

Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:



Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.



Za dodatna pitanja vezano za zadatak.



Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!.



Za ideju, komentar na izvođenje.



Za preporuku uz zadatak.

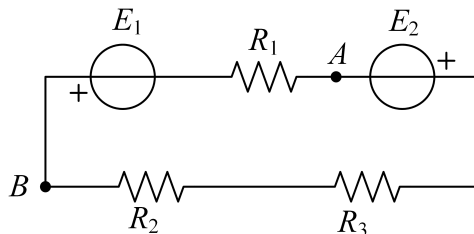
Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
- U živo: tokom termina konsultacija **sredom u 10 časova** u Laboratoriji za elektrotehniku i elektroniku (soba 2, pored Studentske službe).

1 Stalne struje

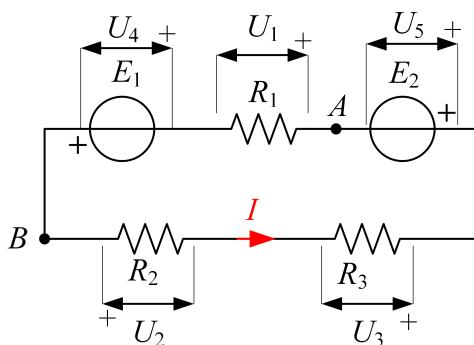
1. U kolu stalne struje prikazanom na slici poznato je $E_1 = 30 \text{ V}$, $E_2 = 25 \text{ V}$, $R_1 = 10 \text{ } \Omega$, $R_2 = 20 \text{ } \Omega$ i $R_3 = 70 \text{ } \Omega$. Izračunati:

- Jačinu struje u kolu.
- Napone svih elemenata.
- Napon između tačaka A i B , U_{AB} .
- Snage svih elemenata.



REŠENJE: a) Primenom Omovog zakona za prosto kolo, a prema usvojenom (proizvoljno) referentnom smeru struje dobijamo

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 - 25}{10 + 20 + 70} = \frac{1}{20} \text{ A} = 50 \text{ mA}.$$



b) Prema usvojenim (proizvoljno) referentnim smerovima napona dobijamo

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I = 10 \cdot \frac{1}{20} = 0,5 \text{ V} \\ U_2 &= R_2 I = 20 \cdot \frac{1}{20} = 1 \text{ V} \\ U_3 &= -R_3 I = -70 \cdot \frac{1}{20} = -3,5 \text{ V} \\ U_4 &= -E_1 = -30 \text{ V} \\ U_5 &= E_2 = 25 \text{ V}. \end{aligned}$$

c) Traženi napon je

$$U_{AB} = R_1 I - E_1 = 0,5 - 30 = -29,5 \text{ V}$$

ili

$$U_{AB} = -E_2 - R_3 I - R_2 I = -25 - 3,5 - 1 = -29,5 \text{ V}.$$

d) Prema usvojenom referentnom smeru struje je

$$P_{E_1} = E_1 I = 30 \cdot \frac{1}{20} = 1,5 \text{ W}$$

$$P_{E_2} = -E_2 I = -25 \cdot \frac{1}{20} = -1,25 \text{ W}.$$

Snage otpornika možemo dobiti primenom formula $P_R = \frac{U_R^2}{R}$ ili $P_R = RI^2$. Dakle,

$$P_{R_1} = R_1 I^2 = 10 \cdot \frac{1}{400} = 25 \text{ mW},$$

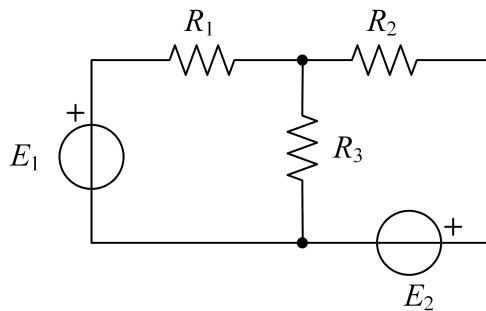
$$P_{R_2} = R_2 I^2 = 20 \cdot \frac{1}{400} = 50 \text{ mW},$$

$$P_{R_3} = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{12,25}{70} = 175 \text{ mW}.$$



Primetiti da je zbir snaga generatora $\sum P_{\text{gen}} = 1,5 - 1,25 = 0,25 \text{ W} = 250 \text{ mW}$, a da je zbir snaga na otpornicima $\sum P_R = 25 + 50 + 175 = 250 \text{ mW}$. Prema tome, potvrdili smo da važi zakon održanja snage.

2. Za kolo stalne struje sa slike poznato je $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$ i $R_3 = 3 \Omega$. Napisati jednačine po Kirhofovom zakonima i izračunati snagu idealnih naponskih generatora.

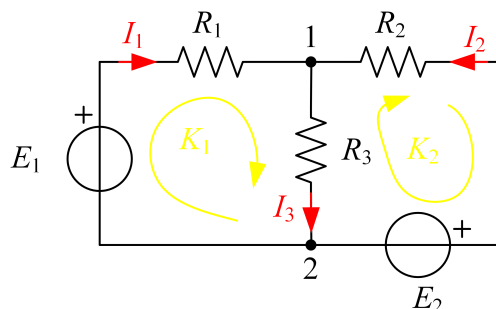


REŠENJE: Broj jednačina po I Kirhofovom zakonu (KZ) je $n_{\text{č}} - 1$, gde je $n_{\text{č}}$ broj čvorova u kolu. Broj jednačina po II Kirhofovom zakonu je $n_g - n_{\text{č}} + 1$, gde je n_g broj grana u kolu (grana je od čvora do čvora u teoriji grafova). Primitimo da je broj čvorova u kolu jednak $n_{\text{č}} = 2$, da je broj grana u kolu $n_g = 3$. Dakle, po I KZ ima jedna jednačina, a po II KZ imaju dve jednačine. Označimo na proizvoljan način struje i konture u kolu, kao na slici. Sistem jednačina je

$$\text{čvor 1: } -I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$K_1: E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

$$K_2: R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_2 = 0.$$



Zamenom vrednosti dobija se

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$-2I_1 - 3I_3 = -12$$

$$3I_3 + 5I_2 = 6.$$

Rešavanjem sistema jednačina se dobija $I_1 = \frac{78}{31} \approx 2,52 \text{ A}$, $I_2 = -\frac{6}{31} \approx -0,19 \text{ A}$ i $I_3 = \frac{72}{31} \approx 2,32 \text{ A}$.

Prema odabranim referentim smerovima struje, snage idealnih naponskih generatora su

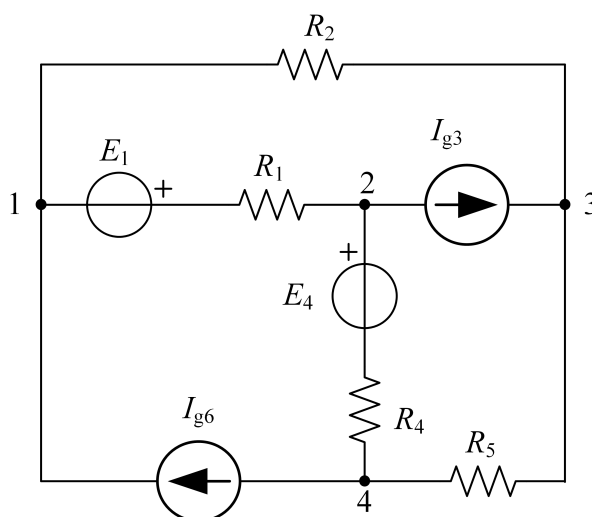
$$P_{E1} = E_1 I_1 = 30,24 \text{ W}$$

$$P_{E2} = E_2 I_2 = -1,14 \text{ W}.$$



Primetiti da se idealni naponski generator E_1 ponaša kao generator, a da se idealni naponski generator E_2 ponaša kao prijemnik.

3. Za kolo sa stalne struje sa slike je $E_1 = 60 \text{ V}$, $E_4 = -20 \text{ V}$, $I_{g3} = 10 \text{ mA}$, $I_{g6} = 30 \text{ mA}$, $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_4 = 1,5 \text{ k}\Omega$ i $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$. Napisati sistem jednačina po Kirhofovima zakonima i izračunati snagu otpornika R_4 .



REŠENJE: U kolu sa slike postoje 4 čvora i 6 grana. Broj jednačina po I KZ je 3, a po II KZ je 3. Za orijentacije sa slike pišemo jednačine

$$\text{čvor 1: } I_1 - I_2 - I_{g6} = 0$$

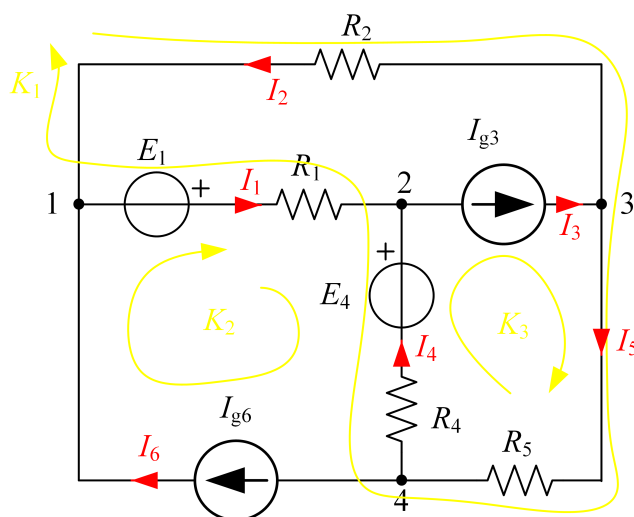
$$\text{čvor 2: } -I_1 - I_4 + I_{g3} = 0$$

$$\text{čvor 3: } I_2 - I_{g3} + I_5 = 0.$$

$$K_1 : -R_2 I_2 + E_1 - R_1 I_1 - E_4 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0$$

$$K_2 : I_6 = I_{g6}$$

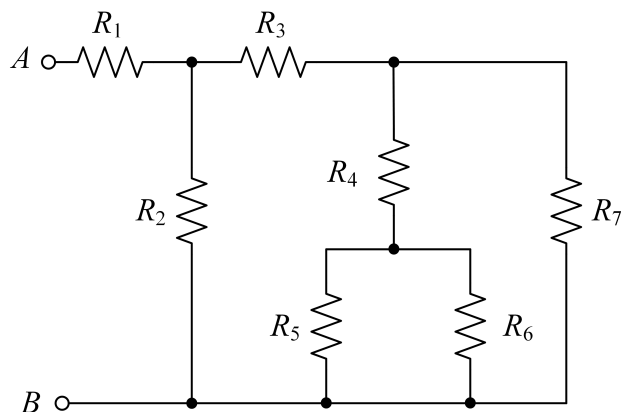
$$K_3 : I_3 = I_{g3}.$$



Zamenom brojnih vrednosti i rešavanjem sistema jednačina dobija se $I_1 = 50 \text{ mA}$, $I_2 = 20 \text{ mA}$, $I_3 = I_{g3} = 10 \text{ mA}$, $I_4 = -40 \text{ mA}$, $I_5 = -10 \text{ mA}$ i $I_6 = I_{g6} = 30 \text{ mA}$. Snaga otpornika R_4 je

$$P_{R4} = R_4 I_4^2 = 1500 \cdot (-40)^2 \cdot 10^{-6} = 2,4 \text{ W}.$$

4. Za otporničku mrežu prikazanu na slici, izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B ukoliko je $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 90 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 22 \Omega$, $R_5 = R_6 = 4 \Omega$ i $R_7 = 8 \Omega$.



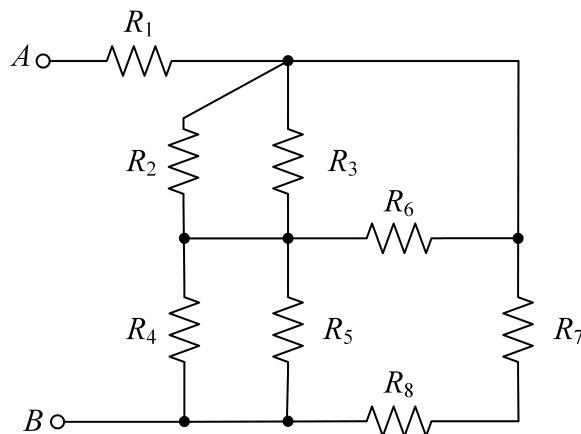
REŠENJE: Ekvivalentna otpornost između tačaka A i B je kombinacija rednih i paralelnih veza i data je izrazom

$$\begin{aligned} R_{\text{ekv}} &= [(R_5 \parallel R_6 + R_4) \parallel R_7 + R_3] \parallel R_2 + R_1 \\ &= [(4 \parallel 4 + 22) \parallel 8 + 4] \parallel 90 + 1 \\ &= \left[\left(\frac{4 \cdot 4}{4 + 4} + 22 \right) \parallel 8 + 4 \right] \parallel 90 + 1 \\ &= [(2 + 22) \parallel 8 + 4] \parallel 90 + 1 \\ &= \left[\frac{24 \cdot 8}{24 + 8} + 4 \right] \parallel 90 + 1 \\ &= (6 + 4) \parallel 90 + 1 = \frac{10 \cdot 90}{10 + 90} + 1 \\ &= 9 + 1 = 10 \Omega. \end{aligned}$$



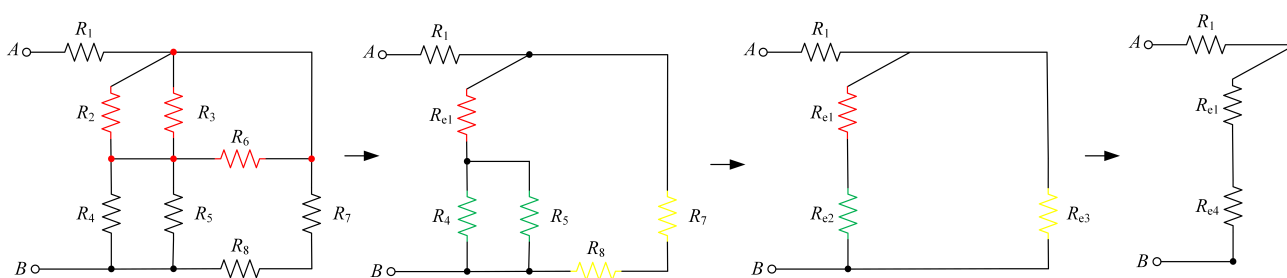
Prilikom formiranja izraza za ekvivalentnu otpornost operator \parallel ima prednost nad operatorom $+$.

5. Za otporničku mrežu sa slike poznato je: $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$, $R_4 = R_5 = 4 \Omega$, $R_6 = 4 \Omega$, $R_7 = R_8 = 2 \Omega$. Izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B, R_{AB} .

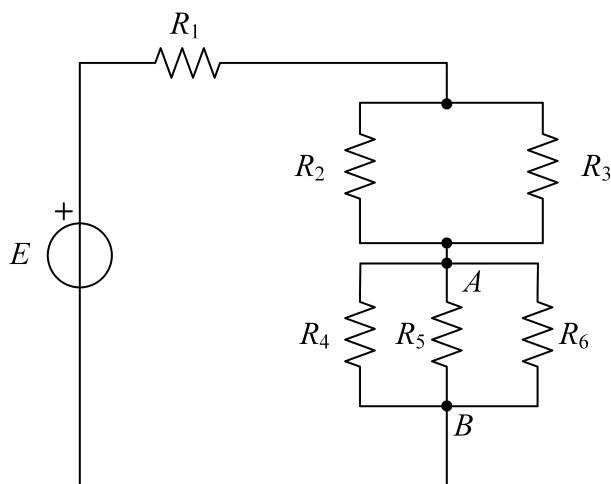


REŠENJE: Ekvivalentna optornost može se dobiti postepenim transfiguracijama radnih i paralelnih veza. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned}
 R_{AB} &= \left(\underbrace{R_2 \parallel R_3 \parallel R_6}_{=R_{e1}} + \underbrace{R_4 \parallel R_5}_{=R_{e2}} \right) \parallel \left(\underbrace{R_7 + R_8}_{=R_{e3}} \right) + R_1 \\
 &= (6 \parallel 12 \parallel 4 + 4 \parallel 4) \parallel 4 + 3 \\
 &= (4 \parallel 4 + 2) \parallel 4 + 3 \\
 &= (2 + 2) \parallel 4 + 3 \\
 &= 2 + 3 = 5 \Omega.
 \end{aligned}$$



6. U prikazanom kolu stalne struje poznato je $E = 66 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 15 \Omega$. Izračunati snagu idealnog naponskog generatora i snagu na otporniku R_4 .



REŠENJE: Primitimo da su otpornici R_2 i R_3 vezani paralelno pa je

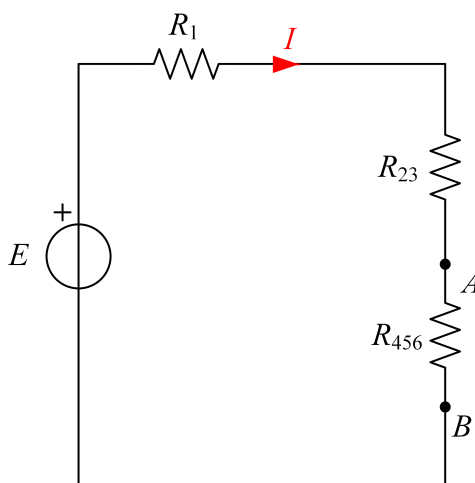
$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{40 \cdot 10}{50} = 8 \, \Omega.$$

Takođe su i otpornici R_4 , R_5 i R_6 vezani paralelno pa je

$$\frac{1}{R_{456}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{3}{15} \Rightarrow R_{456} = 5 \, \Omega.$$

Na dobijeno prosto kolo primenjujemo Omov zakon i struja je

$$I = \frac{E}{R_1 + R_{23} + R_{456}} = \frac{66}{20 + 8 + 5} = 2 \, \text{A}.$$



Snaga idealnog naponskog generatora je

$$P_E = EI = 66 \cdot 2 = 132 \, \text{W}.$$

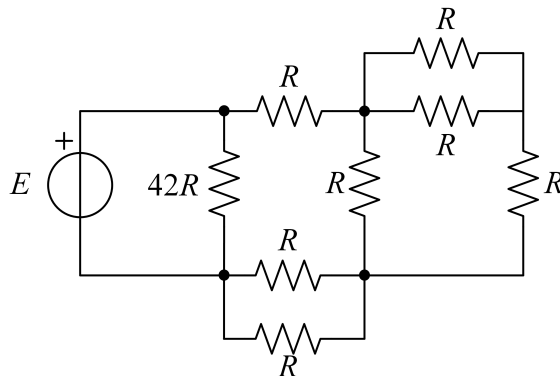
Kako je napon na otporniku R_{456} jednak naponu na otpornicima R_4 , R_5 i R_6 dobijamo

$$U_{AB} = R_{456}I = 5 \cdot 2 = 10 \, \text{V}$$

pa je snaga

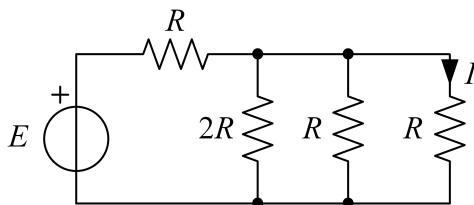
$$P_{R4} = \frac{U_{AB}^2}{R_4} = \frac{100}{15} = 6,67 \, \text{W}.$$

7. (Zadatak za samostalni rad) Za kolo prikazano na slici poznato je $R = 0,5 \text{ k}\Omega$ i $E = 63 \text{ V}$. Izračunati ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator i struju kroz otpornik $42R$.



REZULTAT: $R_{\text{ekv}} = 2R = 1 \text{ k}\Omega$, $I_{42R} = 3 \text{ mA}$.

8. (Zadatak za samostalni rad) U kolu prikazanom na slici poznato je $R = 5 \Omega$. Ukoliko je struja $I = 1 \text{ A}$ izračunati vrednost ems idealnog naponskog generatora.



REZULTAT: $E = 17,5 \text{ V}$.