Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - четврта недеља

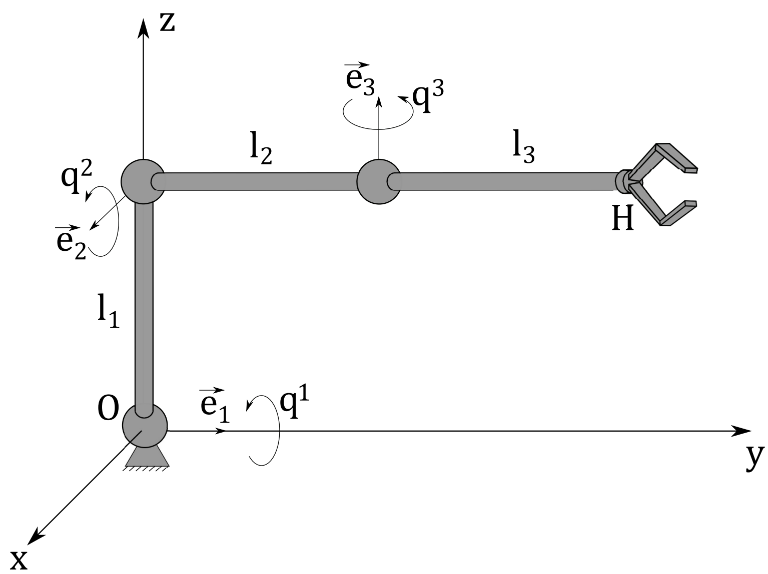
Београд, 2023.

ℕℝ

Задатак 10 За робот приказан на слици у референтној конфигурацији, за следеће вредности генералисаних координата $q^i = 0,1 \cdot i \, [\mathrm{rad}]$, $i = 1,2,3$, и генералисаних брзина $\dot{q}^i = 0,2 \cdot i \left[\frac{\mathrm{rad}}{s}\right]$, $i = 1,2,3$, одредити следеће величине:

- положај центра инерције трећег сегмента $\vec{r}_{c_3}$,
- положај врха хватаљке $\vec{r}_H$,
- вектор апсолутне угаоне брзине трећег сегмента $\vec{\omega}_3$,
- вектор брзине центра инерције првог сегмента $\vec{V}_1$.

Дато је: $l_1 = l_2 = l_3 = 2$ m.

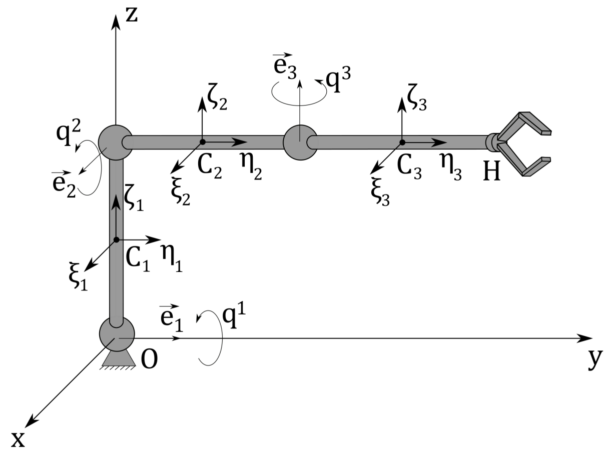


Слика 1

Уводимо параметар ξ_i који је једнак јединици уколико је зглоб i призматични, а нули ако је цилиндрични. За параметар $\overline{\xi}_i$ важи обратно. У овом случају је:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$$
$$\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = \overline{\xi}_3 = 1$$

На Сл. 2 приказани су локални координатни системи сегемената, који су у референтној кофигурацији паралелни непокретном координатном систему.

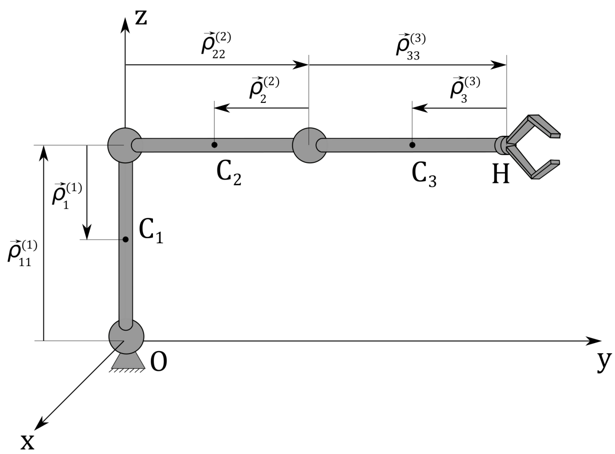


Слика 2

Јединични вектори оса ротације сегмената одређени у односу на локалне координатне системе сегмената су:

$$\vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Из практичних разлога, у виду припреме пред израду задатка, сада ће бити одређени и карактеристични вектори свих сегмената, који су приказани на Сл. 3:



Слика 3

$$\vec{\rho}_{11}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{22}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{33}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\rho}_{1}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{2}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{3}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ротација првог сегмента у односу на непокретни координати систем:

$$Oxyz \xrightarrow{q^1} O\xi_1\eta_1\zeta_1 \qquad \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_{0,1}] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{0,1}] = [I] + \overline{\xi}_1 \left\{ (1 - \cos q^1) \left[e_1^d \right]^2 + \sin q^1 \left[e_1^d \right] \right\}$$

$$\left\{ \vec{e}_1 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_1^d \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_1^d \right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} 0,995 & 0 & 0,0998 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,0998 & 0 & 0,995 \end{bmatrix}$$

Ротација другог сегмента у односу на први сегмент:

$$O\xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow{q^2} O\xi_2\eta_2\zeta_2 \qquad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix} = [A_{1,2}] \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = [I] + \overline{\xi}_2 \left\{ (1 - \cos q^2) \left[e_2^d \right]^2 + \sin q^2 \left[e_2^d \right] \right\}$$

$$\left\{ \vec{e}_2 \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_2^d \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_2^d \right]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & -0,1987 \\ 0 & 0,1987 & 0,98 \end{bmatrix}$$

Ротација трећег сегмента у односу на други сегмент:

$$O\xi_2\eta_2\zeta_2 \xrightarrow{q^3} O\xi_3\eta_3\zeta_3 \qquad \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = [A_{2,3}] \begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{2,3}] = [I] + \bar{\xi}_3 \left\{ (1 - \cos q^3) \left[e_3^d \right]^2 + \sin q^3 \left[e_3^d \right] \right\}$$

$$\left\{ \vec{e}_3 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_3^d \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_3^d \right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ротација трећег сегмента у односу на други сегмент:

$$O\xi_2\eta_2\zeta_2 \xrightarrow{q^3} O\xi_3\eta_3\zeta_3 \qquad \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = [A_{2,3}] \begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{2,3}] = [I] + \bar{\xi}_3 \left\{ (1 - \cos q^3) \left[e_3^d \right]^2 + \sin q^3 \left[e_3^d \right] \right\}$$

$$[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,295 & 0 \\ 0,295 & 0,995 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Потребно је одредити и матрице трансформације $[A_{0,2}]$, $[A_{1,3}]$ и $[A_{0,3}]$:

$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}] \, [A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,995 & 0,0198 & 0,0976 \\ 0 & 0,98 & -0,198 \\ -0,0998 & 0,197 & 0,9751 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,3}] = [A_{1,2}] \, [A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,295 & 0 \\ 0,2891 & 0,9359 & -0,198 \\ 0,0548 & 0,189 & 0,98 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,3}] = [A_{0,1}] \, [A_{1,2}] \, [A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,956 & -0,274 & 0,0978 \\ 0,2891 & 0,9359 & -0,198 \\ -0,0372 & 0,2175 & 0,9751 \end{bmatrix}$$

Положај центра инерције трећег сегмента $\vec{r}_{c_3}$ може се одредити уз помоћ обрасца:

$$\boxed{\vec{r}_{c_i} = \sum_{\alpha=1}^{i} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha \right) + \vec{\rho}_i}$$

Следи:

$$\vec{r}_{c_3} = \vec{\rho}_{11} + \vec{\rho}_{22} + \vec{\rho}_{33} + \vec{\rho}_3$$

Сви вектори морају бити одређени у односу на исти координатни систем!

$$\vec{r}_{c_3}^{(0)} = \vec{\rho}_{11}^{(0)} + \vec{\rho}_{22}^{(0)} + \vec{\rho}_{33}^{(0)} + \vec{\rho}_3^{(0)}$$

На пример:

$$\vec{\rho}_{11}^{(0)} = [A_{0,1}]\,\vec{\rho}_{11}^{(1)}$$

Коначно:

$$\vec{r}_{c_3}^{(0)} = [A_{0,1}]\left\{\vec{\rho}_{11}^{(1)}\right\} + [A_{0,2}]\left\{\vec{\rho}_{22}^{(2)}\right\} + [A_{0,3}]\left\{\vec{\rho}_{33}^{(3)}\right\} + [A_{0,3}]\left\{\vec{\rho}_{3}^{(3)}\right\}$$

Тј.

$$\vec{r}_{c_3}^{(0)} = [A_{0,1}]\left\{\vec{\rho}_{11}^{(1)}\right\} + [A_{0,2}]\left\{\vec{\rho}_{22}^{(2)}\right\} + [A_{0,3}]\left(\left\{\vec{\rho}_{33}^{(3)}\right\} + \left\{\vec{\rho}_{3}^{(3)}\right\}\right)$$

$$\vec{r}_{c_3}^{(0)} = \begin{Bmatrix} -0,0348 \\ 2,8959 \\ 2,6015 \end{Bmatrix}$$

Положај врха хватаљке $\vec{r}_H$ може се одредити уз помоћ обрасца:

$$\boxed{\vec{r}_H = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha\right)}$$

$$\vec{r}_H^{(0)} = [A_{0,1}]\left\{\vec{\rho}_{11}^{(1)}\right\} + [A_{0,2}]\left\{\vec{\rho}_{22}^{(2)}\right\} + [A_{0,3}]\left\{\vec{\rho}_{33}^{(3)}\right\}$$

$$\vec{r}_H^{(0)} = \begin{Bmatrix} -0,3 \\ 3,83 \\ 2,819 \end{Bmatrix}$$