Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - пета недеља

Београд, 2023.
NR

Задатак 10 - наставак <u>Угаона брзина трећег сегмента</u> $\vec{\omega}_3$ може се одредити уз помоћ обрасца:

$$\boxed{\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \overline{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \dot{q}^\alpha}$$

Ради вежбе бирамо координатни систем првог сегмента (није прецизирано у тексту задатка):

$$\vec{\omega}_3^{(1)} = \left\{\vec{e}_1^{(1)}\right\} \dot{q}^1 + [A_{1,2}] \left\{\vec{e}_2^{(2)}\right\} \dot{q}^2 + [A_{1,3}] \left\{\vec{e}_3^{(3)}\right\} \dot{q}^3$$

$$\vec{\omega}_3^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,3997 \\ 0,0808 \\ 0,5859 \end{Bmatrix}$$

<u>Брзина центра масе трећег сегмента</u> $\overrightarrow{V}_{c_3}$ може се одредити уз помоћ обрасца:

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{c_i} = \sum_{\beta=1}^{i} \overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} \dot{q}^\beta} \tag{1}$$

где су квазибазни вектори:

$$\boxed{\overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} = \overline{\xi}_\beta \vec{e}_\beta \times \overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} + \xi_\beta \vec{e}_\beta} \tag{2}$$

док је $\overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}}$ вектор положаја центра масе i-тог сегмента у односу на зглоб сегмента β:

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} = \sum_{\alpha=\beta}^{i} (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha) + \vec{\rho}_i} \tag{3}$$

На основу израза (1) следи:

$$\overrightarrow{V}_{c_1} = \sum_{\beta=1}^{1} \overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} \dot{q}^\beta = \overrightarrow{T}_{1_{(1)}} \dot{q}^1 \Rightarrow \overrightarrow{V}_{c_1}^{(1)}$$

На основу израза (2) следи:

$$\overrightarrow{T}_{1_{(1)}} = 1 \cdot \vec{e}_1 \times \overrightarrow{R}_{1_{(1)}} + 0 \cdot \vec{e}_1 \tag{4}$$

Пошто је вектор $\vec{e}_1$ изражен у односу на локални координатни систем првог сегмента, и квазибазни вектор ће бити изражен у односу на исти координатни систем:

$$\overrightarrow{T}_{1_{(1)}}^{(1)} = 1 \cdot \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)} + 0 \cdot \vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right] \left\{\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)}\right\}$$

Тако да можемо одредити и тражени вектор брзине у односу на локални координатни систем првог сегмента:

$$\overrightarrow{V}_{c_1}^{(1)} = \overrightarrow{T}_{1_{(1)}}^{(1)} \dot{q}^1$$

Како бисмо одредили квазибазни вектор (4), потребно је да прво одредимо вектор $\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)}$, и то према изразу (3). Дакле:

$$\overrightarrow{R}_{1_{(1)}} = \sum_{\alpha=1}^{1} (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha) + \vec{\rho}_i$$

Тј. у односу на локални координатни систем првог сегмента:

$$\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_1^{(1)}$$

$$\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Сада је:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}_{1_{(1)}}^{(1)} &= \left[e_1^{d(1)}\right] \left\{\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

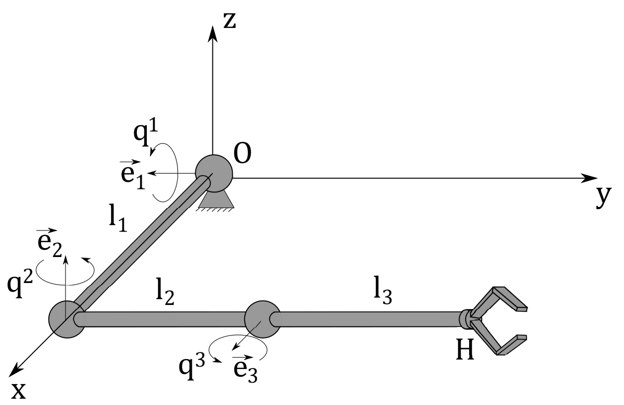
И коначно:

$$\overrightarrow{V}_{c_1}^{(1)} = \overrightarrow{T}_{1_{(1)}}^{(1)} \dot{q}^1 = \begin{Bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Уколико је потребно одредити тражени вектор у односу на непокретни координатни систем, може се извршити једноставна трансформација:

$$\overrightarrow{V}_{c_1}^{(0)} = [A_{0,1}] \overrightarrow{V}_{c_1}^{(1)}$$

Задатак 11 За робот приказан на слици у референтној конфигурацији, за следеће вредности генералисаних координата $q^i = 0,1 \cdot i$ [rad], $i = 1,2,3$, и генералисаних брзина $\dot{q}^i = 0,2 \cdot i \left[\dfrac{\text{rad}}{s}\right]$, $i = 1,2,3$, одредити брзину врха хватаљке $\overrightarrow{V}_H$. Дато је: $l_1 = l_2 = l_3 = 4$ m.



Јединични вектори оса ротације (обратити пажњу на смер):

$$\vec{e}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Карактеристични вектори сегмената:

$$\vec{\rho}_{11}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{22}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{33}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\rho}_{1}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{2}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{3}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Матрице трансформације:

$$[A_{0,1}] = [I] + \overline{\xi}_1 \left\{ (1 - \cos q^1) \left[e_1^d\right]^2 + \sin q^1 \left[e_1^d\right] \right\}$$

$$\left\{\vec{e}_1\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_1^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_1^d\right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} 0,995 & 0 & -0,0998 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,0998 & 0 & 0,995 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = [I] + \overline{\xi}_2 \left\{ (1 - \cos q^2) \left[e_2^d\right]^2 + \sin q^2 \left[e_2^d\right] \right\}$$

$$\left\{\vec{e}_2\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_3^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_3^d\right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,9801 & -0,1987 & 0 \\ 0,1987 & 0,9801 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{2,3}] = [I] + \overline{\xi}_3 \left\{ (1 - \cos q^3) \left[e_3^d\right]^2 + \sin q^3 \left[e_3^d\right] \right\}$$

$$\left\{\vec{e}_3\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_2^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_2^d\right]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9553 & -0,2956 \\ 0 & 0,2956 & 0,9553 \end{bmatrix}$$

Потребно је одредити и матрице трансформације $[A_{0,2}]$, $[A_{1,3}]$ и $[A_{0,3}]$:

$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,9752 & -0,1977 & -0,0988 \\ 0,1987 & 0,9801 & 0 \\ 0,0978 & -0,0198 & 0,995 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,3}] = [A_{1,2}]\,[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,9801 & -0,1898 & 0,0587 \\ 0,1987 & 0,9363 & -0,2897 \\ 0 & 0,2956 & 0,9553 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,3}] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}]\,[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,9752 & -0,2184 & -0,0369 \\ 0,1987 & 0,9363 & -0,2897 \\ 0,0978 & 0,2752 & 0,9564 \end{bmatrix}$$

<u>Вектор брзине врха хватаљке може се одредити према следећем изразу:</u>

$$\boxed{\overrightarrow{V}_H = \sum_{\beta=1}^{n} \overrightarrow{\tau}_{\beta(n)} \dot{q}^{\beta}} \tag{5}$$

где су квазибазни вектори:

$$\boxed{\overrightarrow{\tau}_{\beta_{(n)}} = \bar{\xi}_\beta \vec{e}_\beta \times \overrightarrow{R}_{\tau_{\beta_{(n)}}} + \xi_\beta \vec{e}_\beta} \tag{6}$$

док је $\overrightarrow{R}_{\tau_{\beta_{(n)}}}$ вектор положаја врха хватаљке у односу на зглоб сегмента β:

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\tau_{\beta_{(n)}}} = \sum_{\alpha=\beta}^{n} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha\right)} \tag{7}$$

Дакле, на основу израза (5):

$$\overrightarrow{V}_H = \sum_{\beta=1}^{3} \overrightarrow{\tau}_{\beta_{(i)}} \dot{q}^\beta = \overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}} \dot{q}^1 + \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}} \dot{q}^2 + \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}} \dot{q}^3$$

Одредићемо вектор брзине врха хватаљке у односу на непокретни координатни систем:

$$\overrightarrow{V}_H^{(0)} = \overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(0)} \dot{q}^1 + \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}}^{(0)} \dot{q}^2 + \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}}^{(0)} \dot{q}^3$$

Дакле потребно је да одредимо сва три квазибазна вектора: $\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(0)}$, $\overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}}^{(0)}$ и $\overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}}^{(0)}$! На основу израза (6), следи:

$$\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}} = 1 \cdot \vec{e}_1 \times \overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}} + 0 \cdot \vec{e}_1$$

Пошто је јединични вектор $\vec{e}_1$ одређен у односу на координатни систем првог сегмента, за почетак ћемо квазибазни вектор одредити у односу на тај координатни систем:

$$\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right] \left\{\overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}}^{(1)}\right\}$$

А затим ћемо извршити његову трансформацију у непокретни координатни систем:

$$\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(0)} = [A_{0,1}] \left\{\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(1)}\right\}$$

Потребно је да се одреди вектор $\overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}}^{(1)}$ на основу израза (7). Дакле:

$$\overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R}^{(1)}_{\tau_{1_{(3)}}} &= \vec{\rho}^{(1)}_{11} + \vec{\rho}^{(1)}_{22} + \vec{\rho}^{(1)}_{33} \\ &= \left\{\vec{\rho}^{(1)}_{11}\right\} + [A_{1,2}]\left\{\vec{\rho}^{(2)}_{22}\right\} + [A_{1,3}]\left\{\vec{\rho}^{(3)}_{33}\right\}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{R}^{(1)}_{\tau_{1_{(3)}}} = \begin{Bmatrix} 2,4459 \\ 7,6656 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Коначно, тражени квазибазни вектор је (трансфрмација у непокретни координатни систем биће урађена накнадно):

$$\overrightarrow{\tau}^{(1)}_{1_{(3)}} = \left[e^{d(1)}_1\right]\left\{\overrightarrow{R}^{(1)}_{\tau_{1_{(3)}}}\right\} = \begin{Bmatrix} 7,6656 \\ 2,4459 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Аналогно овом поступку, следи одређивање квазибазног вектора $\overrightarrow{\tau}^{(2)}_{2_{(3)}}$:

$$\overrightarrow{\tau}^{(2)}_{2_{(3)}} = \vec{e}^{(2)}_2 \times \overrightarrow{R}^{(2)}_{\tau_{2_{(3)}}} = \left[e^{d(2)}_2\right]\left\{\overrightarrow{R}^{(2)}_{\tau_{2_{(3)}}}\right\}$$

$$\overrightarrow{R}_{\tau_{2_{(3)}}} = \sum_{\alpha=2}^{3}\left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha\right)$$

$$\overrightarrow{R}^{(2)}_{\tau_{2_{(3)}}} = \vec{\rho}^{(2)}_{22} + \vec{\rho}^{(2)}_{33} = \left\{\vec{\rho}^{(2)}_{22}\right\} + [A_{2,3}]\left\{\vec{\rho}^{(3)}_{33}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7,8212 \\ 1,1824 \end{Bmatrix}$$

И, коначно, можемо одредити квазибазни вектор $\overrightarrow{\tau}^{(3)}_{3_{(3)}}$:

$$\overrightarrow{R}^{(3)}_{\tau_{3_{(3)}}} = \vec{\rho}^{(3)}_{33} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\tau}^{(3)}_{3_{(3)}} = \left[e^{d(3)}_3\right]\left\{\overrightarrow{R}^{(3)}_{\tau_{3_{(3)}}}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Вектор брзине врха хватаљке је:

$$\overrightarrow{V}^{(0)}_H = [A_{0,1}]\left\{\overrightarrow{\tau}^{(1)}_{1_{(3)}}\right\}\dot{q}^1 + [A_{0,2}]\left\{\overrightarrow{\tau}^{(2)}_{2_{(3)}}\right\}\dot{q}^2 + [A_{0,3}]\left\{\overrightarrow{\tau}^{(3)}_{3_{(3)}}\right\}\dot{q}^3 = \begin{Bmatrix} -0,6140 \\ -0,8248 \\ 2,1480 \end{Bmatrix}$$