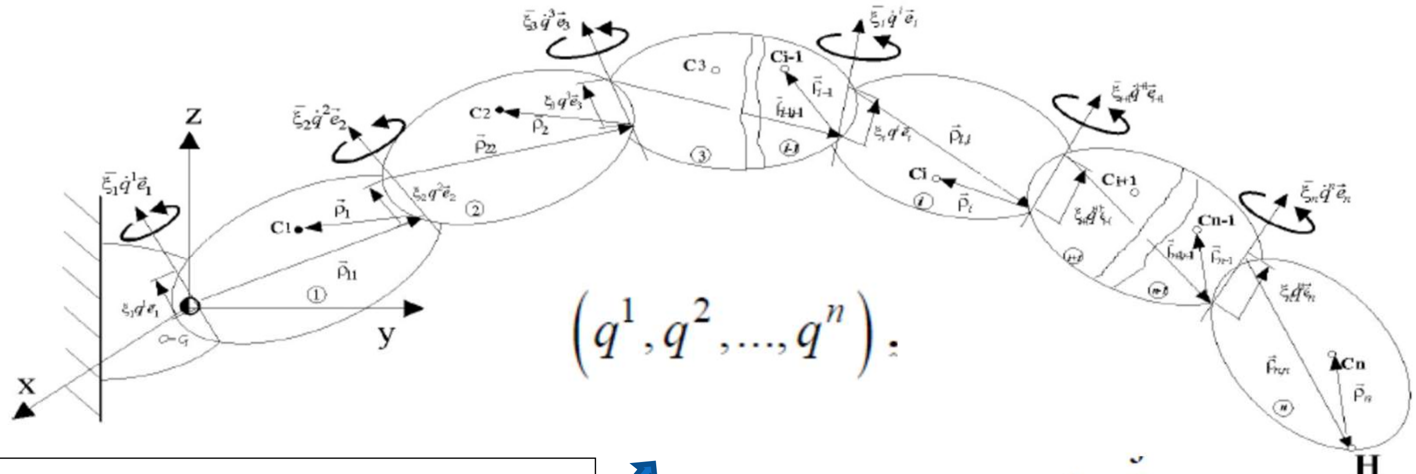
Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Јакобијан матрице трансформација у механици робота

Проф. Михаило Лазаревић,

Машински факултет,Универзитет у Београду

Спољашње и унутрашње координате роботског система



$$\left(q^1, q^2, \ldots, q^n\right).$$

$$\bar{q}^1, \bar{q}^2, \ldots, \bar{q}^m$$

$$m < 6.$$

- унутрашње координате роботског система n

- Редундантан -„сувишан“

- Редундантност роботског система

$$n > 6 \quad (7 > 6ss)$$

$$n > m \quad (5 > 4)$$

$$n = m, \;\; m > m_z$$

m_z
- број сс у односу на манипул. задатак

- спољашње координате роботског система

$$m\left(m_{max} = 6\right)$$

- нередундантан роботски систем и сва разматрања у оквиру овог курса се односе на ову врсту РС

$$\boxed{n = m, \;\; m = m_z}$$

Јакобијан матрица трансформације унутрашњих у спољашње координате роботског система

- **Базни случај за H**

- Посебно разматрамо тзв. базни случај (за позиционирање се узимају Дек. коор. $H(x_H, y_H, z_H)$ док за оријентацију Ојлерови углови $,(\psi,\theta,\varphi)$

$$x_H = \bar{q}^1,\quad y_H = \bar{q}^2,\quad z_H = \bar{q}^3,\quad \bar{q}^4 = \psi,\quad \bar{q}^5 = \theta,\quad \bar{q}^6 = \varphi.$$

$$\dot{\bar{q}}^1 = \dot{x}_H,\quad \dot{\bar{q}}^2 = \dot{y}_H,\quad \dot{\bar{q}}^3 = \dot{z}_H,\quad \dot{\bar{q}}^4 = \dot{\psi},\quad \dot{\bar{q}}^5 = \dot{\theta},\quad \bar{q}^6 = \dot{\varphi}$$

$$(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3, \bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6)$$

- **Општи случај за H**

- Тада се за позиционирање врха хватаљке X узимају неке друге координате на пример поларно- цилиндричне координате, док за оријентацију могу бити Хамилтон-Родригови параметри или неки други

$$x_H = x_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right),\qquad \psi = \psi\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right),$$

$$y_H = y_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right),\qquad \theta = \theta\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right),$$

$$z_H = z_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right),\qquad \varphi = \varphi\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right).$$

- **Кинематички модел роботског система**

$$\overline{q}^{a} = \overline{q}^{a}\left(q^{1}, q^{2}, \ldots, q^{n}\right), \quad a = 1, 2, \ldots, m,\ m \leq 6,$$

- **Директан кинематички задатак-ДКЗ решавање**

$$\overline{q}^{a} = \overline{q}^{a}\left(q^{1}, q^{2}, \ldots, q^{n}\right), \quad a = 1, 2, \ldots, m,\ m \leq 6,$$

- За познате унутрашње координате одредити спољашње координате тј координате Н ,ДКЗ увек решив!

- **Инверзан кинематички задатак- ИКЗ решавање**

$$q^{i}(t) = f^{i}(\overline{q}^{1}, \overline{q}^{2}, \overline{q}^{3}, \overline{q}^{4}, \overline{q}^{5}, \overline{q}^{6}), \quad i = 1, 2, ,\ldots n$$

- За познате спољашње координате $\overline{q}^{\alpha}$ одредити унутрашње координате $\left(q^{1}, q^{2}, \ldots, q^{n}\right)$ задатак није увек једнозначно решив!

Формирање кинематичког модела РС на „нивоу брзина“

$$\overline{q}^a = \overline{q}^a\left(q^1, q^2, \ldots, q^n\right), \quad a = 1, 2, \ldots, m,\ m \le 6,$$

- Ако се диференцира по времену претходни израз добија се:

$$\dot{\overline{q}}^a = \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ldots, n, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\{\dot{\overline{q}}\} = [J]\{\dot{q}\}},$$

- **Јакобијин матрица трансформације [J]**

где су

$$\{\dot{\overline{q}}\} \in R^{m\times 1} \rightarrow \{\dot{\overline{q}}\}^T = \left(\dot{\overline{q}}^1 \vdots \dot{\overline{q}}^2 \vdots \ldots \vdots \dot{\overline{q}}^m\right),$$

$$] \in R^{m\times n} \rightarrow [J] = \left[\frac{\partial \varphi^a}{\partial q^\alpha}\right].$$

$$\begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\overline{q}}^1 \\ \dot{\overline{q}}^2 \\ \dot{\overline{q}}^3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\overline{q}}^4 \\ \dot{\overline{q}}^5 \\ \dot{\overline{q}}^6 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1] \\ [J_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix},$$

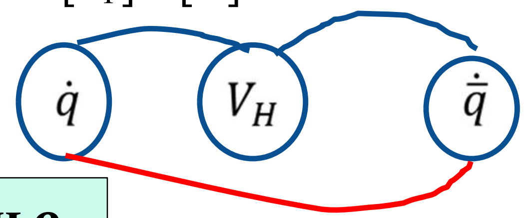
$$\begin{Bmatrix} \dot{\overline{q}}^1 \\ \dot{\overline{q}}^2 \\ \dot{\overline{q}}^3 \end{Bmatrix} = [J_1] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\overline{q}}^4 \\ \dot{\overline{q}}^5 \\ \dot{\overline{q}}^6 \end{Bmatrix} = [J_2] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix}.$$

где је Јак. матрица [J1] која одговара случају позиционирања ’-прве 3 координате и [J2] одговара случају оријентације

- **Одређивање [J1]**

$$[J_1]=[B]$$



Базни случај -позиционирање

$$\vec{v}_H=\sum_{\alpha=1}^{n}\vec{\Im}_{\alpha(n)}\dot{q}^{\alpha},\quad [B]=\left[\begin{Bmatrix}\vec{\Im}_{1(n)}\cdot\vec{i}\\ \vec{\Im}_{1(n)}\cdot\vec{j}\\ \vec{\Im}_{1(n)}\cdot\vec{k}\end{Bmatrix}\vdots\begin{Bmatrix}\vec{\Im}_{2(n)}\cdot\vec{i}\\ \vec{\Im}_{2(n)}\cdot\vec{j}\\ \vec{\Im}_{2(n)}\cdot\vec{k}\end{Bmatrix}\vdots\ldots\vdots\begin{Bmatrix}\vec{\Im}_{n(n)}\cdot\vec{i}\\ \vec{\Im}_{n(n)}\cdot\vec{j}\\ \vec{\Im}_{n(n)}\cdot\vec{k}\end{Bmatrix}\right],$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_H\\ \dot{y}_H\\ \dot{z}_H\end{Bmatrix}=[B]\{\dot{q}\},\quad \boxed{(*)}$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{\bar{q}}^1\\ \dot{\bar{q}}^2\\ \dot{\bar{q}}^3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{x}_H\\ \dot{y}_H\\ \dot{z}_H\end{Bmatrix}=[J_1]\{\dot{q}\}\quad (**)$$

$$[J_1]\{\dot{q}\}=[B]\{\dot{q}\}\quad (**)$$

$$[J_1]=[B]$$

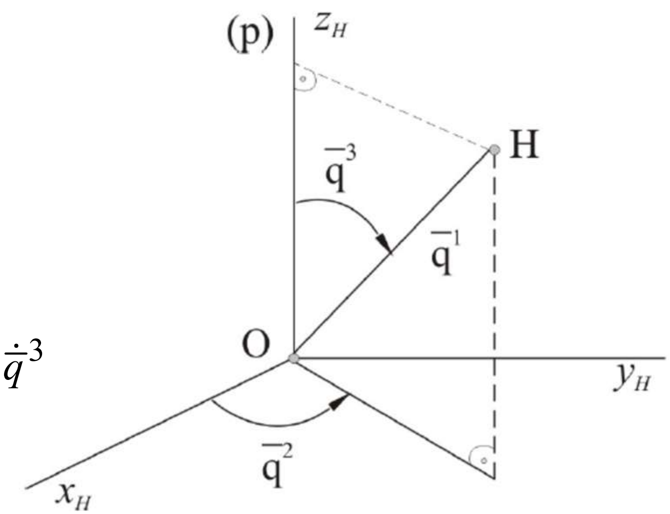
- Решава се прво базни случај. Процедура одређивања [J1] се спроводи **на посредан начин** (плава линија види слику а не на директан начин црвена линија.Прво се решава БАЗНИ случај а онда веза одређује између $V_H \leftrightarrow \dot{\bar{q}}$
- <u>Решава се базни случај</u>:
- Прво се успоставља веза између брзине врха хватаљке Vh и генералисаних брзина $\{\dot{q}\}$ израз (*); са друге стране на основу дефиниције [J1] матрице добија се (**)

Општи случај -позиционирање

Primer 1. *Odrediti Jakobijevu matricu* $[J_1]$ *koja se odnosi na pozicioniranje vrha H robotske hvataljke u slučaju da su spoljašnje koordinate polarno-cilindrične.*

$$x_H = x_H\left(\bar{q}^1,\bar{q}^2,\bar{q}^3\right),$$
$$y_H = y_H\left(\bar{q}^1,\bar{q}^2,\bar{q}^3\right),$$
$$z_H = z_H\left(\bar{q}^1,\bar{q}^2,\bar{q}^3\right),$$

$$x_H = \bar{q}^1 \cos\bar{q}^2,$$
$$y_H = \bar{q}^1 \sin\bar{q}^2,$$
$$z_H = \bar{q}^3.$$



$$\vec{V}_H = \frac{d\vec{r}_H}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_H}{\partial\bar{q}^1}\dot{\bar{q}}^1 + \frac{\partial\vec{r}_H}{\partial\bar{q}^2}\dot{\bar{q}}^2 + \frac{\partial\vec{r}_H}{\partial\bar{q}^3}\dot{\bar{q}}^3 = \vec{l}_1\dot{\bar{q}}^1 + \vec{l}_2\dot{\bar{q}}^2 + \vec{l}_3\dot{\bar{q}}^3$$

Ламеови коефицијенти [L]

$$\left\{\vec{V}_H^{(0)}\right\} = [L]\left\{\dot{\bar{q}}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = [L]\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix},$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_H}{\partial\bar{q}^1} & \frac{\partial x_H}{\partial\bar{q}^2} & \frac{\partial x_H}{\partial\bar{q}^3} \\ \frac{\partial y_H}{\partial\bar{q}^1} & \frac{\partial y_H}{\partial\bar{q}^2} & \frac{\partial y_H}{\partial\bar{q}^3} \\ \frac{\partial z_H}{\partial\bar{q}^1} & \frac{\partial y_H}{\partial\bar{q}^2} & \frac{\partial z_H}{\partial\bar{q}^3} \end{bmatrix},$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\bar{q}^2 & -\bar{q}^1\sin\bar{q}^2 & 0 \\ \sin\bar{q}^2 & \bar{q}^1\cos\bar{q}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det[L] = \bar{q}^1.$$

$$\bar{q}^1 = \rho \neq 0$$

Сингуларитет z osa

Општи случај – одређивање [J1]

$$[L]\{\dot{\bar{q}}\} = \{V_H\} = [B]\{\dot{q}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} = [L]^{-1}[B]\{\dot{q}\},$$

$$\boxed{[J_1] = [L]^{-1}[B].}$$

Применом нумеричке интеграције могуће је одредити сада везу између спољашњих и унутрашњих координата пр.

Њутнове интерполационе методе

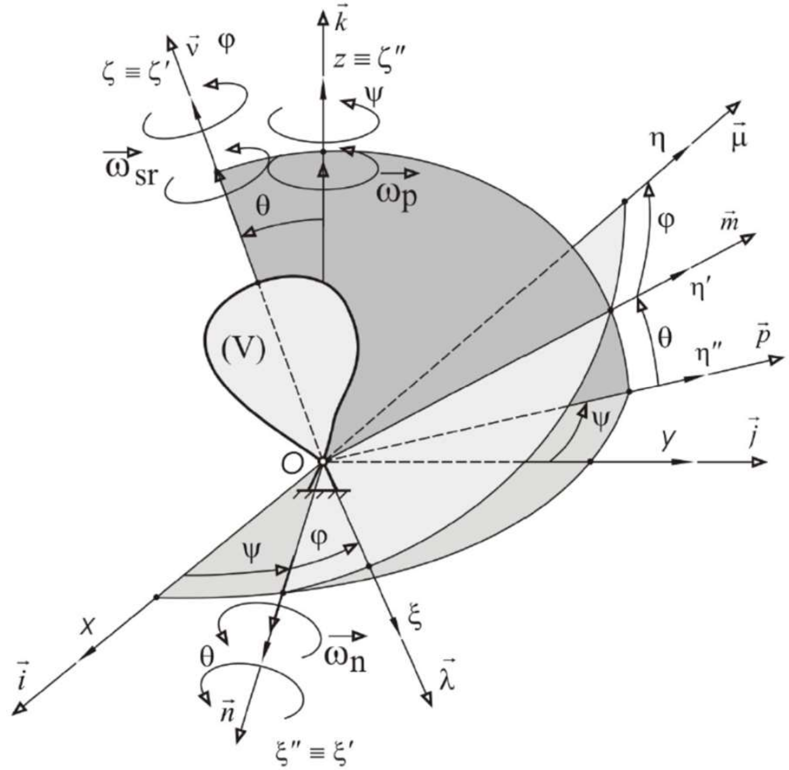
$$\begin{Bmatrix} \bar{q}^1 \\ \bar{q}^2 \\ \bar{q}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1(q) \\ \varphi_2(q) \\ \varphi_3(q) \end{Bmatrix}$$

Други део Јакобијана- базни случај $\left[J_2\right]$

$\bar{q}^4 = \psi,$

$\bar{q}^5 = \theta,$

$\bar{q}^6 = \varphi.$



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_{sr} =$$

$$= \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{\nu}$$

$$\left\{\omega^{(0)}\right\} = \left[\left\{k^{(0)}\right\} \vdots \ \left\{n^{(0)}\right\} \vdots \ \left\{\nu^{(0)}\right\}\right] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} =$$

$$= \left[K_0\right] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\omega^{(0)}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}\cdot\vec{i} \\ \vec{\omega}\cdot\vec{j} \\ \vec{\omega}\cdot\vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{i} + \dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{i} \\ \dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{j} + \dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{j} \\ \dot{\psi}\vec{k}\cdot\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n}\cdot\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{Bmatrix} =$$

$$\vec{v} = \cos\theta \cdot \vec{k} - \sin\theta \cdot \vec{p} = \cos\theta \cdot \vec{k} - \sin\theta \cdot \left(\cos\psi \, \vec{j} - \sin\psi \, \vec{i}\right) = \sin\theta \sin\psi \, \vec{i} - \sin\theta \cos\psi \, \vec{j} + \cos\theta \cdot \vec{k}$$

$$\vec{p} = \cos\psi \, \vec{j} - \sin\psi \, \vec{i}$$

$$\vec{n} = \cos\psi \, \vec{i} + \sin\psi \, \vec{j} + 0\vec{k}$$

- Видети слику

$$\left\{k^{(0)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \left\{\vec{n}^{(0)}\right\} = \begin{Bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{Bmatrix}, \left\{\vec{v}^{(0)}\right\} = \begin{Bmatrix} \sin\psi \sin\theta \\ -\cos\psi \sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \left[K_0\right] = \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & \sin\psi \sin\theta \\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi \sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$\det\left[K_0\right] = -\sin\theta \neq 0 \rightarrow \theta \neq k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Сингуларитет за $\longrightarrow \theta = \kappa\pi$

Дефинишемо област где је (Ω) $\quad \det\left[K_0\right] \neq -\sin\theta \neq 0 \rightarrow \exists \left[K_0\right]^{-1}$

Са друге стране добили смо израз за угаону брзину $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \sum_{\kappa=1}^{n} \bar{\xi}_k \vec{e}_k \dot{q}^k \rightarrow \left\{\omega^{(0)}\right\} = [E]\{\dot{q}\}$$

$$[K_0] \in R^{3\times 3},\ [K_0] = \left[\{\vec{k}^{(0)}\} \vdots \{\vec{n}^{(0)}\} \vdots \{\vec{\nu}^{(0)}\}\right],$$

$$\rightarrow [K_0] = \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & \sin\psi \sin\theta \\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi \sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$[E] \in R^{3\times n},\ [E] = \left[\bar{\xi}_1 \{\vec{e}_1^{(0)}\} \vdots \bar{\xi}_2 \{\vec{e}_2^{(0)}\} \vdots \ldots \vdots \bar{\xi}_n \{\vec{e}_n^{(0)}\}\right].,$$

Изједначавањем израза за угаону брзину $\vec{\omega}$ следи да је

$$[K_0] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [E]\{\dot{q}\},$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [K_0]^{-1}[E]\{\dot{q}\}$$

$$\Rightarrow [J_2] = [K_0]^{-1}[E].$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^4 \\ \dot{\bar{q}}^5 \\ \dot{\bar{q}}^6 \end{Bmatrix} = [J_2] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix}.}$$

Општи случај

$$\bar{q}^4 = \bar{q}^4(\psi,\theta,\varphi),\quad \bar{q}^5 = \bar{q}^5(\psi,\theta,\varphi),\quad \bar{q}^6 = \bar{q}^6(\psi,\theta,\varphi).$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^4 \\ \dot{\bar{q}}^5 \\ \dot{\bar{q}}^6 \end{Bmatrix} = [M]\begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix},$$

$$[M]\in R^{3\times 3},[M]=\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{q}^4}{\partial\psi} & \frac{\partial \bar{q}^4}{\partial\theta} & \frac{\partial \bar{q}^4}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial \bar{q}^5}{\partial\psi} & \frac{\partial \bar{q}^5}{\partial\theta} & \frac{\partial \bar{q}^5}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial \bar{q}^6}{\partial\psi} & \frac{\partial \bar{q}^6}{\partial\theta} & \frac{\partial \bar{q}^6}{\partial\varphi} \end{bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^4 \\ \dot{\bar{q}}^5 \\ \dot{\bar{q}}^6 \end{Bmatrix} = [M][K_0]^{-1}[E]\{\dot{q}\}.$$

$$[J_2]=[M][K_0]^{-1}[E].$$

Primer 3. *Data je veza između Hamilton-Rodrigovih parametara* $\lambda_1=\bar{q}^4,\lambda_2=\bar{q}^5,\lambda_3=\bar{q}^6$ *i Ojlerovih uglova* (vidi (3.144))

$$\bar{q}^4 = sin\frac{\theta}{2}cos\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\bar{q}^5 = sin\frac{\theta}{2}sin\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\bar{q}^6 = cos\frac{\theta}{2}sin\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

$$[M]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) \\ s\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & -s\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) \\ c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & -s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix}.$$