Нумеричка анализа - домаћи задаци (ИТМ смер, 2022.)

1. Заокружити дате бројеве на 5 цифара:
   13.131325, 9.13579, 98765.5, 66666.5, 1.55055055, 1239999.

2. Ако је $n = 11$, $n_1 = 6$ и $n_2 = 5$, навести запис броја 753.2468 у фиксном зарезу.

3. Ако је $n = 13$, $m = 10$ и $e = 3$, навести нормализовани запис броја 2020.2021 у покретном зарезу.

4. Одредити значајне цифре броја $a = 93487$. Апроксимирати га бројем са четири значајне цифре и одредити апсолутну и релативну грешку тако добијене вредности.

5. Заокружити број $\overline{a} = 72.353$, $\Delta(\overline{a}) = 0.026$, тако да му све цифре буду сигурне у ужем смислу. Израчунати релативну грешку броја добијеног заокруживањем.

6. Амплитуда при резонанцији код пригушених осцилација рачуна се по формули
   $$x_0 = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$
   где је F_0 амплитуда принудне силе, m маса осцилатора, ω_0 сопствена фреквенција осцилатора, β фактор пригушења. Одредити границу апсолутне грешке и границу релативне грешке приближне вредности величине x_0, ако је дато
   $$F_0 = (0.5 \pm 0.001)N, \quad m = (0.2 \pm 0.001)kg,$$
   $$\omega_0 = (7.231 \pm 0.004)s^{-1}, \quad \beta = (0.462 \pm 0.001)s^{-1}.$$

7. Одредити са коликом тачношћу треба задати променљиве x, y, z да би се величина
   $$f(x, y, z) = \frac{x + y^2}{z}$$
   одредила са тачношћу $\frac{1}{2}10^{-3}$, ако су приближне вредности аргумената
   $$\overline{x} = 3.2835, \quad \overline{y} = 0.93221, \quad \overline{z} = 1.13214,$$
   и ако се усвоји принцип једнаких утицаја на грешку.

8. Гаусовом методом елиминације са пивотирањем решити систем
   $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1.13x_1 & + & 0.12x_2 & - & 1.36x_3 & + & 1.02x_4 & = & 0.35 \\ -0.77x_1 & + & 1.15x_2 & + & 0.11x_3 & + & 0.11x_4 & = & 1.42 \\ 0.26x_1 & + & 0.25x_2 & + & 0.23x_3 & + & 0.24x_4 & = & 0.52 \\ 1.17x_1 & + & 1.35x_2 & - & 0.45x_3 & + & 0.98x_4 & = & 2.89 \end{array}.$$

9. LU декомпозицијом решити систем из задатка 8.

10. Извршити бар 5 итерација Јакобијеве методе за систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 6.1x_1 & + & 2.2x_2 & + & 1.2x_3 & = & 16.55 \\ 2.2x_1 & + & 5.5x_2 & - & 1.5x_3 & = & 10.55 \\ 1.2x_1 & - & 1.5x_2 & + & 7.2x_3 & = & 17.00 \end{array} .$$

11. Гаус-Зајделовом методом решити систем из задатка 10.

12. Методом regula-falsi са тачношћу $\epsilon = 10^{-5}$ одредити позитивно решење једначине $\sin x = x^2 - 1$.

13. Методом сечице са тачношћу $\epsilon = 10^{-5}$ одредити позитивно решење једначине $\sin x = x^2 - 1$.

14. Њутновом методом са тачношћу $\epsilon = 10^{-5}$ одредити негативно решење једначине $e^x + e^{-3x} - 4 = 0$.

15. Методом (просте) итерације са тачношћу $\epsilon = 10^{-4}$ одредити негативно решење једначине $(x-1)^2 - e^{-x} = 0$.

16. Методом (просте) итерације са тачношћу $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ решити систем

$$\begin{array}{lcl} x^3y^2 + 17y & = & 8.5 \\ 9x - x^4 \sin y^2 & = & 4.5 \end{array}$$

у околини тачке $(0.5, 0.5)$. Решење тражити у области

$$D = \{(x,y) \,|\, 0.4 \leq x, y \leq 0.6\} .$$

17. Оценити грешку приближне вредности функције $f(x) = \log x$ у тачки 11.5, која се добија помоћу Лагранжовог интерполациони полинома. За чворове интерполације узети тачке 10, 11, 12, 13.

18. Апроксимирати функцију $f(x) = e^x$ Њутновим интерполационим полиномом са подељеним разликама. За чворове интерполације узети тачке 0.0, 0.2, 0.5. Рачунати са 6 децимала.

19. Функција $y = f(x)$ дата је скупом података

x_i	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
y_i	0.4134	0.3900	0.3637	0.3351	0.3046	0.2727	0.2398

Table 1: Задатак 19.

Помоћу Њутновог интерполационог полинома са коначним разликама приближно израчунати $f(1.88)$.

x_i	14	17	31	35
y_i	68.7	64.0	44.0	39.1

Table 2: Задатак 20.

20. Функција $y = f(x)$ дата је скупом података

    Одредити у којој тачки дата функција има вредност 54.0.

21. Помоћу 1. Њутновог интерполационог полинома одредити приближну вредност другог извода функције $y = f(x)$ у тачки 1.5. Функција $y = f(x)$ дата је скупом података

x_i	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
y_i	0.3521	0.3011	0.2420	0.1827	0.1295

Table 3: Задатак 21.

22. Извести квадратурну формулу облика

$$\int_{0.2}^{0.3} f(x)\,dx \approx A_0 f(0.20) + A_1 f(0.27) + A_2 f(0.30)$$

    тако да буде тачна за полиноме што је могуће вишег степена.

23. Израчунати приближну вредност интеграла

$$\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1}\,dx$$

    користећи општу Симпсонову квадратурну формулу (интервал интеграције поделити на 4, а затим на 8 једнаких делова и израчунати Рунгеову процену грешке).

24. Имплицитном Ојлеровом методом на сегменту $[0, 1]$ са кораком $h = 1/12$ приближно решити Кошијев проблем

$$y'(x) = 0.06y, \quad y(0) = 1000.$$

Решења

1. 13.131, 9.1358, 98766, 66666, 1.5506, $12400 \cdot 10^2$.
2. 000753|24680.
3. 2020202100|004.
4. све цифре су значајне, $\overline{a} = 0.9349 \cdot 10^5$, $|a - \overline{a}| = 0.3 \cdot 10^1$, $\frac{|a-\overline{a}|}{|a|} \approx 0.3 \cdot 10^{-4}$.
5. 72, $\delta \approx 0.005$.
6. $\Delta(\overline{x}_0) \leq 0.0021m$, $\delta(\overline{x}_0) \leq 0.009$.
7. $\Delta(\overline{x}) \leq 0.19 \cdot 10^{-3}$, $\Delta(\overline{y}) \leq 0.1 \cdot 10^{-3}$, $\Delta(\overline{z}) \leq 0.052 \cdot 10^{-3}$.
8. тачно решење је $(1, 2, 0, -1)$.
9. тачно решење је $(1, 2, 0, -1)$.
10. на крају би се добило $(1.48, 2.01, 2.53)$.
11. $(1.48, 2.01, 2.53)$.
12. 1.40962.
13. 1.40962.
14. -0.40103.
15. -2.51282.
16. $x = 0.501730$, $y = 0.498156$.
17. $6.1 \cdot 10^{-6}$.
18. $0.634756x^2 + 0.980064x + 1$.
19. 0.39494.
20. 23.6.
21. 0.043732.
22. $\displaystyle\int_{0.2}^{0.3} f(x)\,dx \approx 0.02622f(0.20) + 0.07929f(0.27) - 0.00511f(0.30)$.
23. 0.0883.
24. $y_{12} = 1061.8367$.