Kinematika poslednjeg robotskog segmenta

Razmotrimo robotski sistem u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja sa $n(n \le 6)$ segmenata $(V_{(1)}, V_{(2)}, ..., V_{(6)})$ i kinematičkim parovima V klase. Očigledno, broj stepeni slobode kretanja ovakvog sistema jednak je broju segmenata. Vrh **H** robotske hvataljke pripada poslednjem *n*-tom segmentu. Postavlja se pitanje da li u slučaju $n = 6$ poslednji robotski segment može da se nađe u konfiguraciji koja je unutar zadata. Specijalno, postavlja se pitanje da li vrh **H** robotske hvataljke može da se nađe u tački $H(x_H, y_H, z_H)$ neke trodimenzionalne oblasti $E_3\,(H \in E_3)$**,** pri čemu su Dekartove koordinate x_H, y_H, z_H proizvoljno odabrane, i da se pri tome orijentacija segmenta $V_{(6)}$ poklapa sa unapred zadatim koju određuju proizvoljno odabrani Ojlerovi uglovi ψ, θ, φ iz neke trodimenzionalne oblasti $R_3\left((\psi, \theta, \varphi) \in R_3\right)$. Odgovor na ovo pitanje u opštem slučaju je negativan.Za potvrdu ovoga dovoljno je da se razmotri slučaj robotskog sistema sa 6 segmenata pri čemu svaki od njih u relativnom kretanju u odnosu na susedni vreše obrtanja oko osa koju su međusobno paralelne. U ovom slučaju tačka **H** može da zauzme proizvoljan položaj u oblasti E_2 koja se nalazi u ravni $z_H = const$. Takodje, segment $V_{(6)}$ može da se nađe u konfiguraciji kojo odgovara proizvoljna vrednost ugla sopstvene rotacije φ a uglovi precesije i nutacije (ψ, θ) su konstantni. Očigledno, za ostvarenje ovakvih pozicioniranja $(x_H, y_H, z_H = const)$ i orijentacije $(\psi = const, \theta = const, \varphi)$ razmatrani robotski segment ili tri segmenta više nego što je to potrebno. Razmotrimo na dalje slučaj robotskog sistema sa šest segmenata u kome prvi segment može da vrši translaciju duž *Ox* ose, drugi segment u relativnom kretanju u odnosu na prvi- translaciju duž ose paralelne *Oy* osi i treći segment u relativnom kretanju u odnosu na drugi- translaciju duž ose paralelne *Oz* osi. Ostala tri segmenta neka čine deo kinematičkog lanca koji nastaje dekompozicijom sfernog zgloba u tri nezavisne relativne rotacije (obrtanje oko osa vezanih za segmente $(V_{(3)}, V_{(4)},$ i $V_{(5)})$.U ovom slučaju, očigledno, poslednji segment $V_{(6)}$ može da se nađe u proizvoljno zadatoj konfiguraciji unutar radnog prostora.Ovo vodi zaključku da $V_{(6)}$ može da se nađe u bilo kojoj poziciji (x_H, y_H, z_H) i orijentaciji (ψ, θ, φ) unutar radnog prostora kako da je u pitanju slobodno (opšte) kretanje toga segmenta. Otuda proizilazi da je ovako kretanje robotski sistem nema ni manje ni više segmenata od potrebnog broja $(n = 6)$. U slučaju sistema sa pet segmenata pozicioniranje i orijentacija poslednjeg robotskog segmenta koima bi se u opštem slučaju ostvarile unapred zadate koordinate $(x_H, y_H, z_H, \psi, \theta, \varphi)$.Ovi primeri u kojima se analizira odnos broja sistema slobode kretanja ($n-$poklapa se sa brojem segmenata robotskog sistema) u tesnoj su vezi sa pojmom redundantnosti robotskih sistema.Izložimo pojam redundantnosti onako kako je dat u (Lazarevic).Ako sa n označimo broj stepeni slobode kretanja robotskog sistema, sa $m(m_{max} = 6)$ broj stepeni slobode kretanja poslednjeg robotskog segmenta (ostali segmenti realizuju veze koje ograničavaju kretanje poslednjeg segmenta), tada je robotski sistem neredundantan ako je $m = n$ za sve moguće njegove konfiguracije. Ako je, međutim, $n > 6$ robotski sistem je redundantan.Takođe, robotski sistem je redundantan za $n > m$.

Ako se sa m_z označi broj stepeni slobode kretanja poslednjeg robotskog segmenta, koji je potreban za izvršenje manipulacionog zadatka tada je robotski sistem redundantan u pogledu izvršenja manipulacinog zadatka ako važi $m > m_z$. Ovo se odnosi i na slučaj kada je $m = n$. Dakle, redundantnost u slučaju izvršenja manipulacionog zadatka postoji u nekim slučajevima i kada je robotski sistem redundantan.

U slučaju ranije pomenutog robotskog sistema sa šest segmenata koj vrše relativno obrtanje (prvi od svih- apsolutno) oko paralelnih osa sledi da je $n = 6, m = 3$ i robotski sistem je redundantan.Ako uklonimo tri segmenta $n = 3$ robotski sistem je neredundantan. U ovom slučaju ako se manipulacioni zadatak odnosi samo na pozicioniranje (ugao sopstvene rotacije može biti proizvoljan) sledi da je $m_z = 2$ pa je robotski sistem redundantan u odnosu na manipulacioni zadatak jer je $m > m_z$. U drugom razmatranom slučaju robotskog sistema (tri translacije i tri rotacije sfernog zgloba dekompovanog u tri rotacije oko osa) sledi: $m = 6, n = 6$ pa je robotski sistem neredundatan. Ako je manipulacioni zadatak takav da je potrebno ostvariti potpuno pozicioniranje i orijentaciju u pogledu zadatog ugla precesije i nutacije (na primer – uvrtanje zavrtnja u navrtku čiji položaj je unapred zadat (sopstvena rotacija oko ose navrtke je bez značaja za orijentaciju) tada je $m_z = 5$ pa je s obzirom na manipulacioni zadatak robotski sistem redundantan iako je $m = n$ (neredundantan robotski sistem).

Razmotrimo slučaj kada poslednji robotski segment ima $m = m_{max} = 6$ stepeni slobode kretanja.U tom slučaju u njegovu konfiguraciju moguće je odrediti (bazni slučaj) sa tri Dekartove koordinate vrha robotske hvataljke $H(x_H, y_H, z_H)$ i tri Ojlerova ugla koji odrežuju orijentaciju $V_{(n)}, (\psi, \theta, \varphi)$, ili opštije:

$$H = H\left(\overline{q}^1, \overline{q}^2, \overline{q}^3\right), \; V_n = V_n\left(\overline{q}^4, \overline{q}^5, \overline{q}^6\right), \tag{4.200}$$

što sledi nakon regularnih transformacija spoljašnjih koordinata:

$$x_H = x_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right),$$
$$y_H = y_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right), \tag{4.201}$$
$$z_H = z_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right).$$

$$\psi = \psi\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right),$$
$$\theta = \theta\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right), \tag{4.202}$$
$$\varphi = \varphi\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right).$$

4.10 Direktni kinematički zadatak

Rešenje

$$\bar{q}^\alpha = \bar{q}^\alpha\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \quad \alpha = 1,2,...,m,\ m_{max} = 6 \tag{4.203}$$

kojim se uspostavlja veza izmedju spoljašnjih $\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, ..., \bar{q}^m\right)$ i unutrašnjih koordinata $\left(q^1, q^2, ..., q^n\right)$ naziva se *direktnim kinematičkim zadatkom* robotskog sistema. Rešenjem ovoga zadatka uspostavlja se u proizvoljnoj konfiguraciji robotskog sistema veza između relativnih pomeranja segmenata robotskog sistema i položaja vrha robotske hvataljke, kao i orijentacije poslednjeg robotskog segmenta, što je ključni element svakog manipulacionog zadatka. Direktan kinematički zadatak rešićemo najpre za slučaj pozicioniranja robotske hvataljke. Bazni slučaj obog zadatka odnosi se na definisanje polođaja vrha robotske hvataljke, primenom Dekartovih pravouglih koordinata. Rešenje ovog slučaja imaće, dakle, sledeću formu:

$$x_H = x_H\left(q^1, q^2, ..., q^n\right),$$
$$y_H = y_H\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \tag{4.204}$$
$$z_H = z_H\left(q^1, q^2, ..., q^n\right).$$

Do rešenja (4.204) dolazi se sledećim razmatranjem.Vektor položaja vrha robotske hvataljke H , sl.4.1, dat je u sledećem obliku:

$$\vec{r}_H = \overline{OH} \rightarrow \vec{r}_H = \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) \tag{4.205}$$

odakle sledi izraz u matričnoj formi:

$$\left\{\vec{r}_H^{(0)}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left[A_{o,k}\right]\left(\left\{\vec{\rho}_{kk}^{(k)}\right\} + \xi_k\left\{\vec{e}_k^{(k)}\right\}q^k\right) \tag{4.206}$$

gde je $\left\{\vec{r}_H^{(0)}\right\} = \left(x_H \quad y_H \quad z_H\right)^T$

odnosno

$$\begin{aligned}
x_H &= \sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_{11}^k\left(\rho_{kk1} + \xi_k e_{k1}q^k\right) + \alpha_{12}^k\left(\rho_{kk2} + \xi_k e_{k2}q^k\right) + \alpha_{13}^k\left(\rho_{kk3} + \xi_k e_{k3}q^k\right)\right] \\
y_H &= \sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_{21}^k\left(\rho_{kk1} + \xi_k e_{k1}q^k\right) + \alpha_{22}^k\left(\rho_{kk2} + \xi_k e_{k2}q^k\right) + \alpha_{23}^k\left(\rho_{kk3} + \xi_k e_{k3}q^k\right)\right] \\
z_H &= \sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_{31}^k\left(\rho_{kk1} + \xi_k e_{k1}q^k\right) + \alpha_{32}^k\left(\rho_{kk2} + \xi_k e_{k2}q^k\right) + \alpha_{33}^k\left(\rho_{kk3} + \xi_k e_{k3}q^k\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.207}$$

U poslednjim izrazima uzete su u obzir sledeće relacije:

$$\left\{\vec{\rho}_{kk}^{(k)}\right\} = \left(\rho_{kk1} \quad \rho_{kk2} \quad \rho_{kk3}\right)^T, \quad \left\{\vec{e}_k^{(k)}\right\} = \left(e_{k1} \quad e_{k2} \quad e_{k3}\right)^T$$

$$\left[A_{0,k}\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^k & \alpha_{12}^k & \alpha_{13}^k \\ \alpha_{21}^k & \alpha_{22}^k & \alpha_{23}^k \\ \alpha_{31}^k & \alpha_{32}^k & \alpha_{33}^k \end{bmatrix} \tag{4.208}$$

Uzimajući u obzir da važi:

$$\alpha_{ij}^k = \alpha_{ij}\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \quad i, j = 1,2,3; \quad k = 1,2,...,n \tag{4.209}$$

relacije (4.207) mogu da se napišu u obliku:

$$\begin{aligned}
x_H &= x_H\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \\
y_H &= y_H\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \\
z_H &= z_H\left(q^1, q^2, ..., q^n\right).
\end{aligned} \tag{4.210}$$

koji predstavlja rešenje direktnog kinematičkog zadatka u baznom slučaju za slučaj pozicioniranja. U opštem slučaju polazi se od transformacije (4.91) regularne u trodimenzionoj oblasti (Ω_o) koordinate x_H, y_H, z_H (a takođe – u trodimenzionoj oblasti (Ω_o') koordinata $\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3$), koja s obzirom na (4.210) i (4.96) dovodi do rešenja direktnog kinematičkog zadatka u opštem slučaju za slučaj pozicioniranja:

$$\begin{aligned}
\bar{q}^1 &= \bar{q}^1\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \\
\bar{q}^2 &= \bar{q}^2\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \\
\bar{q}^3 &= \bar{q}^3\left(q^1, q^2, ..., q^n\right).
\end{aligned} \tag{4.211}$$

Oblast (S) (odnosno (S`)) u kojoj je transformacija (4.91) (odnosno (4.96)) singularna predstavlja oblast singulariteta i u slučaju rešavanja direktnog kinematičkog zadatka za slučaj pozicioniranja. O odredjivanju (S) i (S`) sve je rečeno u prethodnom poglavlju.

Primer 1. Rešiti direktni kinematički zadatak koji se odnosi na pozicioniranje u slučaju da su spoljašnje koordinate polarno-cilindrične (vidi *primer 1* u prethodnom poglavlju).

Rešenje: Transformacija (4.96) u razmatranom slučaju ima oblik (4.121) i regularna je u trodimenzionalnoj oblasti koordinata x_H, y_H, z_H iz koje je isključena prava (4.123).Ta oblast je $\left(\Omega_o'\right)$ i u njoj direktan kinematički zadatak za slučaj pozicioniranja ima sledeće rešenje (vidi (4.121) i rešenje direktnog kinematičkog zadatka u baznom slučaju (4.110)):

$$\begin{aligned}
\bar{q}^1 &= \sqrt{x_H^2(q^1, q^2, ..., q^n) + y_H^2(q^1, q^2, ..., q^n)}, \\
\bar{q}^2 &= arctg\left(\frac{y_H(q^1, q^2, ..., q^n)}{x_H(q^1, q^2, ..., q^n)}\right) + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\
\bar{q}^3 &= z_H\left(q^1, q^2, ..., q^n\right).
\end{aligned} \tag{4.212}$$

ili

$$\begin{aligned}
\bar{q}^1 &= \bar{q}^1\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \\
\bar{q}^2 &= \bar{q}^2\left(q^1, q^2, ..., q^n\right), \\
\bar{q}^3 &= \bar{q}^3\left(q^1, q^2, ..., q^n\right).
\end{aligned} \tag{4.213}$$

U oblasti (S) u kojoj je transformacija (4.140) singularna ,rešenje ima oblik:

$$\begin{aligned}
\bar{q}^1 &= \bar{q}^1(q^1, q^2, ..., q^n), \\
\bar{q}^2 &= \psi(x_H(q^1, q^2, ..., q^n), y_H(q^1, q^2, ..., q^n), z_H(q^1, q^2, ..., q^n)), \\
\bar{q}^3 &= z_H(q^1, q^2, ..., q^n)
\end{aligned} \tag{4.214}$$

gde je $\psi = \psi\left(x_H, y_H, z_H\right)$ proizvoljna funkcija klase C_1.Konačno, direktni kinematički zadatak za slučaj pozicioniranja u singularnom slučaju dobija oblik

$$\begin{aligned}
&\bar{q}^1 = 0, \\
&\bar{q}^2 = \psi(q^1, q^2, ..., q^n), \\
&\bar{q}^3 = z_H(q^1, q^2, ..., q^n)
\end{aligned} \tag{4.215}$$

Primer 2. Rešiti direktni kinematički zadatak koji se odnosi na pozicioniranje u slučaju da su spoljašnje koordinate sferne

Rešenje: Transformacija (4.96) u razmatranom slučaju ima oblik (4.134).Ona je regularna u trodimenzionalnoj oblasti (Ω_o'). U (Ω_o') direktan kinematički zadatak za slučaj pozicioniranja dobija se kada se u (4.134) uzme u obzir rešenje direktnog kinematičkog zadatka u baznom slučaju :

$$\begin{aligned}
&\bar{q}^1 = \sqrt{x_H^2(q^1, q^2, ..., q^n) + y_H^2(q^1, q^2, ..., q^n) + z_H^2(q^1, q^2, ..., q^n)}, \\
&\bar{q}^2 = arctg\left(\frac{y_H(q^1, q^2, ..., q^n)}{x_H(q^1, q^2, ..., q^n)}\right) + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\
&\bar{q}^3 = arctg\left(\frac{\sqrt{x_H^2(q^1, q^2, ..., q^n) + y_H^2(q^1, q^2, ..., q^n)}}{z_H(q^1, q^2, ..., q^n)}\right) + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned} \tag{4.216}$$

U singularnom slučaju u oblasti (S_1') dobija se:

$$\begin{aligned}
&\bar{q}^1 = \left| z_H(q^1, q^2, ..., q^n) \right|, \\
&\bar{q}^2 = \phi(q^1, q^2, ..., q^n), \\
&\bar{q}^3 = k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,
\end{aligned} \tag{4.217}$$

gde je, kako je već rešeno, ϕ proizvoljna funkcija promenljivih $(q^1, q^2, ..., q^n)$ klase C_1. U singularnom slučaju u oblasti $(S_1')_2$ dobija se:

$$\begin{aligned}
&\bar{q}^1 = 0, \\
&\bar{q}^2 = \phi_1(q^1, q^2, ..., q^n), \\
&\bar{q}^3 = \phi_2(q^1, q^2, ..., q^n).
\end{aligned} \tag{4.218}$$

gde su ϕ_1, ϕ_2 proizvoljne neprekidne funkcije promenljivih $(q^1, q^2, ..., q^n)$ klase C_1.Rešimo nadalje drugi deo direktnog kinematičkog problema koji se odnosi na orijentaciju poslednjeg robotskog segmenta. Najpre rešimo problem u baznom slučaju kada spoljašnje koordinate $\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right)$, predstavljaju Ojlerove uglove . U razmatranom slučaju orijentaciju poslednjeg robotskog segmenta određuju uglovi precesije $(\psi = \bar{q}^4)$,nutacije $(\theta = \bar{q}^5)$ i sopstvene rotacije $(\varphi = \bar{q}^6)$. Matrica transformacije koordinata položaja izraženih u odnosu na lokalni koordinatni sistem $C_n\xi_n\eta_n\zeta_n$ (vezan za poslednji robotski segment- vidi sl**) u koordinate u odnosu na inercijalni koordinatni sistem $Oxyz$ ima oblik (vidi (*¨/)):

$$[A]=\left[\begin{array}{c:c:c} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & s\psi s\theta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{array}\right] \tag{4.219}$$

Prethodna matrica se izražava u funkciji unutrašnnjih koordinata izražava se na poznati način (vidi (*¨/)):

$$[A]=[A]_{0,n}=[A]_1\cdot[A]_2\cdot\ldots[A]_n \tag{4.220}$$

Matrica (4.219) može da se izrazi i u obliku:

$$[A]=\left[\alpha_{ij}(\psi,\theta,\varphi)\right],\ i,j=1,2,3 \tag{4.221}$$

a, takođe, i u obliku (vidi (4.220)):

$$[A]=\left[\beta_{ij}(q^1,q^2,\ldots,q^n)\right],\ i,j=1,2,3 \tag{4.222}$$

Očigledno je da važi:

$$\alpha_{ij}(\bar{q}^4,\bar{q}^5,\bar{q}^6)=\beta_{ij}(q^1,q^2,\ldots,q^n)\quad i,j=1,2,3 \tag{4.223}$$

i ta činjenica služi kao osnov za rešavanje direktnog kinematičkog problema (orijentacija) u baznom slučaju.Naime, iz (4.219) i (4.223) sledi relacije

$$\psi = arctg\left(-\frac{\beta_{13}(q^1,q^2,\ldots,q^n)}{\beta_{23}(q^1,q^2,\ldots,q^n)}\right)+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

$$\theta = arctg\left(\frac{\pm\sqrt{\beta_{13}^2(q^1,q^2,\ldots,q^n)+\beta_{23}^2(q^1,q^2,\ldots,q^n)}}{\beta_{33}(q^1,q^2,\ldots,q^n)}\right)+k_1\pi,\quad k_1=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{\beta_{31}(q^1,q^2,\ldots,q^n)}{\beta_{32}(q^1,q^2,\ldots,q^n)}\right)+k_2\pi,\quad k_2=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{4.224}$$

koje predstavljaju rešenje direktnog kinematičkog problema (orijentacija) u nesingularnom slučaju. Očigledno je da rešenje (4.224) gubi smisao u slučaju kada važi:

$$\theta = k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots, \tag{4.225}$$

što dovodi do relacija

$$\beta_{13}=\beta_{23}=\beta_{31}=\beta_{32}=0\,. \tag{4.226}$$

Slučaj (4.225) je dakle, singularan. U ovom slučaju matrica transformacije $\left[A\right]$ dobija sledeći oblik:

$$\left[A\right]=\left[\begin{array}{c:c:c}\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\left(-1\right)^{k} & -\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\left(-1\right)^{k} & 0\\ \sin\psi\cos\phi+\cos\psi\sin\varphi\left(-1\right)^{k} & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\left(-1\right)^{k} & 0\\ 0 & 0 & \left(-1\right)^{k}\end{array}\right] \tag{4.227}$$

ili

$$\left[A\right]=\left[\begin{array}{c:c:c}\cos\left[\psi+\left(-1\right)^{k}\varphi\right] & \left(-1\right)^{k}\sin\left[\psi+\left(-1\right)^{k}\varphi\right] & 0\\ \sin\left[\psi+\left(-1\right)^{k}\varphi\right] & \left(-1\right)^{k}\cos\left[\psi+\left(-1\right)^{k}\varphi\right] & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \tag{4.228}$$

odakle sledi

$$tg\left[\psi+(-1)^{k}\varphi\right]=\frac{\beta_{21}(q^{1},q^{2},...,q^{n})}{\beta_{11}(q^{1},q^{2},...,q^{n})}, \tag{4.229}$$

što daje rešenje direktnog kinematičkog problema (orijentacija) u baznom singularnom slučaju:

$$\begin{aligned}&\psi=arctg\left(-\frac{\beta_{21}(q^{1},q^{2},...,q^{n})}{\beta_{11}(q^{1},q^{2},...,q^{n})}\right)+k_{1}\pi+\left(-1\right)^{k+1}\phi(q^{1},q^{2},...,q^{n})\\ &\theta=k\pi,\\ &\varphi=\phi(q^{1},q^{2},...,q^{n})\\ &k=0,\pm1,\pm2,...\quad k_{2}=0,\pm1,\pm2,...\end{aligned} \tag{4.230}$$

u poslednjem izrazu $\phi\left(q^{1},q^{2},...,q^{n}\right)$ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija unutrašnjih koordinata.

U opštem slučaju veza između Ojlerovih uglova i generalisanih koordinata $\bar{q}^{4},\bar{q}^{5},\bar{q}^{6}$ koje određuju orijentaciju poslednjeg robotskog segmenta data je transformacijom (4.202).Postupak za određivanje oblasti singularnosti te transformacije i njoj inverzne transformacije izložen je u poglavlju o određivanju jakobijana transformacije u slučaju orijentacije. Oblast singularnosti transformacije (4.202), uključujući oblast određenu relacijom (4.225) određuje ukupnu oblast u kojoj je rešenje direktnog kinematičkog problema singularno. Očigledno je da je ta oblast identična sa oblašću singulariteta u određivanju jakobijana za slučaj orijentacije.