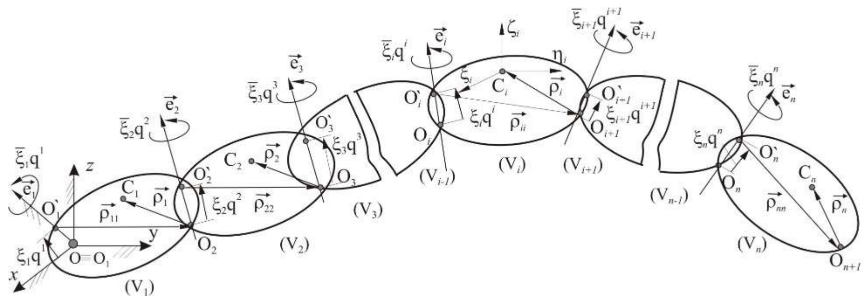
4.9 Jakobijan matrica transformacije unutrašnjih u spoljašnje koordinate robotskog sistema



Langranževe (unutrašnje) koordinate otvorenog kinematičkog lanca (sl. 4.1) koji u slučaju koji ćemo razmatrati predstavlja mehanički model robotskog sistema, u potpunosti odredjuju položaj proizvoljne tačke koja pripada proizvoljnom krutom telu. Takodje, te koordinate u potpunosti odredjuju i orijentaciju pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema, vezanog za proizvoljno kruto telo, u odnosu na inercijalni koordiatni system *Oxyz*. Otuda sledi da se spoljašnje koordinate

$$\left(\bar{q}^1,\bar{q}^2,...,\bar{q}^m\right),\ m\le 6\,, \tag{4.89}$$

mogu izraziti jednoznačno preko unutrašnjih koordinata

$$\left(q^1,q^2,...,q^n\right), \tag{4.90}$$

podsredstvom relacija

$$\bar{q}^a=\varphi^a\left(q^1,q^2,...,q^n\right),\ a=1,2,...,m\,, \tag{4.91}$$

čije odredjivanje predstavlja *direktan kinematički problem* kada se radi o robotskim sistemima. Diferenciranjem po vremenu (4.91) dobija se relacija

$$\dot{\bar{q}}^a=\frac{\partial\varphi^a}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha,\ \alpha=1,2,...,n\,, \tag{4.92}$$

koja u matričnom obliku glasi

$$\left\{\dot{\bar{q}}\right\}=\left[J\right]\left\{\dot{q}\right\}, \tag{4.93}$$

gde je (vidi i (4.43))

$$\left\{\dot{\bar{q}}\right\}\in R^{m\times 1}\to\left\{\dot{\bar{q}}\right\}^T=\left(\dot{\bar{q}}^1\vdots\dot{\bar{q}}^2\vdots...\vdots\dot{\bar{q}}^m\right), \tag{4.94}$$

$$\left[J\right]\in R^{m\times n}\to\left[J\right]=\left[\frac{\partial\varphi^a}{\partial q^\alpha}\right]. \tag{4.95}$$

Matrica (4.95) naziva se Jakobijevom matricom transformacije (4.91). Ova matrica ima poseban značaj u slučaju numeričkog rešavanja inverznog kinematičkog zadatka robotskog sistema (vidi sekciju 5.3 ove knjige). U nastavku razmatranja odredjujemo (4.95) za slučaj $m=6$ (opšti slučaj). Pošto skup koordinata $(\bar{q}^1,\bar{q}^2,\bar{q}^3)$ odredjuje poziciju vrha H robotske hvataljke a skup $(\bar{q}^4,\bar{q}^5,\bar{q}^6)$ orijentaciju hvataljke, razdvojićemo zadatak odredjivanja Jakobijana (4.95) na dva dela u skladu sa narednim razmatranjem. Uzimajući u obzir da (4.92) može napisati u formi

$$\begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^4 \\ \dot{\bar{q}}^5 \\ \dot{\bar{q}}^6 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1] \\ [J_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix}, \tag{4.96}$$

gde je

$$[J_1] \in R^{3\times n} \to [J_1] = \left[\frac{\partial \varphi^b}{\partial q^\alpha}\right],\ b = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,...,n\,, \tag{4.97}$$

$$[J_2] \in R^{3\times n} \to [J_2] = \left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial q^\alpha}\right],\ c = 4,5,6;\ \alpha = 1,2,...,n\,, \tag{4.98}$$

zaključujemo da važi:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} = [J_1] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix}, \tag{4.99}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^4 \\ \dot{\bar{q}}^5 \\ \dot{\bar{q}}^6 \end{Bmatrix} = [J_2] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix}. \tag{4.100}$$

4.9.1 Opšte napomene

Vektor položaja vrha H hvataljke može da se izrazi u funkciji koordinata $\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3$. Kako je

$$\vec{r}_H = x_H \vec{i} + y_H \vec{j} + z_H \vec{k}\,, \tag{4.101}$$

gde su x_H, y_H, z_H Dekartove pravougle koordinate tačke H date u odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$, posredstvom transformacije koordinata

$$\begin{aligned} x_H &= x_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right), \\ y_H &= y_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right), \\ z_H &= z_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right), \end{aligned} \tag{4.102}$$

dobija se

$$\vec{r}_H = \vec{r}_H\left(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3\right). \tag{4.103}$$

Pri tome pretpostavlja se da su ispunjeni sledeći uslovi (vidi [9]):

- funkcionalna matrica

$$[L]=\begin{bmatrix} \frac{\partial x_H}{\partial \overline{q}^1} & \frac{\partial x_H}{\partial \overline{q}^2} & \frac{\partial x_H}{\partial \overline{q}^3} \\ \frac{\partial y_H}{\partial \overline{q}^1} & \frac{\partial y_H}{\partial \overline{q}^2} & \frac{\partial y_H}{\partial \overline{q}^3} \\ \frac{\partial z_H}{\partial \overline{q}^1} & \frac{\partial y_H}{\partial \overline{q}^2} & \frac{\partial z_H}{\partial \overline{q}^3} \end{bmatrix}, \tag{4.105}$$

je nesingularna u oblasti (Ω_0'). Pod navedenim uslovima postoji u oblasti (Ω_0) jedan i samo jedan skup jednoznačnih neprekidnih funkcija

$$\begin{aligned} \overline{q}^1 &= \overline{q}^1(x_H, y_H, z_H), \\ \overline{q}^2 &= \overline{q}^2(x_H, y_H, z_H), \\ \overline{q}^3 &= \overline{q}^3(x_H, y_H, z_H). \end{aligned} \tag{4.106}$$

u kojoj tačka $(\overline{q}_0^1, \overline{q}_0^2, \overline{q}_0^3)$, predstavlja unutrašnju tačku u oblasti (Ω_0).

4.9.2 Slučaj pozicioniranja

Najpre ćemo rešiti problem određivanja jakobijana $[J_1]$ koji odgovara pozicioniranju vrha hvataljke H robotske hvataljke. Kao *bazni* slučaj u rešavanju tog problema smatraćemo onaj u kome je transformacija (4.102) identična, tj. slučaj

$$\begin{aligned} x_H &= \overline{q}^1, \\ y_H &= \overline{q}^2, \\ z_H &= \overline{q}^3. \end{aligned} \tag{4.110}$$

U ovom slučaju funkcionalna matrica poklapa se sa jediničnom i transformacija je regularna u celoj oblasti (P_3) koja predstavlja Euklidski prostor koordinata $\overline{q}^1, \overline{q}^2, \overline{q}^3$. Uzimajući u obzir da u baznom slučaju važi

$$\begin{aligned} \dot{\overline{q}}^1 &= \dot{x}_H, \\ \dot{\overline{q}}^2 &= \dot{y}_H, \\ \dot{\overline{q}}^3 &= \dot{z}_H, \end{aligned} \tag{4.111}$$

i da veličine $\dot{x}_H, \dot{y}_H, \dot{z}_H$ predstavljaju projekcije brzine vrha H robotske hvataljke na odgovarajuće ose koordinatnog sistema $Oxyz$, potrebno je, najpre, da se odredi brzina vrha H robotske hvataljke. U tom cilju odredimo vektor položaja tačke H (vidi sl. 4.1, izraz (4.33) i tekst koji sledi nakon (4.34)):

$$\vec{r}_H = \overrightarrow{OH} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k) \tag{4.112}$$

i diferencirajmo ga po vremenu. Primenjujući postupak prikazan u poglavlju 4.4 dobijamo

$$\vec{v}_H = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Im}_{\alpha(n)} \dot{q}^{\alpha}, \tag{4.113}$$

gde je

$$\vec{\Im}_{\alpha(n)} = \partial \vec{r}_H / \partial q^{\alpha} = \overline{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \sum_{k=\alpha}^{n} (\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k) + \xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}. \tag{4.114}$$

Koristeći (4.114) dobijamo

$$\dot{x}_H = \sum_{\alpha=1}^{n} (\vec{\Im}_{\alpha(n)} \cdot \vec{i}) \dot{q}^\alpha ,$$
$$\dot{y}_H = \sum_{\alpha=1}^{n} (\vec{\Im}_{\alpha(n)} \cdot \vec{j}) \dot{q}^\alpha , \tag{4.115}$$
$$\dot{z}_H = \sum_{\alpha=1}^{n} (\vec{\Im}_{\alpha(n)} \cdot \vec{k}) \dot{q}^\alpha .$$

Poslednja relacija može da se napiše i u obliku

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = [B]\{\dot{q}\} , \tag{4.116}$$

gde je

$$[B] = \left[\begin{Bmatrix} \vec{\Im}_{1(n)} \cdot \vec{i} \\ \vec{\Im}_{1(n)} \cdot \vec{j} \\ \vec{\Im}_{1(n)} \cdot \vec{k} \end{Bmatrix} \vdots \begin{Bmatrix} \vec{\Im}_{2(n)} \cdot \vec{i} \\ \vec{\Im}_{2(n)} \cdot \vec{j} \\ \vec{\Im}_{2(n)} \cdot \vec{k} \end{Bmatrix} \vdots \ldots \vdots \begin{Bmatrix} \vec{\Im}_{n(n)} \cdot \vec{i} \\ \vec{\Im}_{n(n)} \cdot \vec{j} \\ \vec{\Im}_{n(n)} \cdot \vec{k} \end{Bmatrix} \right] , \tag{4.117}$$

Prema (4.97) i (4.116) sledi da je rešenje u baznom slučaju za deo Jakobijana koji se odnosi na pozicioniranje dat izrazom

$$[J_1] = [B] . \tag{4.118}$$

Potrebno je imati u vidu da matrica $[B]$ može da ima takvu strukturu da je pri izboru konkretne tačke sa koordinatama $(q_*^1, \ldots, q_*^n)$, $n \geq 3$, ispunjen uslov $rank[B]_{(q^1 = q_*^1, \ldots, q^n = q_*^n)} < 3$.

U opštem slučaju polazi se od relacije koja se dobija diferenciranjem (4.102), tj. od relacije

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} , \tag{4.119}$$

iz koje se u oblasti (Ω_0), u kojoj je (4.102) regularna transformacija, dobija

$$(\Omega_0): \begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} = [L]^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} , \tag{4.120}$$

što se korišćenjem rešenja (4.116) u baznom slučaju svodi na oblik

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} = [L]^{-1} [B] \{\dot{q}\} , \tag{4.121}$$

koji dovodi do rešenja

$$[J_1] = [L]^{-1} [B] . \tag{4.122}$$

Primetimo da u oblasti (Ω_0) važi poznata relacija za inverzne funkcije

$$\left[L'\right]=\left[L\right]^{-1}. \tag{4.123}$$

U singularnim slučajevima, koje se u slučaju transformacije (4.102) odnose na oblast

$$\left(S\right)=\left(S_1\right)\cup\left(S_2\right), \tag{4.124}$$

a u slučaju transformacije (4.106), na oblast

$$\left(S'\right)=\left(S'_1\right)\cup\left(S'_2\right), \tag{4.125}$$

problem određivanja Jakobijana $\left[J_1\right]$ je vezan sa sa oblikom skupa $\left(S\right)$. Pomenuta veza je u nekim slučajevima relativno složena. Iz toga razloga njena uloga biće analizirana na konkretnim primerima.
Skup $\left(S\right)$ može da predstavlja niz izolovanih tačaka

$$q_s^1,\, q_s^2,\, q_s^3;\; s=1,2,...,k\,. \tag{4.126}$$

Takođe, $\left(S\right)$ može da predstavlja dvodimenzionu mnogostrukost oblika

$$\left(S\right):\psi_r\left(q^1,q^2,q^3\right)=0,\; r=1,...,k_1, \tag{4.127}$$

ili jednodimenzione mnogostrukosti oblika

$$\begin{aligned}&\psi_1^t\left(q^1,q^2,q^3\right)=0,\\&\psi_2^t\left(q^1,q^2,q^3\right)=0,\; t=1,...,k_2.\end{aligned} \tag{4.128}$$

Takođe, $\left(S\right)$ može da bude skup koji predstavlja kombinaciju prethodnih slučajeva. Analogni zaključci odnose se i na skup $\left(S'\right)$ (oblast singulariteta transformacije (4.106)).

U skladu sa primedbom navedenom posle (4.118) primetimo sledeće. Izborom tačke sa koordinatama[1] $(q_*^1,...,q_*^n)$, $n\geq 3$, prema (4.112) izabrana je tačka sa koordinatama (x_H^*, y_H^*, z_H^*), a samim tim, prema (4.102), i tačka sa koordinatama (q_*^1, q_*^2, q_*^3). Neka ta tačka pripada oblasti $\left(\Omega_0\right)$ u kojoj je transformacija (4.102) regularna. Neka je, nadalje $rank[B]_{(q^1=q_*^1,...,q^n=q_*^n)}<3$. Tada će, izuzmemo li specijalne slučajeve, vaziti i $rank[J_1]_{(\bar{q}^1=\bar{q}_*^1,\bar{q}^2=\bar{q}_*^2,\bar{q}^3=\bar{q}_*^3,q^1=q_*^1,...,q^n=q_*^n)}<3$.

Primer 1. *Odrediti Jakobijevu matricu* $\left[J_1\right]$ *koja se odnosi na pozicioniranje vrha H robotske hvataljke u slučaju da su spoljašnje koordinate polarno-cilindrične.*

Rešenje: Veza između Dekartovih pravouglih $\left(x_H, y_H, z_H\right)$ i polarno-cilindričnih $\left(\bar{q}^1,\bar{q}^2,\bar{q}^3\right)$ koordinata ima poznati oblik

$$\begin{aligned}x_H&=\bar{q}^1\cos\bar{q}^2,\\y_H&=\bar{q}^1\sin\bar{q}^2,\\z_H&=\bar{q}^3.\end{aligned} \tag{4.129}$$

Gornje funkcije su klase C_1 (neprekidne i neprekidno diferencijabilne) u celoj oblasti koordinata $\bar{q}^1,\bar{q}^2,\bar{q}^3$. Prema (4.105) dobijamo

[1] *Naveden je primer robotskog sistema sa brojem stepeni slobode kretanja dovoljnim za ostvarivanje pozicioniranja u opštem slučaju.*

$$\left[L\right]=\begin{bmatrix} \cos\overline{q}^2 & -\overline{q}^1\sin\overline{q}^2 & 0 \\ \sin\overline{q}^2 & \overline{q}^1\cos\overline{q}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow det\left[L\right]=\overline{q}^1. \qquad (4.130)$$

Pošto je $\left(S_1\right)=\left(\emptyset\right)$ sledi

$$\left(S_2\right): det\left[L\right]=0\cup det\left[L\right]\notin C\rightarrow\left(S_2\right): q^1=0. \qquad (4.131)$$

Zaključujemo da je oblast singulariteta $\left(S\right)$ transformacije (4.129) data relacijom

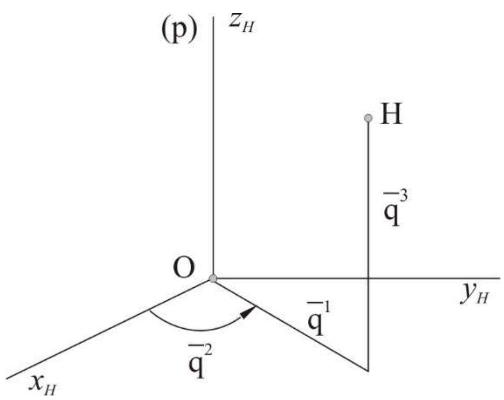
$$\left(S\right)=\left(S_2\right), \qquad (4.132)$$

ili

$$\left(S\right):\ \overline{q}^1=0. \qquad (4.133)$$

i, očigledno, predstavlja pravu (p) (vidi sl. 4.4) koja se poklapa sa $0z_H$ osom. Transformacija (4.129) je regularna u oblasti $\left(\Omega_0\right)$

$$\left(\Omega_0\right):\left(P_3\right)\backslash\left(S\right), \qquad (4.134)$$



Slika 4.4

koja predstavlja trodimenzionalni prostor koordinata ($\overline{q}^1,\overline{q}^2,\overline{q}^3$) iz koga je isključena prava (p). U ovoj oblasti postoji transformacija koordinata inverzna transformaciji (4.129):

$$\overline{q}^1=\sqrt{x_H^2+y_H^2},$$
$$\overline{q}^2=arctg\left(\frac{y_H}{x_H}\right)+k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,..., \qquad (4.135)$$
$$\overline{q}^3=z_H.$$

Ako pođemo od te transformacije zaključujemo da je druga funkcija u njoj prekidna u tački $\left(x_H=0, y_H=0,\ z_H\right)$ što se odnosi i na prve parcijalne izvode funkcije $\overline{q}^1=\overline{q}^1\left(x_H, y_H\right)$ po promenljivim x_H, y_H. Dakle, funkcije

$$\overline{q}^1=\overline{q}^1\left(x_H, y_H\right),$$
$$\overline{q}^2=\overline{q}^2\left(x_H, y_H\right). \qquad (4.136)$$

pripadaju klasi C_1 u celom prostoru koordinata x_H, y_H, z_H (trodimenzioni Euklidski prostor) iz koga je isključena prava

$$x_H = 0,\ y_H = 0, \tag{4.137}$$

tj. prava (p) koja se poklapa sa Oz_H osom. Prema tome oblast (S_1') singulariteta transformacije (4.91) predstavljena je pravom (p). Pošto je

$$[L'] = \begin{bmatrix} \frac{x_H}{\sqrt{x_H^2 + y_H^2}} & \frac{y_H}{\sqrt{x_H^2 + y_H^2}} & 0 \\ -\frac{y_H}{x_H^2 + y_H^2} & \frac{x_H}{x_H^2 + y_H^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.138}$$

sledi*

$$det[L'] = \frac{1}{\sqrt{x_H^2 + y_H^2}}. \tag{4.139}$$

Odavde sledi da oblast singulariteta (S_2') predstavlja skup

$$(S_2') = (p), \tag{4.140}$$

što dovodi do rezultata

$$(S') = (S_1') = (S_2'). \tag{4.141}$$

Odredimo najpre Jakobijevu matricu $[J_1]$ u oblasti (Ω_0'). Prema (4.135) sledi

$$(\Omega_0'):\ \begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_H}{\sqrt{x_H^2 + y_H^2}} & \frac{y_H}{\sqrt{x_H^2 + y_H^2}} & 0 \\ -\frac{y_H}{x_H^2 + y_H^2} & \frac{x_H}{x_H^2 + y_H^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix}, \tag{4.142}$$

što, prema (4.117) dovodi do rezultata

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{Bmatrix} = \left[\begin{Bmatrix} grad\varphi_1 \cdot \vec{\Im}_{1(n)} \\ grad\varphi_2 \cdot \vec{\Im}_{1(n)} \\ grad\varphi_3 \cdot \vec{\Im}_{1(n)} \end{Bmatrix} \vdots \begin{Bmatrix} grad\varphi_1 \cdot \vec{\Im}_{2(n)} \\ grad\varphi_2 \cdot \vec{\Im}_{2(n)} \\ grad\varphi_3 \cdot \vec{\Im}_{2(n)} \end{Bmatrix} \vdots\ldots\vdots \begin{Bmatrix} grad\varphi_1 \cdot \vec{\Im}_{n(n)} \\ grad\varphi_2 \cdot \vec{\Im}_{n(n)} \\ grad\varphi_3 \cdot \vec{\Im}_{n(n)} \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{Bmatrix}, \tag{4.143}$$

gde je

$$\varphi_1 = \sqrt{x_H^2 + y_H^2},\ \ \varphi_2 = arctg\left(\frac{y_H}{x_H}\right),\ \ \varphi_3 = z_H. \tag{4.144}$$

Konačno, dobija se (vidi (4.122))

---

* *u oblasti regularnosti transformacije ispunjen je uslov* $\det[L]\det[L'] = 1$.

$$\left[J_1\right]=\left[\begin{Bmatrix} grad\varphi_1\cdot\vec{\Im}_{1(n)} \\ grad\varphi_2\cdot\vec{\Im}_{1(n)} \\ grad\varphi_3\cdot\vec{\Im}_{1(n)}\end{Bmatrix}\vdots\begin{Bmatrix} grad\varphi_1\cdot\vec{\Im}_{2(n)} \\ grad\varphi_2\cdot\vec{\Im}_{2(n)} \\ grad\varphi_3\cdot\vec{\Im}_{2(n)}\end{Bmatrix}\vdots\ldots\vdots\begin{Bmatrix} grad\varphi_1\cdot\vec{\Im}_{n(n)} \\ grad\varphi_2\cdot\vec{\Im}_{n(n)} \\ grad\varphi_3\cdot\vec{\Im}_{n(n)}\end{Bmatrix}\right], \qquad (4.145)$$

U singularnom slučaju sledi

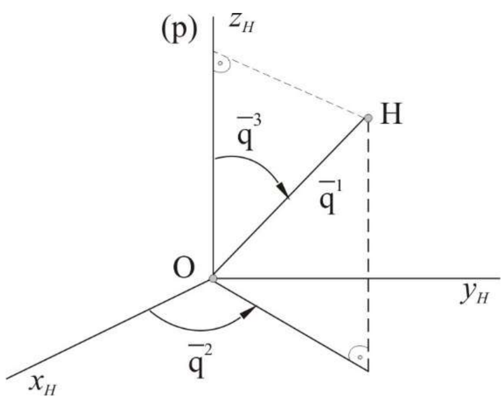
$$\begin{aligned}(S'):\ &\overline{q}^1=0,\\ &\overline{q}^2=\psi\left(x_H,y_H,z_H\right), \qquad (4.146)\\ &\overline{q}^3=z_H.\end{aligned}$$

pri čemu je funkcija $\psi=\psi\left(x_{H,}\,y_H,z_H\right)$, zbog $x_H=y_H=0$, proizvoljna funkcija promenljivih x_H,y_H,z_H klase C_1. Odavde se dobija

$$\left[J_1\right]_{(S')}=\left[\begin{Bmatrix} 0 \\ grad\psi\cdot\vec{\Im}_{1(n)} \\ grad\varphi_3\cdot\vec{\Im}_{1(n)}\end{Bmatrix}\vdots\begin{Bmatrix} 0 \\ grad\psi\cdot\vec{\Im}_{2(n)} \\ grad\varphi_3\cdot\vec{\Im}_{2(n)}\end{Bmatrix}\vdots\ldots\vdots\begin{Bmatrix} 0 \\ grad\psi\cdot\vec{\Im}_{n(n)} \\ grad\varphi_3\cdot\vec{\Im}_{n(n)}\end{Bmatrix}\right], \qquad (4.147)$$

Primer 2. *Odrediti Jakobijevu matricu $\left[J_1\right]$ koja se odnosi na pozicioniranje vrha **H** robotske hvataljke u slučaju da su spoljašnje koordinate sferne.*

Rešenje: Veza između Dekartovih pravouglih koordinata x_H,y_H,z_H i sfernih koordinata ($\overline{q}^1,\overline{q}^2,\overline{q}^3$) ima oblik (vidi sl. 4.5)



Slika 4.5

$$\begin{aligned}&\overline{q}^1=\sqrt{x_H^2+y_H^2+z_H^2},\\ &\overline{q}^2=arctg\left(\frac{y_H}{x_H}\right)+k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\cdot \qquad (4.148)\\ &\overline{q}^3=arctg\left(\frac{\sqrt{x_H^2+y_H^2}}{z_H}\right)+k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ \cdot\end{aligned}$$

U tačkama oblasti $\left(x_H=0,\ y_H=0,\ z_H\right)$ funkcija $\overline{q}^2$ ima prekid, što se odnosi i na njene prve parcijalne izvode po promenljivim x_H i y_H. U koordinatnom početku $\left(x_H=0,\ y_H=0,\ z_H=0\right)$ funkcije $\overline{q}^2$ i $\overline{q}^3$ imaju prekid, kao i njihovi prvi parcijalni izvodi po promenljivima koje u njima figurišu. Funkcija $\overline{q}^1$

neprekidna je u tački $\left(x_H=0,\ y_H=0,\ z_H=0\right)$ ali ne i njeni prvi parcijalni izvodi po x_H, y_H i z_H. Odavde zaključujemo da funkcije (4.148) ne pripadaju klasi C_1 u celom Euklidskom prostoru (P_3) koordinata x_H, y_H, z_H. Naime, singulariteti se javljaju u sledećim slučajevima

$$\begin{aligned}&\left(S_1'\right)_1 : x_H=0, y_H=0,\\&\left(S_1'\right)_2 : x_H=0, y_H=0, z_H=0.\end{aligned}\tag{4.149}$$

Jakobijeva matrica transformacije $[L']$ ima oblik

$$\begin{bmatrix}\dfrac{x_H}{\sqrt{x_H^2+y_H^2+z_H^2}} & \dfrac{y_H}{\sqrt{x_H^2+y_H^2+z_H^2}} & \dfrac{z_H}{\sqrt{x_H^2+y_H^2+z_H^2}}\\ \dfrac{y_H}{x_H^2+y_H^2} & -\dfrac{x_H}{x_H^2+y_H^2} & 0\\ \dfrac{z_H x_H\left(x_H^2+y_H^2\right)^{-1/2}}{\left(x_H^2+y_H^2+z_H^2\right)} & \dfrac{z_H y_H\left(x_H^2+y_H^2\right)^{-1/2}}{\left(x_H^2+y_H^2+z_H^2\right)} & -\dfrac{\sqrt{x_H^2+y_H^2}}{\left(x_H^2+y_H^2+z_H^2\right)}\end{bmatrix}\tag{4.150}$$

i pošto je

$$det\left[L'\right]=\frac{1}{\sqrt{\left(x_H^2+y_H^2+z_H^2\right)\left(x_H^2+y_H^2\right)}}\Rightarrow det\left[L'\right]_{(P_3)}\neq 0\,,\tag{4.151}$$

ali $det\left[L'\right]\notin C$ u oblastima $\left(S_1'\right)_1$ i $\left(S_1'\right)_2$

sledi

$$\left(S_2'\right)=\left(S_1'\right)_1\cup\left(S_1'\right)_2\,.\tag{4.152}$$

Oblast (Ω) regularnosti transformacije (4.102) data je relacijom

$$\left(\Omega_0'\right)=\left(P_3\right)\backslash\left(\left(S_1'\right)_1\cup\left(S_1'\right)_2\right)\,,\tag{4.153}$$

i očigledno predstavlja oblast (P_3) iz koje je isključena prava (*p*) koja se poklapa sa Oz_H osom. U oblasti $\left(\Omega_0'\right)$, razmatranjem analognim onome iz prethodnog primera, dobija se za $\left[J_1\right]$, izraz (4.145), u kome je:

$$\begin{aligned}&\varphi_1=\sqrt{x_H^2+y_H^2+z_H^2}\,,\\&\varphi_2=arctg\left(\frac{y_H}{x_H}\right),\\&\varphi_3=arctg\left(\frac{\sqrt{x_H^2+y_H^2}}{z_H}\right).\end{aligned}\tag{4.154}$$

U singularnom slučaju u oblasti $\left(S_1'\right)_1$ sledi

$$\begin{aligned}&\overline{q}^1=\theta,\\&\overline{q}^2=\psi\left(x_H, y_H, z_H\right),\\&\overline{q}^3=k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,...\end{aligned}\tag{4.155}$$

gde je $\theta = |z_H|$, a ψ proizvoljna funkcija promenljivih koja pripada klasi C_1. Iz prethodnih relacija se dobija

$$[J_1]_{(S_1')_1} = \left[\begin{Bmatrix} grad\theta \cdot \vec{\Im}_{1(n)} \\ grad\psi \cdot \vec{\Im}_{1(n)} \\ 0 \end{Bmatrix} \vdots \begin{Bmatrix} grad\theta \cdot \vec{\Im}_{2(n)} \\ grad\psi \cdot \vec{\Im}_{2(n)} \\ 0 \end{Bmatrix} \vdots \ldots \vdots \begin{Bmatrix} grad\theta \cdot \vec{\Im}_{n(n)} \\ grad\psi \cdot \vec{\Im}_{n(n)} \\ 0 \end{Bmatrix} \right], \quad (4.156)$$

u singularnom slučaju u oblasti $(S_1')_2$ sledi

$$\begin{aligned} \bar{q}^1 &= 0, \\ \bar{q}^2 &= \psi_1(x_H, y_H, z_H), \\ \bar{q}^3 &= \psi_2(x_H, y_H, z_H). \end{aligned} \quad (4.157)$$

Funkcije ψ_1, ψ_2 predstavljaju proizvoljne funkcije promenljivih x_H, y_H, z_H koje pripadaju klasi C_1.

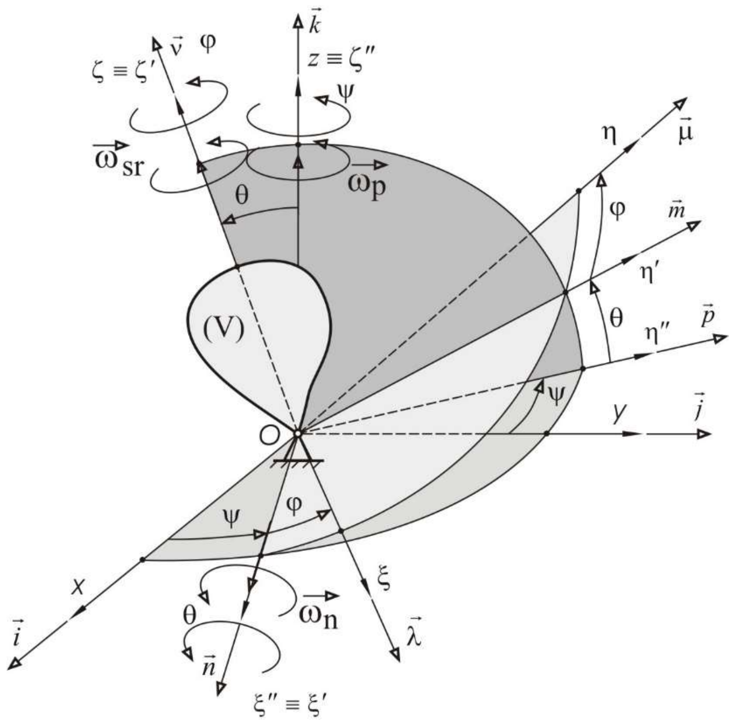
4.9.3 Slučaj orijentacije

Odredimo sada deo Jakobijeve matrice koji se odnosi na orijentaciju robotske hvataljke (poslednjeg robotskog segmenta). U tom cilju izrazimo ugaonu brzinu poslednjeg robotskog segmenta u funkciji unutrašnjih koordinata $\left(\bar{q}^4, \bar{q}^5, \bar{q}^6\right)$. Najpre, rešimo ovaj zadatak u *baznom* slučaju kada pomenute unutrašnje koordinate predstavljaju klasične uglove (ψ -ugao precesije, θ -ugao nutacije, φ -ugao sopstvene rotacije):

$$\begin{aligned} \bar{q}^4 &= \psi, \\ \bar{q}^5 &= \theta, \\ \bar{q}^6 &= \varphi. \end{aligned} \quad (4.158)$$

U ovom slučaju ugaona brzina poslednjeg robotskog segmenta glasi (sl. 4.5)

$$\vec{\omega}_n = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{v}\ , \quad (4.159)$$



Slika 4.6

ili (vidi (4.73)) za slučaj $i = n$)

$$\vec{\omega}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k \vec{e}_k \dot{q}^k . \tag{4.160}$$

Iz (4.159) i (4.160) sledi relacija

$$[K_0]\begin{Bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{Bmatrix} = [E]\{\dot{q}\}, \tag{4.161}$$

gde je

$$[K_0] \in R^{3\times 3},\ [K_0] = \left[\{\vec{k}^{(0)}\} \vdots \{\vec{n}^{(0)}\} \vdots \{\vec{\nu}^{(0)}\}\right], \tag{4.162}$$

$$[E] \in R^{3\times n},\ [E] = \left[\bar{\xi}_1\{\vec{e}_1^{(0)}\} \vdots \bar{\xi}_2\{\vec{e}_2^{(0)}\} \vdots \ldots \vdots \bar{\xi}_n\{\vec{e}_n^{(0)}\}\right]., \tag{4.163}$$

Izraz (4.162), uzimajući u obzir relacije (vidi sl. 4.5)

$$\{\vec{n}^{(0)}\} = \begin{Bmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{Bmatrix},\ \{\vec{\nu}^{(0)}\} = \begin{Bmatrix}\sin\psi\sin\theta\\ -\cos\psi\sin\theta\\ \cos\theta\end{Bmatrix}, \tag{4.164}$$

dobija sledeću formu

$$[K_0] = \begin{bmatrix}0 & \cos\psi & \sin\psi\sin\theta\\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi\sin\theta\\ 1 & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}. \tag{4.165}$$

Pošto je

$$det[K_0] = -\sin\theta, \tag{4.166}$$

sledi da je matrica $[K_0]$ singularna u oblasti (S_1), a takođe $\det[K_o]^{-1} \notin C$ u (S_1), gde je

$$(S_1): \ \theta = k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \cdot \qquad (4.167)$$

U prostoru ((R_3) - prostor koordinata ψ, θ, φ)

$$(R_3) \setminus (S_1), \qquad (4.168)$$

dobijamo rešenje u baznom slučaju (vidi (4.161))

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [K_0]^{-1} [E] \{\dot{q}\}, \qquad (4.169)$$

odakle sledi

$$[J_2] = [K_0]^{-1} [E]. \qquad (4.170)$$

U opštem slučaju, kada je data transformacija

$$\begin{aligned} \bar{q}^4 &= \bar{q}^4(\psi, \theta, \varphi), \\ \bar{q}^5 &= \bar{q}^5(\psi, \theta, \varphi), \\ \bar{q}^6 &= \bar{q}^6(\psi, \theta, \varphi). \end{aligned} \qquad (4.171)$$

čiju oblast regularnosti određujemo na način koji je izložen u vezi sa transformacijama (4.102) i (4.106) dobija se

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^4 \\ \dot{\bar{q}}^5 \\ \dot{\bar{q}}^6 \end{Bmatrix} = [M] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}, \qquad (4.172)$$

gde je

$$[M] \in R^{3\times 3}, [M] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{q}^4}{\partial \psi} & \dfrac{\partial \bar{q}^4}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \bar{q}^4}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial \bar{q}^5}{\partial \psi} & \dfrac{\partial \bar{q}^5}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \bar{q}^5}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial \bar{q}^6}{\partial \psi} & \dfrac{\partial \bar{q}^6}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \bar{q}^6}{\partial \varphi} \end{bmatrix}, \qquad (4.173)$$

korišćenjem baznog rešenja (4.169) dobija se

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{q}}^4 \\ \dot{\bar{q}}^5 \\ \dot{\bar{q}}^6 \end{Bmatrix} = [M][K_0]^{-1} [E] \{\dot{q}\}. \qquad (4.174)$$

Iz poslednjeg izraza sledi nesingularno rešenje za deo Jakobijeve matrice koji se odnosi na orijentaciju robotske hvataljke

$$[J_2] = [M][K_0]^{-1} [E]. \qquad (4.175)$$

Oblast singularnosti transformacije (4.171) određena je oblašću (S_2) u kojoj bar jedna od funkcija koje figurišu na desnoj strani izraza (4.171) ne pripada klasi C_1, i oblašću (S_3) u kojoj važi

$$(S_3): det[M]=0 \cup det[M] \notin C \qquad (4.176)$$

Sledi da je oblast (S) u kojoj je singularna transformacija (4.171), određena izrazom

$$(S)=(S_1)\cup(S_2)\cup(S_3). \qquad (4.177)$$

Izborom tačke sa koordinatama[2] $(q_*^1,...,q_*^n)$, $n \geq 3$, prema (4.112) izabrana je tačka određena koordinatama $(\psi^*,\theta^*,\varphi^*)$, a samim tim, prema (4.171), i tačka određena koordinatama $(\bar{q}_*^1,\bar{q}_*^2,\bar{q}_*^3)$. Neka ta tačka pripada oblasti u kojoj je transformacija (4.171) regularna. Neka je, nadalje $rank[E]_{(q^1=q_*^1,...,q^n=q_*^n)} < 3$. Tada će, osim u specijalnim slučajevima, važiti i $rank[J_2]_{(\bar{q}^1=\bar{q}_*^1,\bar{q}^2=\bar{q}_*^2,\bar{q}^3=\bar{q}_*^3,q^1=q_*^1,...,q^n=q_*^n)} < 3$.

Napomenimo i to da može biti ispunjen uslov $\det[[M][K_0]^{-1}]_{(\theta=0)} \neq 0$ iako je, kako je navedeno, $\det[K_0]^{-1}{}_{(\theta=0)} = 0$. Takav slučaj javlja se u narednom primeru.

Primer 3. *Data je veza između Hamilton-Rodrigovih parametara* $\lambda_1=\bar{q}^4,\lambda_2=\bar{q}^5,\lambda_3=\bar{q}^6$ *i Ojlerovih uglova* (vidi (3.144))

$$\begin{aligned} \bar{q}^4 &= sin\frac{\theta}{2}cos\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right), \\ \bar{q}^5 &= sin\frac{\theta}{2}sin\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right), \\ \bar{q}^6 &= cos\frac{\theta}{2}sin\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \qquad (4.178)$$

Odredi deo Jakobijeve matrice koji se odnosi na orijentaciju robotske hvataljke.

Rešenje: Očigledno je da su sve funkcije (4.178) neprekidne i neprekidno diferencijabilne do proizvoljnog reda. Otuda:

$$(S_2)=(\emptyset). \qquad (4.179)$$

Oblast (S_3) je određena vidi relaciju (4.176) izrazom

$$det[M]=0, \qquad (4.180)$$

gde je

$$[M]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) \\ s\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & -s\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) \\ c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & -s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix}. \qquad (4.181)$$

Odavde sledi

$$det[M]=-\frac{1}{8}sin\theta cos\frac{\theta}{2}cos\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)=0, \qquad (4.182)$$

što dovodi do sledećih oblasti singulariteta

[2] *Naveden je primer robotskog sistema sa brojem stepeni slobode kretanja dovoljnim za ostvarivanje orijentacije u opštem slučaju.*

$$\left(S_3\right)_1 : sin\theta = 0 \quad \to \theta = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\left(S_3\right)_2 : cos\frac{\theta}{2} = 0 \to \theta = \left(2k_1 + 1\right)\pi,\ k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{4.183}$$

$$\left(S_3\right)_3 : cos\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) = 0 \to \varphi = \left(2k_2 + 1\right)\pi - \psi,\ k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

i, konačno

$$\left(S_3\right) = \left(S_3\right)_1 \cup \left(S_3\right)_3, \tag{4.184}$$

pošto je $(S_3)_2 \subset (S_3)_1$.

Međutim, ako se razmatra proizvod matrica $[M]$ i $[K]^{-1}$, slediće da su svi elementi matrice $[E_1] = [M][K]^{-1}$ neprekidni i neprekidno diferecijabilni do proizvoljnog reda (vidi prvu matricu na desnoj strani izraza (4.188)), pri čemu važi $det[E_1] = cos(\theta/2)cos\left(\psi/2 + \varphi/2\right) \to det[E_1]_{(\theta=0)} = cos\left(\psi/2 + \varphi/2\right)$. Iz ovog razloga iz oblasti singulariteta isključuje se oblast $\left(S_1\right)$ i $\left(S_3\right)_1$ tako da ostaje:

$$\left(S\right) = \left(S_2\right) \cup \left(S_3\right)_2 \cup \left(S_3\right)_3. \tag{4.185}$$

Pošto je $\left(S_2\right)$ dato sa (4.179) a $\left(S_3\right)_2$ i $\left(S_3\right)_3$ sa (4.183), konačno dobijamo

$$\left(S\right):\ \theta = \left(2k_1 + 1\right)\pi,\ k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, ...,\ \varphi = \left(2k_2 + 1\right)\pi - \psi,\ k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \tag{4.186}$$

Na osnovu prethodnih rezultata zaključujemo da je u slučaju izbora Hamilton-Rodrigovih parametara za spoljašnje koordinate kojima se određuje orijentacija poslednjeg robotskog segmenta, odgovarajući deo Jakobijeve matrice u prostoru

$$\left(P_3\right) \setminus \left(S\right), \tag{4.187}$$

dat izrazom (vidi (4.166) i dalje):

$$[J_2] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & -s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) \\ -c\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) & s\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) \\ s\frac{\theta}{2}s\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & -s\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) & c\frac{\theta}{2}c\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix}[E] \tag{4.188}$$

gde je matrica $[E]$ određena strukturom robotskog sistema i ima oblik (4.163).