Густина енергије деформисања у датој тачки тела

1. Нека је стање напона у линеарно еластичном изотропном материјалу дато матрицом напона:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}20 & 30 & 0\\ 30 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 25\end{bmatrix}[MPa]$$

Наћи густину енергије деформације U за дату тачку тела ако је Пуасонов коефицијент $\nu=0.1$ и Јунгов модул еластичности $E=10GPa=10\cdot 10^{3}MPa=10^{10}Pa$.

Решење: Полазимо од општег израза за густину енергије деформисања која је дата следећим изразом:

$$U_0=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right)$$

Компоненте напрезања и деформација повезане су уопштеним Хуковим законом, те се густина енергије деформисања може изразити само као функција напрезања, тј. напона:

$$U_0=\frac{1}{2E}\left(\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2+\sigma_z{}^2\right)-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

где се после замене вредности матрице напона $[\sigma]$ добија:

$$U_0=0.1555\left[MJ/m^3\right]$$

где је искоришћена веза између Јунговог модула Е еластичности и модула клизања G и Пуасоновог коефицијента ν: $G=E/2(1+\nu)$.

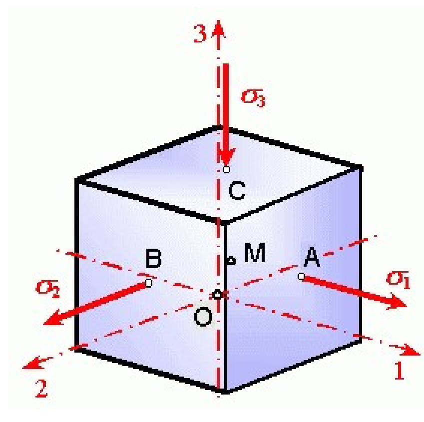
2.За просторно стање напрезања у тачки М тела приказано је на слици. Одредити густину енергије деформисања U_o као и њене делове: густину дилатацијске(хидростатичке) енергију U_{oh} као и густину дисторзијске енергије деформисања U_{od} ако је познато:

Главни напони су познати:

$\sigma_1=190MPa,\ \sigma_2=90MPa,\ \sigma_3=-100MPa,$

Пуасонов коефицијент $\nu=0.32$,

Јунгов модул еластичности



$E = 207GPa = 207 \cdot 10^3 MPa = 207 \cdot 10^9 Pa$

Решење:

Користи се израз за густину дилатацијске (хидростатичке) енергије U_{oh} где после замене нумеричких вредности следи:

$$U_{oh} = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 = \frac{1-2\cdot 0.32}{6\cdot 207\cdot 10^3}\left(190+90+\left(-100\right)\right)^2 MPa =$$
$$= 9.3913 \;\; kJ / m^3$$

Са друге стране, израз за густину дисторзијске енергије деформисања је:

$$U_{o\partial} = \frac{1+\nu}{6E}\left(\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1+0.32}{6\cdot 207\cdot 10^3}\left(\left(190-90\right)^2 + \left(90-\left(-100\right)\right)^2 + \left(-100-190\right)^2\right) MPa =$$
$$= 138.3768 \;\; kJ / m^3$$

Укупна густина енергије деформисања износи:

$$U_0 = U_{oh} + U_{od} = 9.3913 + 138.3768 = 147.768 \; kJ / m^3$$

Овде је од интереса одредити и процентуално учешће одговарајуће густине енергије деформисања тј.

$$\frac{U_{oh}}{U_o}\cdot 100\% = \frac{9.3913}{147.768}\cdot 100\% = 6.36\%$$
$$\frac{U_{od}}{U_o}\cdot 100\% = \frac{138.3768}{147.768}\cdot 100\% = 93.64\%$$