{R}$$

$(*)\ \frac{G_2}{g}\vec a_B = \vec G_2 + \vec R_B + \vec S_{AB}' + \vec S_{BC}'$

! ЗАТО СЕ НЕ КОРИСТИ ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСЕ ЗА КОТУР (ДИСК) B

$$\underline{\frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot x = S_{BC} - S_{AB}} \quad (8)$$

4 непознате $\Rightarrow \ddot x, S_{AB}, S_{BC}, S_{CE}, S_{CD}$

4 једначине:

$$\left.\begin{aligned}
(3') &\Rightarrow \frac{1}{4}\frac{G_2}{g}\ddot x = S_{CE} - S_{BC}\\
(4) &\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot x = G_2 + G_3 - \frac{1}{2}\frac{G_3}{g}\ddot x - S_{CE} - S_{BC}\\
(7) &\Rightarrow \frac{G_1}{g}\ddot x = -G_1\sin\alpha - \mu G_1\cos\alpha + S_{AB}\\
(8) &\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot x = S_{BC} - S_{AB}
\end{aligned}\right\}$$

РЕШАВАМО СИСТЕМ

$$(7) \Rightarrow S_{AB} = \frac{G_1}{g}\ddot x + G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$(7)\to(8) \Rightarrow S_{BC} = S_{AB} + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot x = \frac{1}{2g}(2G_1 + G_2)\ddot x + G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \quad (9)$$

$$(3') \Rightarrow S_{CE} = S_{BC} + \frac{1}{4}\frac{G_2}{g}\ddot x$$

$$(4) \Rightarrow S_{CE} = G_2 + G_3 - \frac{1}{2}\frac{G_3}{g}\ddot x - S_{BC} - \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot x = G_2 + G_3 - S_{BC} - \frac{1}{2g}(G_2 + G_3)\ddot x$$

из једнакости левих страна следи:

$$S_{BC} + \frac{1}{4}\frac{G_2}{g}\ddot x = G_2 + G_3 - S_{BC} - \frac{1}{2g}(G_2 + G_3)\ddot x$$

$$2S_{BC} = G_2 + G_3 - \frac{3G_2 + 2G_3}{4g}\ddot x \underset{(9)/\cdot 2}{=} \frac{1}{g}(2G_1 + G_2)\ddot x + 2G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\left(\frac{3G_2 + 2G_3}{4g} + \frac{2G_1 + G_2}{g}\right)\ddot x = G_2 + G_3 - 2G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\frac{8G_1 + 7G_2 + 2G_3}{4g}\ddot x = G_2 + G_3 - 2G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\ddot x = 4g\frac{G_2 + G_3 - 2G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{8G_1 + 7G_2 + 2G_3}$$

$$(1) \Rightarrow \underline{a_D = 2g\frac{G_2 + G_3 - 2G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{8G_1 + 7G_2 + 2G_3}}$$

$$(7) \Rightarrow S_{AB} = \frac{G_1}{g}4g\frac{G_2 + G_3 - 2G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{8G_1 + 7G_2 + 2G_3} + G_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

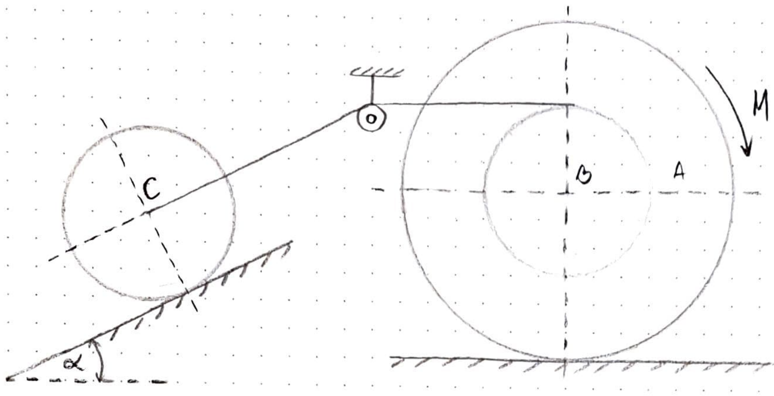
$$\underline{S_{AB} = G_1\frac{4G_2 + 4G_3 + (7G_2 + 2G_3)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{8G_1 + 7G_2 + 2G_3}}$$

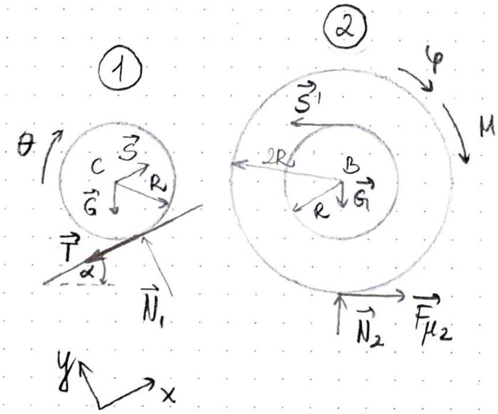
$* \ S_{BC} = S_{AB} + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot x, \quad S_{CE} = S_{AB} + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\ddot x + \frac{1}{4}\frac{G_2}{g}\ddot x$

$S_{AB} \neq S_{BC} \neq S_{CE}$ ЈЕР КОТУРОВИ ИМАЈУ МАСУ !

10.57. Два коаксијална цилиндра, A (полупречника 2R) и B (полупречника R), круто су међусобно спојена. Цилиндар A котрља се по хоризонталној подлози под дејством спрега момента M. Укупна тежина цилиндара A и B је G, а заједнички полупречник инерције за осу симетрије је $i = R\sqrt{2}$. Помоћу ужета које је везано за тачку на обиму цилиндра B доводи се у стање котрљања без клизања точак C, полупречника R и тежине G, чија је маса равномерно распоређена по обиму. Угао нагиба стрме равни по којој се точак C котрља је α. Одредити силу у ужету.

→ ШУПЉИ ЦИЛИНДАР





(2) $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_Q}{dt} + \vec{v}_Q \times \frac{G}{g}\vec{v}_B = \vec{M}_Q^S$ ⇒ ЗАКОН ПРОМЕНЕ МОМЕНТА КОЛ. КР. ЗА ПОКРЕТНИ ПОЛ Q

$Q = Pv_2$ ⇒ ДА СИЛА $\vec{F}_{\mu 2}$ НЕ ПРАВИ МОМЕНТ

$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{Pv_2}}{dt} + \vec{v}_{Pv_2}^{\,0} \times \frac{G}{g}\vec{v}_B = \vec{M}_{Pv_2}^S \,/\cdot\vec{k}$ ⇒ $\frac{d\mathcal{L}_{Pv_2 z}}{dt} = M_{Pv_2 z}^S = M - S'\cdot 3R$, $S = S'$ ⇒ КОТУР НЕМА МАСУ

$\mathcal{L}_{Pv_2 z} = J_{Pv_2 z}\dot{\varphi}$, $J_{Pv_2 z} = J_{Bz} + \frac{G}{g}(2R)^2 = \frac{G}{g}i_0^2 + \frac{G}{g}\cdot 4R^2 = 2\frac{G}{g}R^2 + 4\frac{G}{g}R^2 = 6\frac{G}{g}R^2$

$\mathcal{L}_{Pv_2 z} = 6\frac{G}{g}R^2\dot{\varphi}$ ⇒ $\frac{d\mathcal{L}_{Pv_2 z}}{dt} = 6\frac{G}{g}R^2\ddot{\varphi}$

$6\frac{G}{g}R^2\ddot{\varphi} = M - 3SR$ (1)

(1) ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСЕ

$\frac{G}{g}\vec{a}_C = \vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{S} + \vec{T} \,/\cdot\vec{i}\,/\cdot\vec{j}$

x: $\frac{G}{g}\ddot{x}_C = S - G\sin\alpha - T$ (2)

y: $0 = N_1 - G\cos\alpha$ ⇒ НЕПОТРЕБНО

$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_Q}{dt} + \vec{v}_Q \times \frac{G}{g}\vec{v}_C = \vec{M}_Q^S$, $Q \equiv C$

$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_C}{dt} + \cancel{\vec{v}_C \times \frac{G}{g}\vec{v}_C}^{\,0} = \vec{M}_C^S \,/\cdot\vec{k}$ ⇒ $\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^S = T\cdot R$

$\mathcal{L}_{Cz} = J_{Cz}\dot{\theta} = \frac{G}{g}R^2\dot{\theta}$ ⇒ $\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = \frac{G}{g}R^2\ddot{\theta}$

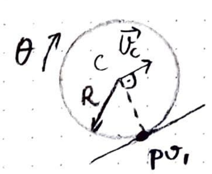
$\frac{G}{g}R^2\ddot{\theta} = T\cdot R$ (3)

(1), (2), (3) ⇒ 3 једначине са 3 непознате

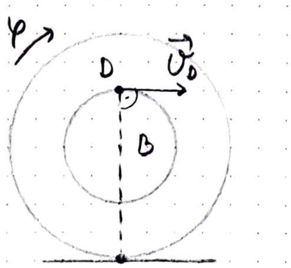
јер постоји веза између $\ddot{x}_C, \ddot{\varphi}, \ddot{\theta}$

⇒ $v_D = v_C$ ⇒ $\dot{x}_C = R\dot{\theta} = 3R\dot{\varphi} \,/\frac{d}{dt}$

$\ddot{x}_C = R\ddot{\theta} = 3R\ddot{\varphi}$ (4)



$v_C = \dot{x}_C = \overline{CPv_1}\,\dot{\theta} = R\dot{\theta}$



Pv_2

$v_D = \overline{DPv_2}\,\dot{\varphi} = 3R\dot{\varphi}$

$v_D = v_C$ ⇒ ЗА НЕИСТЕГЉИВО УЖЕ

(2) ⇒ $3\frac{G}{g}R\ddot{\varphi} = S - G\sin\alpha - T$ (2')

(3) ⇒ $3\frac{G}{g}R\ddot{\varphi} = T$ (3')

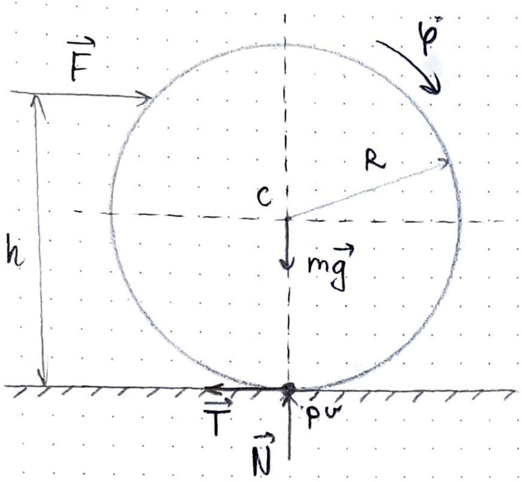
(1), (2'), (3') ⇒ 3 ј-чине са 3 непознате!

$$S = \frac{M + GR\sin\alpha}{4R}$$

* У ЗБИРЦИ ЈЕ КОРИШЋЕН ЗАКОН ПРОМЕНЕ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ

10.18. На ком растојању h од хоризонталне равни треба деловати силом F, константног интензитета и хоризонталног правца, на хомогени диск масе m и полупречника R да би се диск котрљао без клизања по глаткој хоризонталној равни.

$\rightarrow \vec{T} = 0$



$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} \;/ \cdot \vec{i} \;/ \cdot \vec{j}$$

$$x: \quad m\ddot{x}_C = F - T \quad (1)$$

$$y: \quad 0 = N - mg$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{P_v}}{dt} + \cancel{\vec{v}_{P_v}}^{\,0} \times m\vec{v}_C = \vec{M}^{\,s}_{P_v} \;/ \cdot \vec{k}$$

$$\circlearrowleft + \quad \frac{d\mathcal{L}_{P_{v_z}}}{dt} = M^{s}_{P_{v_z}} = Fh$$

$$\mathcal{L}_{P_{v_z}} = J_{P_{v_z}} \dot{\varphi} = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\dot{\varphi} = \frac{3}{2}mR^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{P_{v_z}}}{dt} = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = Fh \quad (2)$$

$$\dot{x}_C = R\dot{\varphi} \;/ \frac{d}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_C = R\ddot{\varphi} \rightarrow (1)$$

$$mR\ddot{\varphi} = F - \cancel{T}^{\,0} \quad (3) \qquad T = 0$$

$$(2),(3) \Rightarrow \frac{3}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\cancel{\ddot{\varphi}} = \cancel{mR\ddot{\varphi}} \cdot h$$

$$\underline{h = \frac{3}{2}R}$$